


Черкесов Г.Н., Степанов Ю.В.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НАДЕЖНОСТИ

В статье излагается новый метод решения логических уравнений с одним или несколькими неизвестными и систем логических уравнений, использующий модифицированную таблицу истинности. Данный метод позволяет находить все общие решения. Найдены условия разрешимости систем уравнений. Теория проиллюстрирована примерами. Показаны технические применения.

Ключевые слова: *надежность, логическая модель надежности, логико-вероятностный анализ надежности, общее решение систем логических уравнений, модифицированная таблица истинности, индикатор, условия разрешимости.*

1. Введение

Для систем, имеющих сложную структуру, не сводящуюся к последовательно-параллельным схемам, возникает потребность формального описания условий их работоспособности. Использование для этих целей процедуры составления логических функций работоспособности системы (ЛФРС) путем перечисления кратчайших путей успешного функционирования (КПУФ) и соответствующих им дизъюнктивных членов приводит к записи ЛФРС в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Такой способ вполне приемлем для систем небольшой сложности, но затруднителен уже для систем средней сложности (при количестве элементов более десяти). Так, по подсчетам [1] в электроэнергетической системе с 15 элементами число КПУФ достигает нескольких сотен. Для более сложных систем запись ЛФРС в виде ДНФ становится практически невозможной.

Решение задачи упрощается, если условия работоспособности записывают с помощью систем логических уравнений (СЛУ). Решение СЛУ с помощью специальных методов приводит к многоскобочной формуле и существенно более компактной записи ЛФРС. В настоящее время разработан ряд методов решения систем логических уравнений. Для неоднородных линейных СЛУ с постоянными или переменными коэффициентами применяют метод определителей [2], позволяющий получить частное решение вида:

$$y = f(X)y_0,$$

где y_0 – индикатор свободных членов неоднородной системы уравнений.

При $y_0 = 0$ частное решение соответствует однородной СЛУ и будет нулевым. В [3] приведены еще три метода получения частного решения СЛУ: метод подстановки, метод приведения к одному уравнению и матричный метод. Варианты успешного применения метода определителей и других методов получения частных решений для решения технических задач показаны в [4, 5].

Частное решение неоднородной СЛУ в ряде случаев оказывается недостаточным или приводит к неправильному отражению всех условий успешного функционирования технической системы. Поэтому были предприняты попытки устранить недостатки частного решения и найти общее решение СЛУ. В работе [3] излагаются два метода получения общего решения неоднородной СЛУ, а именно метод подстановки и метод приведения к одному уравнению с n неизвестными. Общее решение имеет вид:

$$y = f(X)y_0 \vee g(X)y_c, \tag{1}$$

где y_0 – вектор неизвестных логических функций; f и g – известные функции, зависящие от коэффициентов уравнений; y_c – произвольная функция алгебры логики; знаком V обозначена операция дизъюнкции. При $y_0 = 0$ получают решение однородной системы. Однородные СЛУ решают либо методом подстановки, либо путем приведения к неоднородной СЛУ.

При получении общего решения вида (1) возникают определенные трудности. Во-первых, отсутствуют рекомендации по выбору произвольной ФАЛ y_c , хотя от этого выбора зависит результат оценки надежности. Кроме того, согласно [3] существует только одно решение вида (1). На самом деле может быть несколько общих решений. И только одно из них может удовлетворить особым условиям функционирования технической системы. Чтобы его найти, надо иметь полный спектр общих решений. Методы их получения не разработаны. Недостаточно разработаны и методы решения одного уравнения с несколькими неизвестными, которое также может иметь несколько общих решений.

При получении общего решения возникает еще одна трудность. Для СЛУ решение представляется в форме

$$y_i = f_{1i}(X) \vee f_{2i}(X)y_c, i = 1, \ldots n.$$

Если считать, что здесь y_c одинаковы для всех функций y_i , то получим только одно общее решение. Если же они различны для различных y_i , то возникает вопрос о том, как их выбирать.

Наконец, существует проблема логической корректности записи системы уравнений и ее разрешимости. В работах по методам решения СЛУ этот вопрос, как правило, не обсуждается и по умолчанию предполагается, что решение всегда существует и система разрешима. На самом деле это не всегда так. Уравнения и системы уравнений могут не иметь ни одного общего решения. Попытки формального применения известных методов в таких случаях приводят к не интерпретируемым или просто абсурдным результатам. Поэтому необходимо сначала убедиться, что СЛУ имеет хотя бы одно общее решение и найти условия ее разрешимости.

Есть еще одна проблема. Для некоторых классов технических систем и частное, и общее решение [3] могут оказываться неприемлемыми, так как не отражают некоторых существенных особенностей их функционирования.

Это происходит, в частности, при наличии в структуре системы контуров обратной связи, характерных для ряда технических систем. Такие контуры часто используются в информационных, электроэнергетических, технологических, транспортных системах, системах связи и других. Общим для всех упомянутых типов систем является то, что они выполняют передачу (транспортирование) или преобразование некоторой субстанции (информации, электроэнергии, энергоносителя и пр.) и содержат в своем составе «питающий» элемент (источник информации, генератор, накопитель энергоносителя). Поэтому для успешного функционирования этих систем недостаточно обеспечить только работоспособность некоторой группы элементов. Надо создать условия успешного транспортирования или преобразования субстанции для ее продвижения от входа («питающего» элемента) к выходу системы по прямому каналу. Контур обратной связи является одним из средств обеспечения этих условий. В информационных системах и системах связи создается контур передачи служебной информации от приемника к передатчику. В электроэнергетических системах создают контуры потребления энергии для собственных нужд. В технологических системах с замкнутым контуром безотходного использования носителя субстанции создают контур преобразования отработанного носителя (например, пара) и доставки восстановленного носителя на вход системы. Могут быть сформулированы и другие особые условия функционирования (ОУФ), например, наличие в КПУФ хотя бы одного «питающего» элемента.

