Надежность, том 26, №2, 2026 / Dependability 2, 2026
Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

УДК 519.217 + 519.246 + 519.872
Оригинальная статья
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2026-26-2-34-44

Распределения, обладающие свойством почти отсутствия памяти (ALM) и их приложения

The Almost Lack of Memory (ALM) distributions and their applications

Димитров Б.[1]
Dimitrov B. [1]

[1] Инженерно-управленческий институт GMI (ныне Университет Кеттеринга), Флинт, Мичиган, США
[1] GMI Engineering and Management Inst. (now Kettering), Flint, Michigan, USA
dimitrob@gmail.com

Димитров Б.

Резюме. *Данная статья обобщает фундаментальные исследования, посвященные классу вероятностных распределений, известных как* ***распределения с почти отсутствием памяти (ALM)****. В то время как классическое экспоненциальное распределение однозначно характеризуется свойством отсутствия памяти в любом возрасте, распределения ALM проявляют это свойство выборочно, в возрастах, образующих дискретную последовательность {0, c, 2c, ...} для положительной константы c. Это обобщение предоставляет мощный и универсальный аппарат для моделирования времени жизни, времени до отказа и времени ожидания в* ***периодических, нестационарных условиях****. Мы представляем всестороннюю характеристику распределений ALM через несколько эквивалентных свойств: специфическую аналитическую форму функции распределения, периодическую интенсивность отказов и вероятностное представление, в котором случайная величина разлагается в сумму усеченной на [0, c) компоненты и геометрически распределенной компоненты, масштабированной на c. Это разложение имеет ключевое значение как для теоретического анализа, так и для практических приложений. Строго устанавливается внутренняя связь между распределениями ALM и* ***периодическими неоднородными пуассоновскими процессами****. Кроме того, в статье рассматриваются важные статистические аспекты, включая оценку параметров методами максимального правдоподобия и моментов, а также проверку гипотез для различения моделей. Применимость теории ALM демонстрируется в различных областях, включая надежность технических систем, работающих в условиях циклических нагрузок, страхование для моделирования убытков с сезонной структурой и науки об окружающей среде для изучения явлений, управляемых периодическими силами. Заполняя пробел между теоретической вероятностью и необходимостью моделирования реальной периодичности, распределения ALM предлагают надежный и математически элегантный инструмент для анализа в нестационарных условиях.*

Abstract. *This article generalizes fundamental research devoted to a class of probability distributions known as Almost Lack of Memory (ALM) distributions. While the classical exponential distribution is uniquely characterized by the lack of memory property at any age, ALM distributions exhibit this property selectively, at ages forming a discrete sequence {0, c, 2c, …} for a positive constant c. This generalization provides a powerful and versatile tool for modeling lifetimes, times to failure, and waiting times under periodic, non-stationary conditions. We present a comprehensive characterization of ALM distributions through several equivalent properties: a specific analytical form of the distribution function, a periodic failure rate, and a probabilistic representation in which a random variable decomposes into the sum of a component truncated on [0, c) and a geometrically distributed component scaled by c. This decomposition is of key importance for both theoretical analysis and practical applications. The intrinsic connection between ALM distributions and periodic non-homogeneous Poisson processes is rigorously established. Furthermore, the article discusses important statistical aspects, including parameter estimation by maximum likelihood and method of moments, as well as hypothesis testing for model discrimination. The applicability of ALM theory is demonstrated in various fields, including the reliability of technical systems operating under cyclic loads, insurance for modeling losses with a seasonal structure, and environmental sciences for studying phenomena driven by periodic forces. Bridging the gap between theoretical probability and the need for modeling real-world periodicity, ALM distributions offer a robust and mathematically elegant tool for analysis under non-stationary conditions.*

Ключевые слова: *характеризация вероятностных распределений, функциональные уравнения, страхование, математическое моделирование, нестационарные случайные процессы, периодичность, надежность*
Keywords: *characterization of probability distributions, functional equations, insurance, mathematical modeling, non-stationary random processes, periodicity, reliability*

Для цитирования: *Димитров Б. Распределения, обладающие свойством почти отсутствия памяти (ALM) и их приложения // Надежность. 2026. №2. С. 34-44. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2026-26-2-34-44*
For citation: *Dimitrov B. The almost lack of memory (ALM) distributions and their applications. Dependability 2026;2: 34-44. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2026-26-2-34-44*

Поступила: *02.12.2025* / **После доработки:** *10.01.2026* / **К печати:** *25.05.2026*
Received on: *02.12.2025* / **Revised on:** *10.01.2026* / **For printing:** *25.05.2026*