При использовании частного решения СЛУ может возникнуть нежелательный эффект поглощения элементов контура обратной связи элементами прямого канала. Это приводит к искажению реальных условий функционирования и неверной оценке надежности. При использовании общего решения [3] часто происходит потеря «питающего элемента».

В работе [7] излагается аналитический метод получения общего решения булевых уравнений. Этот метод универсален, но он не предлагает конструктивных правил и алгоритмов нахождения общего решения и выбора из множества решений именно того варианта, который вполне соответствует физической сущности технической системы, отраженной в логической модели надежности.

Излагаемые далее результаты основаны на использовании модифицированной таблицы истинности и позволяют частично преодолеть указанные трудности.

2. Общее решение уравнения с одним неизвестным

В общем виде уравнение записывают в форме

$$A_1(X) \vee A_2(X)y \vee A_3(X)y' = \\ = A_4(X) \vee A_5(X)y \vee A_6(X)y', \tag{2}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор независимых булевых переменных, индикаторов работоспособности элементов системы; $A_i(X)$ – известные функции векторного аргумента; y' – отрицание y.

Преобразуем (2) к каноническому виду без потери корней. Для этого надо перейти от булева базиса к базису Жегалкина. Ортогонализируя слагаемые в (2) и заменяя операции дизъюнкции на исключающее «или» (сложение по модулю 2), получаем

$$A_1 \oplus A_1' A_2 y \oplus A_1' A_3 y' = A_3 \oplus A_4' A_5 y \oplus A_4' A_6 y'. \qquad (3)$$

Прибавляя слева и справа правую часть (3) и используя равенство $y \oplus \oplus y = 0$, имеем

$$(A_1 \oplus A_4) \oplus (A_1' A_2 \oplus A_4' A_5) y \oplus (A_1' A_3 \oplus A_4' A_6) y' = 0.$$

Перебирая различные сочетания A_i, получим модифицированную таблицу истинности для функции y, состоящую из трех групп строк: 1) y определено полностью, 2) y не определено, то есть его значение безразлично $(0 \vee 1)$, 3) нет решения, так как (2) не выполняется ни при каком значении y (таблица 1). Значения A_i не являются независимыми, так как они есть функции вектора X. Поэтому, строго говоря, некоторые сочетания значений A_i (вектора в табл. 1) могут оказаться невозможными ни при каких значениях вектора X.

Из данных таблицы 1 видно, что из 64 комбинаций значений A_i на 24 комбинациях функция y определена (группа 1), в том числе на 12 как единица, на 28 комбинациях не определена (группа 2) и на 12 система (2) неразрешима (группа 3).

По модифицированной таблице истинности составляем решение по следующим правилам:

1. Каждому набору A_i, где y=1, сопоставляется конституента 1 (всего до 12 конституент).
2. Каждому набору группы 2 сопоставляется конституента 1, умноженная на индикатор R, который может принимать значения 0 или 1.
3. Наборы группы 3 не учитываются.

Таким образом в общее решение может входить всего до 40 конституент 1 с индикатором или без него

$$y = (\bigvee_{i \in M_1} K_i) \vee (\bigvee_{i \in M_2} K_i R_i), \qquad (4)$$

где M_1 = (1, 8, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 34, 42, 50, 58), M_2 = (0, 9, 18, 27, 28, 29, 30, 31, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 47, 51, 52, 53, 54, 55, 59, 60, 61, 62, 63). Конституенты 1 без индикатора и с индикатором в явном виде могут быть представлены формулами

$$K = A_1^{\alpha 1}(X) A_2^{\alpha 2}(X) \ldots A_6^{\alpha 6}(X),$$

$$K^c = KR = R(A_1^{\alpha 1}(X) A_2^{\alpha 2}(X) \ldots A_6^{\alpha 6}(X)). \qquad (5)$$

Таблица 1. Модифицированная таблица истинности

№ п/п	$A_1 \ldots A_6$	Вид уравнения	y	Группа	№ п/п	$A_1 \ldots A_6$	Вид уравнения	y	Группа
0	000000	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2	32	100000	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3
1	000001	$y' = 0$	1	1	33	100001	$1 \oplus y' = 0$	0	1
2	000010	$y = 0$	0	1	34	100010	$1 \oplus y = 0$	1	1
3	000011	$y \oplus y' = 0$	Нет	3	35	100011	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2
4	000100	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3	36	100100	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
5	000101	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3	37	100101	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
6	000110	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3	38	100110	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
7	000111	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3	39	100111	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
8	001000	$y' = 0$	1	1	40	101000	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3
9	001001	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2	41	101001	$1 \oplus y' = 0$	0	1
10	001010	$y \oplus y' = 0$	Нет	3	42	101010	$1 \oplus y = 0$	1	1
11	001011	$y = 0$	0	1	43	101011	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2
12	001100	$1 \oplus y' = 0$	0	1	44	101100	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
13	001101	$1 \oplus y' = 0$	0	1	45	101101	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
14	001110	$1 \oplus y' = 0$	0	1	46	101110	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
15	001111	$1 \oplus y' = 0$	0	1	47	101111	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
16	010000	$y = 0$	0	1	48	110000	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3
17	010001	$y \oplus y' = 0$	Нет	3	49	110001	$1 \oplus y' = 0$	0	1
18	010010	0⊕0y⊕0y’=0	0 V1	2	50	110010	$1 \oplus y = 0$	1	1
19	010011	$y' = 0$	1	1	51	110011	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2
20	010100	$1 \oplus y = 0$	1	1	52	110100	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
21	010101	$1 \oplus y = 0$	1	1	53	110101	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
22	010110	$1 \oplus y = 0$	1	1	54	110110	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
23	010111	$1 \oplus y = 0$	1	1	55	110111	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
24	011000	$y \oplus y' = 0$	Нет	3	56	111000	$1 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	Нет	3
25	011001	$y = 0$	0	1	57	111001	$1 \oplus y' = 0$	0	1
26	011010	$y' = 0$	1	1	58	111010	$1 \oplus y = 0$	1	1
27	011011	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2	59	111011	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2
28	011100	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2	60	111100	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
29	011101	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2	61	111101	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
30	011110	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2	62	111110	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2
31	011111	$1 \oplus y \oplus y' = 0$	0 V1	2	63	111111	$0 \oplus 0y \oplus 0y' = 0$	0 V1	2