Введение

Давно замечательный французский математик **Огюстен-Луи Коши (1789 – 1857)** доказал в 1821 году, что если функциональное уравнение $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ выполняется для любых неотрицательных аргументов x и y, то функция $f(x)$ является экспоненциальной $f(x)=e^{cx}$, где c – вещественная константа. В приложениях надежности вероятностное свойство некоторых случайных времен жизни X технических единиц выглядит как $P\{X\geq x+y\}=P\{X\geq x\}\cdot P\{X\geq y\}$. Из теоремы Коши и вероятностных интерпретаций следует, что функция распределения времени жизни имеет *вид* $P\{X\geq x\}=e^{-ax}$. И следует, что если этот элемент все еще работает (жив в возрасте y), то шансы остаться работоспособным дополнительное время x такие же, как когда он только начал функционировать:

$$P\{X \geq x + y \mid X \geq y\} = P\left\{X \geq x\right\}.$$

Обычное объяснение этого свойства известно как свойство Отсутствия Памяти (LM) в любом возрасте y. Это означает, что в любом возрасте y элементы с экспоненциально распределенным временем жизни теряют память о своем текущем возрасте и ведут себя как новые. Это характеристическое свойство, которое помогает на практике распознать экспоненциально распределенное время жизни технических изделий. Обычно это верно для изделий, созданных из большого числа высоконадежных компонентов.

В серии работ с многочисленными коллегами (см., пожалуйста, список литературы) мы сосредоточили внимание на аналогичных свойствах, которые могут быть использованы на практике для распознавания распределения времени жизни технических изделий. И мы обнаружили, что если время жизни проявляет отсутствие памяти в данном возрасте c, то оно будет терять память в любом возрасте mc, кратном константе c. Применяя это бесконечно много раз m=2,3,4,…, мы назвали эти распределения ALM-распределениями. И мы нашли математическую форму этого класса вероятностных распределений, установили многочисленные математические представления, физические свойства и нашли различные практические приложения.

Здесь мы представляем некоторые результаты различных аналитических, физических и математических описаний ALM-распределений и областях их применения.

1. Нестационарность и периодичность. Математическое представление

Публикации [1], [2] и [8] иллюстрируют наши исследования, где мы анализировали характеристики процессов, которые не меняют свое поведение (вероятностное распределение), когда время жизни основного рабочего инструмента конечно из-за отказов. И мы использовали это свойство, мы получили некоторые функциональные уравнения, позже доказанные как характеризующие экспоненциальное или геометрическое распределение. В [3] наша попытка охарактеризовать геометрическое распределение, когда это время жизни является фиксированной константой, привела к тому, что д-р Чукова предоставила нам контрпример, где инвариантное свойство выполняется, а время жизни не является геометрическим. Это был первый пример ALM-распределения. Затем мы начали анализировать непрерывные распределения с другими заинтересованными коллегами и нашли результаты, которые я кратко представляю в этой своей работе.

1.1. Периодичность. Математическое описание

Периодичность обычно наблюдается в условиях окружающей среды, сопровождающих реальные жизненные явления. Это и мотивирует наши исследования. Примеров много: периодическое чередование холодных и теплых эпох на Земле; периодическое чередование солнечной активности; периодические приливы (Эль-Ниньо и Ла-Нинья); периодические выборы в государствах и крупных организациях; периодическое предписанное техническое обслуживание в системе (технической или социальной), сезонная периодичность и т.д. Мы называем времена окончания каждого чередования точками регенерации и даем в [9], [12], [13] следующее математическое описание этих процессов.

Временным процессом мы называем любую количественно измеряемую переменную, которая может быть измерена в любой момент времени. Мы называем *точечным процессом* упорядоченную последовательность моментов $\{T_n : T_n < T_{n+1}; n = 1,2,\ldots\}$ наступления событий. Процесс

$$N\left(t\right) = \max n : T_n < t, \tag{1}$$

подсчитывающий число событий, произошедших в интервале $[0;t)$, называется *счетчиком* точечного процесса. Среднее число $\Lambda\left(t\right) = \mathbf{E}N\left(t\right)$ событий в интервале $[0;t)$

называется *функцией интенсивности* точечного процесса. Ее производная $\lambda(t) = \Lambda'(t)$ (предполагается, что она существует) называется *плотностью интенсивности* или просто *интенсивностью* процесса. Эту функцию мы интерпретируем как сенсор (нерв) процесса, реагирующий на окружающие условия в момент времени t.