Они являются некоторой функцией вектора X и могут быть представлены в ДНФ или совершенной ДНФ (СДНФ). При этом индикатор R в (5) рассматривается как вектор, а произведение KR как скалярное произведение. Тогда (5) можно представить в виде

$$K^c(X) = k_c^1 r_1 \vee k_c^2 r_2 \vee \ldots \vee k_c^m r_m,$$

где k_c^j – конституента 1 относительно вектора X; r_j – индикаторная функция; m – число конституент 1 в СДНФ.

Перебирая возможные значения индикаторных функций, получим 2^m различных предполагаемых решений, каждое из которых подлежит проверке, так как могут быть ложные корни. Проверка проводится путем подстановки в (2).

Логическая функция (4) поддается минимизации. Нетрудно установить, что из 40 конституент 27 конституент 1 не поддается упрощению, а в 13 возможно обобщенное склеивание после определенной группировки, а именно: $K_0 \vee K_1$, $K_8 \vee K_9^c$, $K_{18}^c \vee K_{19}$, $K_{20} \vee K_{21} \vee K_{22} \vee K_{23}$, $K_{19} \vee K_{23}$, $K_{26} \vee K_{27}^c$, $K_{34} \vee K_{42} \vee K_{50} \vee K_{58}$. После склеивания минимальная ДНФ (МДНФ) содержит 34 слагаемых (вместо 40 в СДНФ). Степень упрощения, оцениваемая отношением количества букв в МДНФ и СДНФ, составляет 0,925. Алгоритм поиска общих решений с использованием МДНФ состоит из следующих этапов:

1. По форме записи уравнения (2) устанавливают явные выражения для $A_i(X)$.
2. Подставляют $A_i(X)$ в МДНФ и записывают y в явной форме с использованием индикаторных функций.
3. В каждом дизъюнктивном члене K_i^c преобразуют K_i в СДНФ и записывают скалярное произведение K_iR с индикаторными переменными r_j.
4. Перебирают все возможные значения r_j и формируют все предполагаемые решения.
5. Проверяют каждое предполагаемое решение путем подстановки в исходное уравнение.
6. После селекции получают набор решений, из которых одно частное, а остальные общие, в том числе одно по [4] с одинаковыми и равными 1 индикаторными функциями.

Чтобы найти решение уравнения

$$(x_1 \vee x_2)y \vee y' = 1, \tag{6}$$

надо принять $A_1 = A_6 = 1$, $A_2 = A_3 = A_4 = 0$, $A_5 = x_1 \vee x_2$. Допустимые наборы 33 и 35 относятся к группам 1 и 2. Поскольку на наборе 33 значение y=0, то множество M_1 в формуле (4) пусто и решение имеет вид

$$y = K_c = KR = x_1x_2'r_1 \vee x_1x_2r_2 \vee x_1'x_2r_3,$$

где $K = A_5 = x_1 \vee x_2 = x_1x_2' \vee x_1x_2 \vee x_1'x_2$. Для восьми значений вектора R имеем восемь решений: 0, $x_1'x_2$, x_1x_2, x_2, x_1x_2', $x_1'x_2 \vee x_1x_2'$, x_1, $x_1 \vee x_2$, в том числе нулевое решение. Это частное решение, остальные общие, из них одно соответствует [3]. Подстановка этих решений в (6) показывает, что все они являются корнями уравнения. Общим решениям соответствуют следующие вероятности $P_c = P\{y = 1\}$: q_1p_2, p_1p_2, p_2, p_1q_2, $q_1p_2+p_1q_2$, p_1, $1–q_1q_2$. Однако не всегда бывает так, что все корни истинные. Например, если вместо (6) взять уравнение

$$(x_1x_2)y \vee x_2'y' = 1, \tag{7}$$

то получим четыре конституенты 1, из которых две входят в решение (4):

$$y = K_{34} \vee K_{35} = A_5A_6' \vee A_5A_6,\ A_5 = x_1x_2,\ A_6 = x_2'.$$

Отсюда видно, что нет ни одного набора X, где бы $K_{35} = 1$, а корень $A_5A_6' = x_1x_2$ является ложным. Поэтому уравнение (7) не имеет решения.

Чтобы найти решение уравнения: $y = x_1x_2 \vee x_2'x_3\ y$, надо взять $A_1 = A_3 = A_6 = 0$, $A_2 = 1$, $A_4 = x_1x_2$, $A_5 = x_2'x_3$. Этим A_i согласно таблице 1 соответствуют четыре конституенты 1 с номерами 16, 18, 20 и 22. Согласно таблице 1 на наборе с номером 16 функция равна нулю. Остальные три входят в решение вида (4)

$$y = K_{18}R_{18} \vee K_{20} \vee K_{22} = x_1x_2' \vee x_2'x_3R_{18}.$$

После перехода в K_{18} к СДНФ и умножения на R_{18} получим:

$$y = x_1x_2 \vee x_1'x_2'r_1 \vee x_1\,x_2'x_3r_2.$$

Перебирая значения индикаторов, найдем четыре решения: $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_1x_2 \vee x_1'x_2'x_3$, $y_3 = x_1x_2 \vee x_1x_3$, $y_4 = x_1x_2 \vee x_2'x_3$. Проверка показывает, что среди них нет ложных корней. Решение y_1 является частным, решение y_4 по [3]. Еще два общих решения дополняют полный спектр решений. Этим решениям соответствуют следующие вероятности:

$$P_{c1} = p_1p_2,\ P_{c2} = p_1p_2 + q_1q_2p_3,\ P_{c3} = p_1(1 - q_2q_3),$$
$$P_{c4} = p_1p_2 + q_1p_3.$$

Представляет практический интерес поиск условий разрешимости (или неразрешимости) системы уравнений. Согласно таблице 1 есть 12 наборов значений A_i под номерами 3, 4, 5, 6, 7, 10, 17, 24, 32, 40, 48, 56, при которых нет решения. Из них десять наборов содержат две или три единицы. Им соответствует пять типов неразрешимых уравнений

$$By \vee Gy' = 0,\ B \vee Gy' = 0,\ B \vee Gy =$$
$$= 0,\ B \vee Gy \vee Cy' = 0,\ Gy' \vee By = 0. \tag{8}$$

Первое уравнение соответствует конституентам 1 с номерами 3 и 24, второе – с номерами 5 и 40, третье – с номерами 6 и 48, четвертое – с номерами 7 и 56, пятое – с номерами 10 и 17. Уравнение неразрешимо, если функции $B(X)$, $C(X)$ и $G(X)$ при некоторых наборах X могут одновременно принимать значения 1. Если это не так, то и эти уравнения могут иметь решения.

Из (8) можно найти условие разрешимости. Проведя в первом уравнении (8) обобщенное склеивание по y, имеем:

$$By \vee Gy' \vee BG = 0.$$

Чтобы первое уравнение в (8) выполнялось, необходима ортогональность функций B и G на всех наборах значений аргументов

$$B(X)G(X) = 0. \tag{9}$$

Из второго, третьего и пятого уравнений (8) также получим условие (9). Из четвертого уравнения путем трех операций обобщенного склеивания находим

$$B \vee Gy \vee Cy' = B \vee Gy \vee Cy' \vee BG \vee BC \vee CG.$$

Отсюда условие разрешимости

$$B(X)G(X) \vee B(X)C(X) \vee C(X)G(X) = 0.$$

Это условие поглощает условие (9). Таким образом, для разрешимости уравнений типа (8) функции $B(X)$, $C(X)$ и $G(X)$ должны быть ортогональны на всех наборах X.

3. Общее решение одного уравнения с n неизвестными

Для двух неизвестных уравнение имеет вид

$$F(X, y_1, y_2) = B(X, y_1, y_2).$$

Выделим в F и B часть, не связанную с y_1 и проведем разрезание по y_1 в остальной части

$$C_1(X, y_2) \vee C_2(X, y_2) y_1 \vee C_3(X, y_2) y_1' =$$

$$= C_4(X, y_2) \vee C_5(X, y_2) y_1 \vee C_6(X, y_2) y_1'. \quad (10)$$

Это уравнение по форме совпадает с (2) при $A_i = C_i(X, y_2)$ и $y = y_1$. Полагая (10) разрешимым относительно y_1, получим, решение по правилам предыдущего раздела:

$$y_1 = F(X, R, y_2). \quad (11)$$

Представим (11) в виде

$$y_1 = G_0(X, R_0) \vee G_1(X, R_1) y_2 \vee G_1(X, R_2) y_2'), \quad (12)$$

где R_0, R_1, R_2 – вектора индикаторных функций. Поскольку в (12) второе и третье слагаемые ортогональны, операцию дизъюнкции можно заменить на сложение по модулю 2, а затем провести ортогонализацию первого и остальных слагаемых и перейти к базису Жегалкина

$$y_1 = G_0 \oplus G_0'(G_1 y_2 \oplus G_2 y_2'). \quad (13)$$

С помощью (13) составим модифицированную таблицу истинности (таблица 2). На наборах 0, 3, 4, 5, 6 и 7 значение y_1 определено однозначно (группа 1), на наборах 1 и 2 функции y_1 и y_2 имеют два варианта значений.

Таблица 2. Модифицированная таблица истинности

№ п/п	$G_0G_1G_2$	Вид уравнения	y_1	y_2	Группа
0	000	$0 \oplus 0 \oplus y_1 = 0$	0	$0 \vee 1$	1
1	001	$y_2' \oplus y_1 = 0$	0 1	1 0	2
2	010	$y_2 \oplus y_1 = 0$	0 1	0 1	2
3	011	$1 \oplus y_1 = 0$	1	$0 \vee 1$	1
4	100	$1 \oplus y_1 = 0$	1	$0 \vee 1$	1
5	101	$1 \oplus y_1 = 0$	1	$0 \vee 1$	1
6	110	$1 \oplus y_1 = 0$	1	$0 \vee 1$	1
7	111	$1 \oplus y_1 = 0$	1	$0 \vee 1$	1

Комбинируя варианты, получим четыре решения согласно таблицам истинности (таблица 3).