Если *интервалы между моментами наступления событий*

$$X_n = T_n - T_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad T_0 = 0$$

образуют последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин, процесс называется *рекуррентным* или *процессом восстановления*. Такой процесс и его счетная переменная $N(t)$ однозначно порождаются соответствующей последовательностью $\{X_n\}$ одинаково распределенных независимых случайных величин соотношением

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_0 = 0.$$

Большинство результатов в теории массового обслуживания и стохастических сетей были получены в рамках этого предположения и относятся к стационарному режиму работы систем, т.е. характеризуют производительность системы «на бесконечности», т.е. при $t \to \infty$, *удовлетворяют* соотношению

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Lambda(t)}{\mathbf{E}[X_n]t} = 1.$$

Мы предполагаем $\Lambda(t) = \mathbf{E}N(t)$ конечной для любого времени $t>0$. И поскольку условия окружающей среды периодически чередуются, реагирующая функция интенсивности $\lambda(t)$ является периодической. Существует константа $c>0$, равная средней длине $\mathbf{E}(X_n)$ интервалов чередования условий, тогда должно выполняться

$$\lambda(t+c) = \lambda(t) \quad \text{для всех} \quad t \geq 0.$$

Мы используем связь между функциями интенсивности отказов и распределением вероятностей случайной величины, представляющей время жизни индивидов, помещенных в некоторые периодические условия окружающей среды. Так мы пришли к концепции ALM-распределений. Мы изучали их физические интерпретации и обсуждали их аналитические и вероятностные свойства. Каждая целочисленная зависящая от времени случайная величина N_t интерпретируется как нестационарный процесс Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t)$. Далее результаты суммируют то, что следует из теории вероятностей и интерпретации математических соотношений и их смысла. Эти соотношения используются в характеризации периодического пуассоновского процесса с переменной во времени интенсивностью в терминах его порождающей случайной величины X, которая, между прочим, обладает свойством частичного отсутствия памяти. В [41] установлены статистические оценки параметров и способы проверки гипотез для ALM-распределений на основе наблюдений за соответствующим процессом. Мы опишем это позже в этой статье.

1.2. Связанные математические выражения и вероятностный смысл

Класс ALM-распределений характеризуется следующим свойством.

Неотрицательная ненулевая случайная величина X называется лишенной памяти в точке $c>0$, если

$$\mathbf{P}\{X \geq c + x \mid X \geq c\} = \mathbf{P}\{X \geq x\} \text{ для всех } x \geq 0. \quad (2)$$

Интерпретация этого уравнения для условной вероятности такова: если индивид имеет случайное время жизни X и жив в возрасте c, то шансы, что он проживет дополнительное время длины x, такие же, как исходные шансы прожить ту же длительность x жизни. Из-за этого это называется *Свойством Отсутствия Памяти в возрасте c*. И мы математически доказали, что если случайная величина X обладает свойством отсутствия памяти в возрасте $c>0$, то она обладает отсутствием памяти во всех точках времени из последовательности $\{c_m = mc\}_{m=0}^{\infty}$. Поскольку этих времен бесконечно много, мы назвали такие распределения ALM-распределениями. И мы нашли, что следующие утверждения эквивалентны:

Функция распределения ALM-с.в. X имеет вид

$$F_X(x) = 1 - a^{\lfloor x/c \rfloor}\left(1 - (1-a)F_Y\left(x - \lfloor x/c \rfloor c\right)\right), \quad (3)$$

где $a=P\{X \geq c\}$, а $F_Y(\cdot)$ – функция распределения случайной величины Y, сосредоточенной на интервале $[0,c)$.

(ii) Плотность распределения $f_X(x)$, $x \geq 0$, непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = (1-a)a^{\lfloor x/c \rfloor} f_Y\left(x - \lfloor x/c \rfloor c\right), \quad (4)$$

где $a=P\{X \geq c\}$, а $f_Y(\cdot)$ – плотность распределения непрерывной случайной величины Y с носителем $[0,c)$. Распределение $f_X(x)$ дискретной случайной величины X определяется той же формулой, где $f_Y(\cdot)$ – распределение дискретной случайной величины с носителем $\{0,1,\ldots,c-1\}$.

(iii) Интенсивность возникновения событий

$$\lambda_X(x) = \frac{(1-a) f_Y\left(x - \lfloor x/c \rfloor c\right)}{1 - (1-a)F_Y\left(x - \lfloor x/c \rfloor c\right)}$$

для случайной величины X является периодической функцией с периодом c.