Таблица 3. Таблица истинности

№ п/п	$G_0G_1G_2$	Решение 1		Решение 2		Решение 3		Решение 4	
		y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2	y_1	y_2
0	000	0	0 V 1	0	0 V 1	0	0 V 1	0	0 V 1
1	001	0	1	0	1	1	0	1	0
2	010	0	0	1	1	0	0	1	1
3	011	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1
4	100	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1
5	101	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1
6	110	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1
7	111	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1	1	0 V 1

Найдем эти решения, вводя для y_2 на 6 наборах индикаторные функции P_i :

$$y_1 = G_0 \vee G_1 G_2, y_2 =$$
$$= K_0P_0 \vee K_1 \vee K_3P_3 \vee K_4P_4 \vee K_5P_5 \vee K_6P_6 \vee K_7P_7, \quad (14)$$

$$y_1 = G_0 \vee G_1 G_2, y_2 =$$
$$= K_0P_0 \vee K_1 \vee K_2 \vee K_3P_3 \vee K_4P_4 \vee K_5P_5 \vee K_6P_6 \vee K_7P_7, \quad (15)$$

$$y_1 = G_0 \vee G_1 G_2, y_2 =$$
$$= K_0P_0 \vee K_3P_3 \vee K_4P_4 \vee K_5P_5 \vee K_6P_6 \vee K_7P_7, \quad (16)$$

$$y_1 = G_0 \vee G_1 \vee G_2, y_2 =$$
$$= K_0P_0 \vee K_2 \vee K_3P_3 \vee K_4P_4 \vee K_5P_5 \vee K_6P_6 \vee K_7P_7. \quad (17)$$

Чтобы найти решение уравнения:

$$x_1' y_1 \vee x_1 y_1' \vee x_2 y_1 y_2' = 0,$$

преобразуем уравнение к виду (10):

$$y_1(x_1' \vee x_1 y_1') \vee x_1 y_1' = 0. \quad (18)$$

Отсюда следует, что $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $C_5 = x_1' \mathrm{V}\, x_2 y_2'$, $C_6 = x_1$. Согласно табл.1 из четырех конституент 1 (K_0, K_1, K_2 , K_3) две отсеиваются, так как для K_2 имеем: y_1=0, а K_3 входит в группу 3. Для K_0 и K_1 имеем

$$y_1 = A_5' A_6' R_0 \vee A_5' A_6 = (x_1' \vee x_1 y_1')'(x_1' R_0 \vee x_1). \quad (19)$$

После несложных преобразований (19) приводится к виду

$$y_1 = x_1(x_2' \vee y_2). \quad (20)$$

Сравнивая (20) и (12), находим: $G_0 = x_1 x_2'$, $G_1 = x_1$, $G_2 = 0$, $K_1 = K_3 = K_5 = K_7 = 0$.

Согласно (14)

$$y_1 = G_0 \vee G_1 G_2 = x_1 x_2', y_2 = x_1' P_0 \vee x_1 x_2' P_6. \quad (21)$$

Для проверки подставим (21) в (18)

$$(x_1' \vee x_2 y_2') x_1 x_2' \vee x_1 (x_1 x_2')' = x_1 x_2 \neq 0.$$

Левая часть уравнения не равна правой. Следовательно, первое решение не является корнем уравнения.

Согласно (15) решение 2 имеет вид

$$y_1 = x_1, y_2 = y_2 = x_1 x_2 \vee x_1' x_2' P_1 \vee x_1' x_2 P_2 \vee x_1 x_2' P_3.$$

Здесь надо перебрать возможные значения индикаторов P_i и получить восемь решений для y_2:

$$y_2 = (x_1 x_2, x_1, x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \vee x_2', x_1' \vee x_2, 1). \quad (22)$$

Проверка показывает, что все решения являются корнями уравнения (18).

Согласно (16) решение 3 для y_1 совпадает с решением (21). Поэтому оно не является корнем уравнения. Решение 4 совпадает с решением 2. Окончательно имеем: $y_1=x_1$, а y_2 берем из (22). Решениям (22) соответствуют вероятности

$$P_2 = P\{y_2 = 1\} = \\ = (p_1p_2, p_1, p_2, 1-q_1q_2, p_1q_2+q_1p_2, 1-q_1p_2, 1-p_1q_2, 1).$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда одно уравнение имеет n неизвестных:

$$F_1(X, y_1, ... y_n) = 0. \quad (23)$$

Разрезание в (23) по y_n дает

$$y_nF_1(X, y_1, ... y_{n-1}, 1)K_0P_0 \vee K_1y_n^{'}F_1(X, y_1, ... y_{n-1}, 0) = 0. \quad (24)$$

Сравнивая (24) с (8), видим, что (24) относится к первому типу неразрешимых уравнений. Чтобы оно было разрешимо, необходимо выполнить условие (9):

$$F_1(X, y_1, ... y_{n-1}, 1)F_1(X, y_1, ... y_{n-1}, 0) = \\ = F_2(X, y_1, ... y_{n-1}) = 0. \quad (25)$$

Сравнивая (25) и (10), имеем: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $C_5 = F_1(1)$, $C_6=F_1(0)$. Согласно таблице 1 запишем

$$y_n = K_0P_0 \vee K_1 = C_5^{'}(R_0 \vee C_6) = \\ = F_1^{'}(X, y_1, ... y_{n-1}, 1)(R_0 \vee F_1(X, y_1, ... y_{n-1}, 0)). \quad (26)$$

Из (25) получаем

$$y_{n-1}F_2(X, y_1, ... y_{n-2}, 1) \vee y_{n-1}^{'}F_2(X, y_1, ... y_{n-2}, 0) = 0.$$

Далее вновь составляется условие разрешимости. Повторяя операции n–3 раза, найдем

$$y_3F_{n-2}(X, y_1, y_2, 1) \vee y_3^{'}F_{n-2}(X, y_1, y_2, 1) = 0.$$

Отсюда аналогично (26) имеем

$$y_3 = F_{n-2}^{'}(X, y_1, y_2, 1)(R_{n-2} \vee F_{n-2}(X, y_1, y_2, 0)). \quad (27)$$

Далее

$$F_{n-1}(X, y_1, y_2) = \\ = F_{n-2}(X, y_1, y_2, 1)F_{n-2}(X, y_1, y_2, 0) = 0. \quad (28)$$

Решение (28) найдено ранее и представлено формулами (14)–(17). Зная y_1 и y_2 , находим по формуле (27) y_3, а затем снизу вверх остальные неизвестные до y_n включительно. При выполнении этой процедуры нужно учесть возможность приобретения ложных корней. Поэтому на каждом шаге движения снизу вверх надо проводить проверку путем подстановки решения в соответствующее уравнение.