(iv) Случайная величина X может быть выражена как

$$X = Y_c + cZ, \quad (5)$$

где Y_c и Z – независимые случайные величины. С.в. Y_c имеет носитель внутри интервала $[0,c)$, а с.в. Z имеет геометрическое распределение с параметром a, $P(Z=k)=(1-a)a^k$, $k=0,1,\ldots$.

Заметим, что свойство (iv) содержит эквивалентное представление для класса ALM-распределений, которое полезно при моделировании этих распределений.

Наконец, связь между периодическим пуассоновским процессом с переменной во времени интенсивностью и классом ALM-распределений может быть объяснена следующим образом: Случайная величина X, порождающая поток Пуассона с переменной интенсивностью, имеет распределение с отсутствием памяти. Обратно, любая случайная величина, имеющая ALM-распределение, порождает периодический пуассоновский поток с переменной интенсивностью процедурой записи.

Процесс, порождающий случайную величину X, имеет распределение, которое для $mc \le t < (m+1)c$ может быть выражено как

$$F_X(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda(u)\,du\right\} =$$
$$= 1 - \left[\exp\left\{-\int_0^c \lambda(u)\,du\right\}\right]^m \exp\left\{-\int_0^{t-mc} \lambda(u)\,du\right\} =$$
$$= 1 - a^m\left(1 - F(t - mc)\right),$$

что при $a = \exp\left\{-\int_0^c \lambda(u)\,du\right\}$ совпадает с (3).

С другой стороны, интенсивность возникновения события случайной величины X с ALM-распределением является периодической функцией, и, как следствие соотношения (3), соответствующий пуассоновский поток с переменной интенсивностью является периодическим. Эти свойства оказались очень удобными в приложениях, как показано в [12], [13], [16], [20], [26] и других.

1.3. Статистика

Теперь мы опишем некоторые статистические свойства ALM-распределений.

1.3.1. Оценка параметров

Параметры ALM-распределения могут быть оценены либо методом максимального правдоподобия, либо методом моментов; оба дают одинаковые результаты [9]–[12]. Нам не удалось оценить параметр c. В приложениях он обычно определяется из «физических» соображений. Поэтому, предполагая, что он известен, мы покажем, что простая оценка для параметра a может быть получена методом моментов. Как известно, выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

выборки $X_1,\ldots,X_n$ является наилучшей оценкой математического ожидания случайной величины. Из представления (5) получаем

$$\mu_X = EX = EY + cEZ = \mu_Y + c\frac{a}{1-a}.$$

В этом соотношении, заменяя теоретические средние их выборочными аналогами, которые являются их оценками, получаем

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{c} = \frac{\hat{a}}{1-\hat{a}} \quad \text{или} \quad \hat{a} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{c\left(1 + \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{c}\right)} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{c + \overline{X} - \overline{Y}},$$

где

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \ \text{ с } \ Y_i = X_i - \left\lfloor \frac{X_i}{c} \right\rfloor c \ \text{ для } \ mc \le X_i < (m+1)c.$$

Аналогичная оценка получена в [9] методом максимального правдоподобия. Пусть $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ – порядковые статистики случайной выборки $X_1,\ldots,X_n$ из генеральной совокупности с плотностью распределения (3). Функция правдоподобия имеет вид

$$l(x_1,\ldots,x_n) = (1-a)^n a^{n\bar{k}} \prod_{m=0}^{r}\prod_{j=1}^{k_{m+1}} f_Y\left(x_{(Z_m+j)} - mc\right). \quad (6)$$

Здесь k_m – число членов в выборке в интервале $[mc,(m+1)c)$, $Z_0=0$, $Z_m = \sum_{j<m} Z_j$, $\overline{z} = n^{-1}\sum_m mz_m$, и $r = \left\lfloor X_{(n)}/c \right\rfloor$. В [41] оценки других параметров ALM-распределений найдены методом максимального правдоподобия с использованием приведенной выше функции правдоподобия.

1.3.2. Проверка гипотез о ALM-распределениях. Моделирование

Интуитивно ясно, что ALM-распределения должны стремиться к экспоненциальному распределению, когда параметр $c \to 0$. Теперь мы дадим строгое доказательство этого утверждения.

Если $c \to 0$ и $a \to 1$ так, что $1-a \approx \lambda c$, где λ – положительная константа, то предел ALM-распределения является экспоненциальным распределением с параметром λ.