4. Система логических уравнений

Система логических уравнений имеет вид

$$y_k = f_k(X, y_1, y_2, ..., y_m), k = 1, ..., m. \quad (29)$$

Преобразуем (29) к канонической форме

$$y_k \oplus f_k = y_kf_k^{'} \vee y_k^{'}f_k = \\ = F_k(X, y_1, y_2, ..., y_m), k = 1, ..., m. \quad (30)$$

Алгоритм решения СЛУ (30) состоит из $2m$-1 шагов.

Шаг 1. Первое уравнение (k = 1) системы (30) решают относительно y_1 и находят функцию от X и y^1 = (y_2, y_3, …, y_m):

$$y_1 = W_1(X, y^1), F_k(X, W_1(X, y^1), y_2, ..., y_m) = \\ = F_k^{(1)}(X, y^1) = 0, k = 2, ..., m. \quad (31)$$

Шаг 2. Из первого уравнения (31) находят решение для y_2 и подставляют его в остальные уравнения

$$y_2 = W_2(X, y^2), F_k^{(2)}(X, y^2) = \\ = 0, k = 3, ..., m, y^2 = (y_3, y_4, ..., y_m). \quad (32)$$

Шаг m–1. Последовательное удаление из системы уравнений неизвестных y_1, y_2, …,y_{m-1} приводит к системе

$$y_k = W_k(X, y^k), k = 1, ..., m-1, F_m^{(m-1)}(X, y_m) = 0. \quad (33)$$

Шаг m. Последнее уравнение (33) решают по формулам раздела 1 и находят

$$y_m = W_m(X). \quad (34)$$

Шаг m+1. Решение (34) подставляют в предпоследнее уравнение (33) и находят

$$y_{m-1} = W_{m-1}(X, W_m(X)).$$

Шаг $2m$-1. Находят $y_1 = W_1(X, W_2, W_3, ..., W_m)$.

После получения решений надо провести их проверку.

Для иллюстрации алгоритма найдем решение системы трех логических уравнений

$$y_1 = a_{11}y_1 \vee a_{12}y_2 \vee \sigma_1y_0, y_2 = \\ = a_{21}y_1 \vee a_{22}y_2 \vee \sigma_2y_0, y_3 = a_{31}y_1 \vee a_{32}y_2. \quad (35)$$

Частное решение (35) находят методом определителей [5]

$$y_1 = (a_{12}\sigma_2 \vee \sigma_1)y_0, y_2 = (a_{21}\sigma_1 \vee \sigma_2)y_0, y_3 = \\ = (\sigma_1(a_{31} \vee a_{32}a_{21}) \vee \sigma_2(a_{32} \vee a_{31}a_{12}))y_0.$$

Если y_0 = 0, то система (35) является однородной и частное решение будет нулевым. Для получения общего решения на шаге 1 в первом уравнении (35) находим: $C_1 = C_3 = C_6 = 0$, $C_2 = 1$, $C_4 = \sigma_1y_0 \vee a_{12}y_2$, $C_5 = a_{11}$. По таблице 1 устанавливаем, что надо рассмотреть четыре конституенты 1 с номерами 16, 18, 20 и 22. Из них отсеиваем K_{16}. Остальные приводят к решению

$$y_1 = C_4 \vee C_5R_1 = \sigma_1y_0 \vee a_{12}y_2 \vee a_{11}R_1. \quad (36)$$

На шаге 2 подставим (36) во второе и третье уравнения (35)

$$y_2 = (a_{21}\sigma_1 \vee \sigma_2)y_0 \vee a_{21}a_{11}R_1 \vee (a_{22} \vee a_{21}a_{12})y_2, \quad (37) \\ y_3 = a_{31}\sigma_1y_0 \vee a_{31}a_{11}R_1 \vee (a_{32} \vee a_{31}a_{12})y_2.$$

Первое уравнение (37) имеет решение

$$y_2 = C_4 \vee C_5R_2 = \\ = (a_{21}\sigma_1 \vee \sigma_2)y_0 \vee a_{21}a_{11}R_1 \vee (a_{22} \vee a_{21}a_{12})R_2. \quad (38)$$

На шаге 3 после подстановки (38) во второе уравнение (37) имеем

$$y_3 = (\sigma_1(a_{31} \vee a_{32}a_{21}) \vee \sigma_2(a_{32} \vee a_{31}a_{12}))y_0 \vee \\ \vee a_{21}a_{11}(a_{32} \vee a_{31}a_{12})R_1 \vee (a_{32} \vee a_{31}a_{12})(a_{22} \vee a_{21}a_{12})R_2. \quad (39)$$

Шаг 4 пропускается, так как y_2 в системе (37) не зависит от y_3 . На шаге 5 подставим (39) в (36) и получим

$$y_1 = (a_{12}\sigma_2 \vee \sigma_1)y_0 \vee a_{11}R_1 \vee (a_{22} \vee a_{21})a_{12}R_2. \quad (40)$$