Преобразование Лапласа-Стилтьеса ALM-распределения имеет вид

$$\varphi_X(s) = \varphi_Y(s)\frac{1-a}{1-a\exp\{-cs\}}.$$

Здесь носитель случайной величины Y – интервал $[0,c]$, находим, что $\varphi_Y(s) \to 1$ при $c \to 0$. Второй множитель в выражении для $\varphi_X(s)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1-a}{1-a\exp\{-cs\}} = \frac{1-a}{1-a\left(1-cs+(cs)^2/2-\cdots\right)} =$$
$$= \frac{1}{1+\frac{cs}{1-a}+o(c)} \to \frac{1}{1+\frac{s}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Следовательно, переходя к пределу при $c \to 0$ в последнем выражении, поскольку $\frac{1-a}{c} \to \lambda$, мы приходим к утверждению теоремы. Это утверждение также подразумевается теоремой о непрерывной зависимости преобразований Лапласа-Стилтьеса и их оригиналов.

Согласно этим фактам, целесообразно использовать экспоненциальные распределения как конкурирующую гипотезу при изучении класса ALM-распределений с последовательностью $c_m = mc$. С другой стороны, параметр c часто известен из природы исследуемого явления. Поэтому есть основания для сравнения различных ALM-распределений для одного и того же значения параметра c и разных плотностей распределения на цикле. Предварительные результаты такого исследования сообщены в [41]. Ниже мы излагаем их обобщения и приводим примеры.

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – выборка из генеральной совокупности с неизвестной плотностью распределения $f(x)$. Рассмотрим задачу проверки нулевой гипотезы $H_0: f(x) = f_0(x)$ против альтернативной гипотезы $H_1: f(x) = f_1(x)$.

Согласно теореме Неймана-Пирсона, наиболее мощным критерием для проверки простой гипотезы H_0

против альтернативы H_1 является критерий отношения правдоподобий. Поскольку наблюдения независимы, критическая область для этого критерия может быть выражена как

$$W=\left\{\left(x_1,\ldots,x_n\right):\frac{f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)}{f_0\left(x_1,\ldots,x_n\right)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{f_1\left(x_i\right)}{f_0\left(x_i\right)}>t\right\},t>0. \quad (7)$$

Уровень значимости α и мощность π этого критерия равны

$$\alpha=P_{H_0}\{W\}=P_{H_0}\left\{\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in W\right\},$$

$$\pi=P_{H_1}\{W\}=P_{H_1}\left\{\left(X_1,\ldots,X_n\right)\in W\right\}.$$

При вычислениях удобнее использовать натуральный логарифм произведения в (7). Для этой цели введем натуральный логарифм отношения правдоподобий, который для краткости называется статистикой критерия

$$W=\ln\prod_{i=1}^{n}\frac{f_1\left(x_i\right)}{f_0\left(x_i\right)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln f_1\left(x_i\right)-\ln f_0\left(x_i\right)\right).$$

Применяя метод Монте-Карло, мы вычисляем критическое значение t_α для уровня значимости α и мощность π критерия. Подходящий алгоритм описан в [41]. Здесь мы опускаем детали.

1.4. Различные способы получения расширенных математических результатов

Многие вероятностные распределения (например, экспоненциальное, логистическое, равномерное, Парето, Маршала-Олкина и некоторые другие) характеризуются тем, что связанные математические выражения могут обладать свойством почти отсутствия памяти, если такое уравнение фиксирует другой класс вероятностных распределений, зависящий от параметра c. Это значение $y=c$, и предполагая его верным для всех x в его области R_1, вы можете конструктивно получить ALM-распределения. Статьи [6, 7, 22, 25, 34, 36, 40] используют такой подход и получают интересные результаты. Мы рекомендуем молодым математикам его использовать. Там много возможностей проверить себя. В [6], [40] и [51] мы использовали такой подход в бивариатном функциональном уравнении, аналогичном (2), которое характеризует двумерное экспоненциальное распределение Маршала-Олкина, получили двумерное расширение класса ALM-распределений и изучили некоторые их свойства. В [7] и [22] мы использовали мультипликативный эквивалент уравнения Коши, который характеризует как равномерное, так и распределение Парето, и получили классы их искаженных эквивалентов. Расширение класса логистических распределений получено в [25]. Другие публикации, перечисленные в ссылках, анализируют различные приложения и характеризации ALM-распределений через свойства процессов в прикладных ситуациях. Мы хотели бы здесь особо сосредоточить ваше внимание на преобразовании релевантности вероятностных распределений. Это распределение времени жизни системы, где наблюдение за одним элементом из набора аналогичных элементов одновременно начинают работать в одинаковых условиях. Когда наблюдаемый элемент отказывает, он немедленно заменяется другим элементом из набора все еще работающих (живых) элементов. Распределение длительности времени от начала до момента, когда отказывает второй элемент, является преобразованием релевантности исходного распределения времени жизни каждого элемента. Мы доказываем в [16], что совпадение преобразования релевантности с исходным временем жизни по распределению также характеризует класс ALM-распределений. На такой модели есть над чем поработать молодым вероятностникам, если им это нравится.