Совокупность (38)–(40) дает общее решение (35), зависящее от индикаторов R_1, R_2. При $R_1 = R_2 = 1$ имеем

$$y_k = A_{1k} y_0 \vee A_{2k}, k = 1,2,3, \quad (41)$$

$$A_{11} = a_{12}\sigma_2 \vee \sigma_1, A_{12} = a_{21}\sigma_1 \vee \sigma_2, A_{13} =$$
$$= \sigma_1(a_{31} \vee a_{32}a_{21}) \vee \sigma_2(a_{32} \vee a_{31}a_{12}),$$
$$A_{21} = a_{11} \vee (a_{22} \vee a_{21})a_{12}, A_{22} = a_{21}a_{11} \vee a_{22} \vee a_{21}a_{12},$$
$$A_{23} = (a_{32} \vee a_{31}a_{12})(a_{22} \vee a_{21}(a_{12} \vee a_{11})).$$

При $y_0 = 0$ имеем общее решение однородной системы. Кроме общего решения (41) существуют еще два общих решения, соответствующих наборам (R_1, R_2) = (0,1) и (1,0).

Полагая $p_i = 1–q_i = P\{\sigma_i = 1\}$, $p_{ij} = 1–q_{ij} = P\{a_{ij} = 1\}$, по формулам (41) с помощью методов перехода к полному замещению [5] найдем вероятности

$$P_1 = P\{y_1 = 1\} = 1 - q_1 q_{11}(q_{12} + p_{12}q_2 q_{21} q_{22}), \quad (42)$$
$$P_2 = P\{y_2 = 1\} = 1 - q_2 q_{22}(q_{21} + p_{21}q_1 q_{11} q_{12}), \quad (43)$$

$$P_3 = P\{y_3 = 1\} = p_1(p_{31} + q_{31}p_{32}p_{21}) +$$
$$+q_1(p_{12}(1 - q_{31}q_{32})(1 - q_2 q_{22} q_{21}) +$$
$$+q_{12}p_{32}(1 - q_2 q_{22}(1 - p_{21}p_{11}))) + p_1 p_{32} q_{31} q_{21}(1 - q_2 q_{22}). \quad (44)$$

Для однородной системы при $R_1 = R_2 = 1$ вероятности находят из (42)– (44), полагая $q_1 = q_2 = 1$, $p_1 = 0$. Для частного решения ($R_1 = R_2 = 0$) вероятность P_1 находят из (42) при $q_{11} = q_{21} = q_{22} = 1$, вероятность P_2 находят из (43) при $q_{11} = q_{12} = q_{22} = 1$, а вероятность P_3 по формуле

$$P_3 = P\{y_3 = 1\} = p_{31}(1 - q_1(q_2 + p_2 q_{32} q_{12})) +$$
$$+q_{31}p_{32}(p_2 + q_2 p_1 p_{21}).$$

Для общего решения при $R_1 = 0$, R_2=1 вероятности P_1, P_2, P_3 находят соответственно из (42)–(44), полагая q_{11} = 1. Для общего решения при R_1= 1, R_2=0 вероятность P_1 находят по формуле (42) при $q_{21} = q_{22} = 1$, вероятность P_2 находят по формуле (43) при $q_{12} = q_{22} = 1$, а вероятность P_3 по формуле

$$P_3 = P\{y_3 = 1\} = p_1(p_{31} + q_{31}p_{32}p_{21}) +$$
$$+q_1(p_{32} + q_{32}p_{12}p_{21})(p_2 + q_2 p_{21}p_{11}) + q_{21}q_{31}p_1 p_{32} p_2.$$

Формализация записи особых условий функционирования (ОУФ) и возможность их учета при выборе общего решения иллюстрируется следующим примером.

Пример. Система, предназначенная для преобразования тепловой энергии в механическую, состоит из двух подсистем, связанных перемычкой (см. рисунок). В подсистему входят турбогенераторы (элементы 1 и 8), паропроизводящие установки (2 и 9), турбины (4 и 11), регулирующая аппаратура (3 и 10), главные конденсаторы (5 и 12), конденсатные насосы (6 и 13), потребители (7 и 14). Для нормального функционирования подсистемы необходим работоспособный контур обратной связи (элементы 5 и 6 или 12 и 13) и доступность потребителя хотя бы к одному источнику питания (1, 8). Отсюда следует, что общая форма ЛФРС должна иметь вид

$$F = x_p(x_{\text{тг}1} f_1 \vee x_{\text{тг}2} f_2). \quad (45)$$

Здесь f_1 и f_2 – логические функции работоспособности участка системы от выхода соответствующего турбогенератора до потребителя.

Если F имеет вид $F = x_{\text{р}}(x_{\text{тг}1}f_1 \vee x_{\text{тг}2}f_2 \vee f_3)$, то при всех работоспособных элементах (x_i=1) надо подобрать значения индикаторов так, чтобы выполнялись условия:

$$f_1(R_1, R_2, ..., R_k) = f_2(R_1, R_2, ..., R_k) =$$
$$= 1, f_3(R_1, R_2, ..., R_k) = 0.$$

Если это будет не так, то третье слагаемое поглощает первые два и функция работоспособности может оказаться равной единице, даже при отсутствии турбогенераторов, что противоречит физической сущности системы.

Система логических уравнений для рассматриваемой технической системы имеет вид

$$y_2 = x_2 y_6(x_1 \vee y_9), y_3 = x_3 y_2, y_4 = x_4 y_2 y_3, y_5 =$$
$$= x_5 y_4, y_6 = x_6 y_5, y_7 = x_7 y_4, \quad (46)$$
$$y_9 = x_9 x_{13}(x_8 \vee y_2), y_{10} = x_{10} y_9, y_{11} = x_{11} y_9 y_{10}, y_{12} =$$
$$= x_{12} y_{11}, y_{13} = x_{13} y_{12}, y_{14} = x_{14} y_{11}.$$

Надо найти выражения для y_7 и y_{14} с учетом (45). Система уравнений является однородной и поэтому у нее должно быть нулевое частное решение. На первом шаге из первых пяти уравнений (46) находим

$$y_6 = x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 (x_1 \vee y_9) y_6 = B(x_1 \vee y_9) y_6. \quad (47)$$

Решение (47) согласно методике раздела 1 имеет вид

$$y_6 = B(x_1 \vee y_9) R_1. \quad (48)$$

На шаге 2 из (48) и первого и второго уравнений (46) находим

$$y_9 = x_9 x_{13}(x_8 \vee BR_1(x_1 \vee R_2)). \quad (49)$$

На шаге 3 из уравнений для y_{10} –y_{13} системы (46) имеем : $y_{13} = x_{13} x_{12} x_{11} x_{10} y_9$.

Подставим сюда (49) и решим однородное уравнение относительно y_{13}:

$$y_{13} = AR_3(x_8 \vee BR_1(x_1 \vee R_2)), A = x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13}. \quad (50)$$

Из (49) и (50) следует, что $y_9 = y_{13}$.

На шаге 4 из уравнений для y_{10}, y_{11} и y_{14} системы (46) с учетом (50) находим:

$$y_{14} = x_{14} AR_3(x_8 \vee BR_1(x_1 \vee R_2)). \quad (51)$$

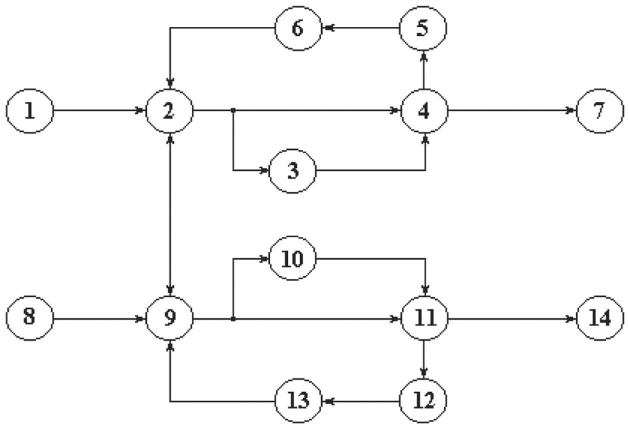

Рис. Структура технической системы
(1, 8 – турбогенераторы; 2, 9 – паропроизводящие установки; 3, 10 – регулирующая аппаратура; 4, 11 – турбины; 5, 12 – главные конденсаторы; 6, 13 – конденсаторные насосы; 7, 14 – редукторы).

Аналогично находим:

$$y_7 = x_7 B R_1 (x_1 \vee A R_3 (x_8 \vee R_2)). \qquad (52)$$

Из (50) и (51) следует, что частное решение (46) нулевое. Сравнивая (50) и (51) и (45), видим, что особые условия выполняются только при $R_1 = R_3 = 1$, $R_2 = 0$. Поэтому окончательно имеем

$$y_7 = x_7 B(x_1 \vee A x_8),\, y_{14} = x_{14} A(x_8 \vee B x_1).$$

Вероятности находят по формулам

$$P_7 = P\{y_7 = 1\} = p_7 P_B (p_1 + q_1 p_8 P_A), P_{14} =$$
$$= P\{y_{14} = 1\} = p_{14} P_A (p_8 + q_8 p_1 P_B),$$
$$P_A = p_9 p_{10} p_{11} p_{12} p_{13}, P_B = p_2 p_3 p_4 p_5 p_6.$$

5. Заключение

Логико-вероятностный анализ сложной структуры технической системы является обязательным атрибутом процесса проектирования систем во многих отраслях техники. Ввиду большой трудоемкости не удается успешно использовать простой перебор всех возможных путей кратчайшего функционирования. Составление систем логических уравнений и последующее их решение существенно облегчает процесс анализа. Предложенный здесь табличный метод общего решения логических уравнений расширяет возможности разработчиков систем и позволяют дать оценки характеристик, адекватные логической структуре. Определение всех общих решений и последующий выбор одного из них позволяют с помощью вектора индикаторов учесть особые условия функционирования, в том числе возможность использования перекрестных связей между параллельными каналами и наличие контуров обратной связи, поддерживающих или улучшающих функционирование систем. При многих общих решениях в технических приложениях решается задача формального выбора единственного приемлемого решения путем записи особых логических условий функционирования технической системы.

На стадии логического анализа удается не только установить существование хотя бы одного общего решения или факт неразрешимости системы уравнений, но и найти причины и место логической некорректности записи. Это весьма актуально для алгоритмически управляемых ресурсов, так как дают возможность своевременно устранить обнаруженную некорректность. Управление логикой функционирования технической системы создает дополнительные способы повышения надежности и эффективности их работы. Наиболее предпочтительными областями применения результатов являются системы энергетики, автоматического управления, диагностирования.

Литература

1. **Рябинин И.А.** Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. Л.: Судостроение, 1971.

2. **Лунц А.Г.** Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем // АН СССР. Сер. матем., 1952. Том 16, № 5.

3. **Гогин Ю.А.** Логико-вероятностное моделирование больших и сложных систем /ЛВИКА им. А.Ф. Можайского. Л., 1972.

4. **Черкесов Г.Н., Можаев А.С.** Логико-вероятностные методы расчета надежности структурно-сложных систем. М.: Знание, 1991.

5. **Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.** Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь, 1981.

6. **Поспелов Д.А.** Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1964.

7. **Левченков В.С.** Общий вид решений булевых уравнений. – Автоматика и телемеханика, 2, 2000. – С. 139-150.