2. Графическая иллюстрация свойств ALM-распределений и их анализ

Для наглядной демонстрации свойств ALM-распределений построим серии графиков, иллюстрирующих ключевые характеристики данного класса распределений. Все графики построены для параметров c=5, a=0,7 и λ_Y=0,8, где c – период распределения, a=$P(X\geq c)$ – вероятность «пережить» один период, а λ_Y – параметр усеченного экспоненциального распределения на интервале $[0,c)$.

2.1. Плотность распределения ALM

На графике плотности распределения четко прослеживается периодическая структура ALM-распределения (рис. 1). Функция плотности имеет вид:

$$f_X\left(x\right)=\left(1-a\right)a^{\lfloor x/c\rfloor}f_Y\left(x-\lfloor x/c\rfloor c\right),$$

где $f_Y(y)$ – плотность усеченного экспоненциального распределения на [0,c):

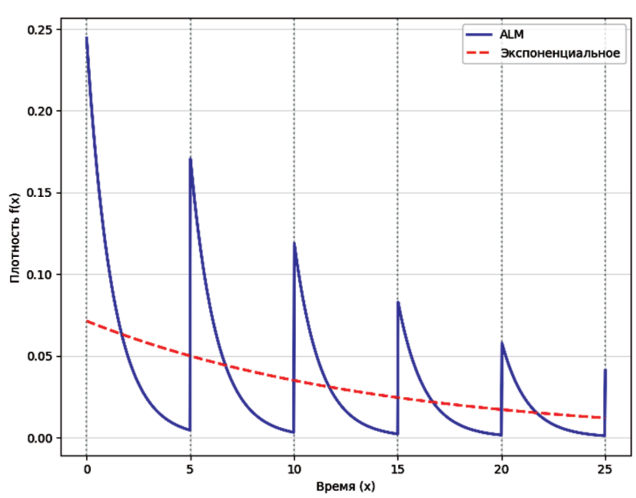

Рис. 1. Сравнение плотностей ALM и экспоненциального распределения

$$f_Y\left(y\right)=\frac{\lambda_Y e^{-\lambda_Y y}}{1-e^{-\lambda_Y c}},\quad y\in\left[0,c\right).$$

Визуально наблюдаются регулярные пики в точках x=0,5,10,15,…, соответствующие началу каждого нового периода. Каждый блок длиной c = 5 демонстрирует идентичную форму плотности, что подтверждает периодическую природу распределения. Для сравнения приведена плотность экспоненциального распределения с параметром $\lambda=-\frac{\ln a}{c}\approx 0{,}0713$, которая монотонно убывает и не проявляет периодичности.

Такая структура плотности соответствует системам, испытывающим циклические нагрузки, где начало каждого периода связано с повышенной вероятностью отказа.

2.2. Функция распределения

Функция распределения ALM (рис. 2) имеет аналитическое выражение:

$$F_X\left(x\right)=1-a^{\lfloor x/c\rfloor}\left(1-\left(1-a\right)F_Y\left(x-\lfloor x/c\rfloor c\right)\right),$$

где $F_Y(y)$ – функция распределения компоненты Y:

$$F_Y\left(y\right)=\frac{1-e^{-\lambda_Y y}}{1-e^{-\lambda_Y c}},\quad y\in\left[0,c\right).$$

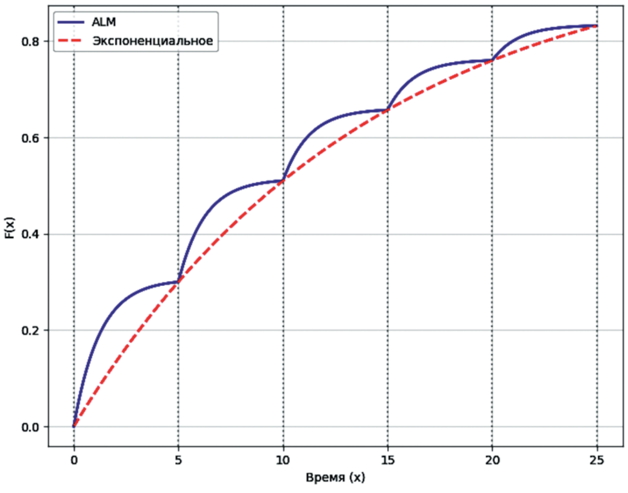

Рис. 2. Функции распределения ALM и экспоненциального распределения

На графике (рис. 2) отчетливо видны «изломы» в точках $x=mc$, m=0,1,2,…, где происходит переход между периодами. Эти изломы отражают дискретную природу свойства отсутствия памяти – система «забывает» возраст только в определенные моменты времени. Экспоненциальное распределение, напротив, демонстрирует гладкую монотонно возрастающую функцию распределения. Ступенчатый характер роста функции распределения является визуальным подтверждением того, что свойство отсутствия памяти выполняется только в дискретные моменты времени.

2.3. Интенсивность отказов

Интенсивность отказов для ALM-распределения вычисляется по формуле:

$$\lambda_X\left(x\right)=\frac{\left(1-a\right)f_Y\left(x-\lfloor x/c\rfloor c\right)}{1-\left(1-a\right)F_Y\left(x-\lfloor x/c\rfloor c\right)}.$$

График интенсивности отказов (рис. 3) наиболее наглядно демонстрирует ключевое свойство ALM-распределений – периодичность. Функция $\lambda_X(x)$ строго периодична с периодом c = 5, повторяя одинаковую форму на каждом интервале $[mc,(m+1)c)$. В отличие от этого, интенсивность отказов экспоненциального распределения постоянна и равна $\lambda=-\frac{\ln a}{c}$.

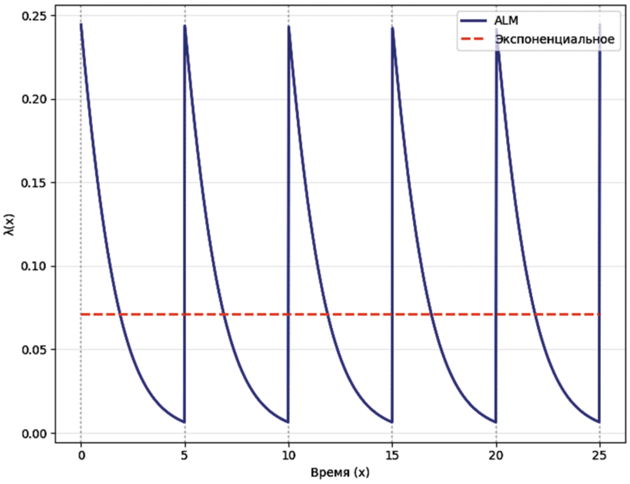

Рис. 3. Интенсивность отказов ALM и экспоненциального распределения

Периодическая интенсивность отказов идеально моделирует системы, работающие в циклически меняющихся условиях, таких как суточные циклы нагрузки, сезонные изменения или регулярные режимы работы оборудования.

2.4. Эмпирическая проверка и моделирование

Для эмпирической проверки свойств ALM-распределения было сгенерировано 1000 реализаций случайной величины с использованием представления:

$$X=Y_c+cZ,$$

где Y_c – случайная величина на $[0,c)$ с усеченным экспоненциальным распределением, а Z – геометрически распределенная случайная величина с параметром $1–a$:

$$P\left(Z=k\right)=\left(1-a\right)a^k,\quad k=0,1,2,\ldots\,.$$

Гистограмма смоделированных данных ALM-распределения (рис. 4) показывает многомодальную структуру с пиками в точках, кратных c=5, что полностью соответствует теоретической плотности. Гистограмма экспоненциального распределения демонстрирует характерную убывающую форму.

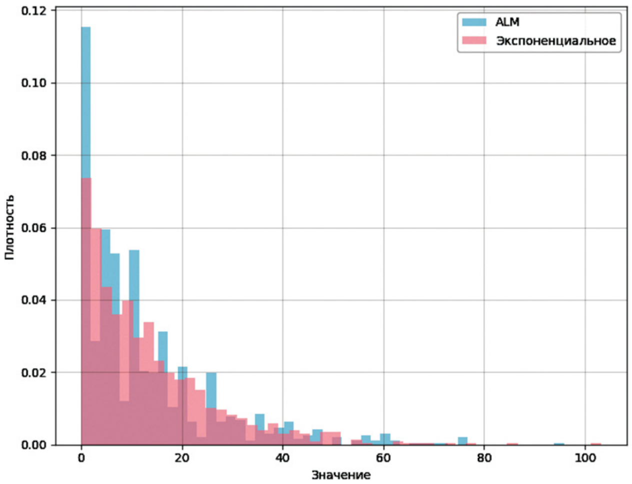

Рис. 4. Гистограммы смоделированных данных

2.5. Анализ свойства отсутствия памяти

Вычислительный анализ подтвердил фундаментальное свойство ALM-распределений:

$$P\left(X \geq c+x | X \geq c\right) = P\left(X \geq x\right).$$

При этом свойство выполняется только для возрастов, кратных c. Для произвольного возраста y, не кратного c, свойство отсутствия памяти не выполняется.

Численная проверка периодичности интенсивности подтвердила строгую периодичность интенсивности отказов:

$$\lambda_X\left(x+c\right) = \lambda_X\left(x\right) \quad \text{для всех } x \geq 0.$$

Значения интенсивности в точках x и $x+c$ совпадают с точностью до вычислительной погрешности.

Сравнение статистических характеристик показало:

- ALM-распределение имеет более высокий коэффициент вариации по сравнению с экспоненциальным

- эмпирическое среднее хорошо согласуется с теоретическим значением:

$$E\left[X\right] = E\left[Y_c\right] + cE\left[Z\right] = \mu_Y + c\frac{a}{1-a}.$$

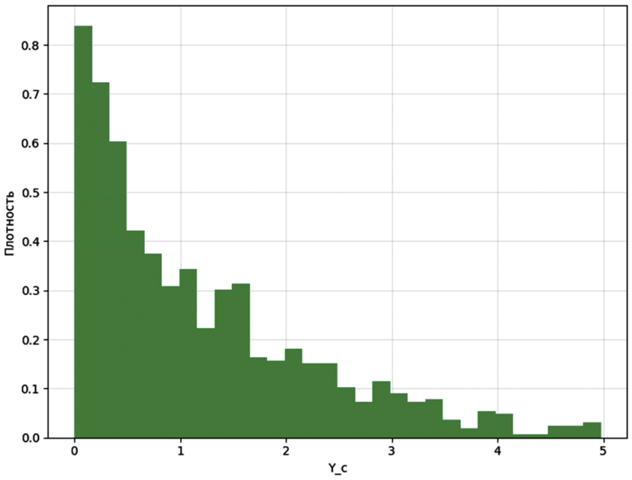

Рис. 5. Распределение компоненты Y_c (на интервале [0,c))

График распределения компоненты Y_c на интервале [0,c) (рис. 5) представляет фундаментальный интерес для понимания структуры ALM-распределений. Эта компонента является первой составляющей в вероятностном представлении ALM-распределения $X=Y_c+cZ$, где Y_c сосредоточена строго на интервале [0,c), а Z представляет собой геометрически распределенную случайную величину, независимую от Y_c.

Визуальное представление демонстрирует усеченное экспоненциальное распределение с параметром $\lambda_Y=0{,}8$ на ограниченном интервале длиной $c=5$. Характер графика показывает монотонное убывание плотности вероятности от максимального значения в начальной точке $y=0$ до минимального вблизи правой границы интервала при $y=c$. Такая форма распределения соответствует математическому выражению плотности $f_{Y_c}\left(y\right) = \left(\lambda_Y e^{-\lambda_Y y}\right) / \left(1-e^{-\lambda_Y c}\right)$ для $y \in [0,c)$, где знаменатель выполняет функцию нормировочной константы, обеспечивающей выполнение условия $\int f_{Y_c}\left(y\right)dy = 1$ на ограниченном интервале.

Смысловая интерпретация распределения Y_c раскрывает его как компоненту, описывающую поведение системы внутри одного периода. Компонента Y_c моделирует «остаточное время жизни» объекта в пределах текущего цикла длиной c, демонстрируя, как вероятность отказа распределена внутри этого временного промежутка. Убывающий характер кривой свидетельствует о повышенной уязвимости системы в начальные моменты каждого периода, что может соответствовать реальным физическим процессам, таким как период адаптации к новым условиям или повышенные нагрузки в начале рабочих циклов.

Связь распределения Y_c с полным ALM-распределением проявляется в том, что именно форма этой компоненты определяет характер поведения интенсивности отказов внутри каждого периода. При объединении с геометрической компонентой Z, которая отвечает за счет числа полностью пройденных периодов, распределение Y_c формирует основу для периодической структуры полного распределения X. Можно сказать, что Y_c задает «внутрипериодный профиль» системы, который затем повторяется на каждом интервале $[mc,(m+1)c)$ для $m=0,1,2,\ldots$

Практическая ценность анализа распределения Y_c заключается в возможности понимания механизмов формирования периодичности в работе систем. Изучение этой компоненты позволяет исследователям оценивать надежность системы в пределах одного цикла эксплуатационной нагрузки и может служить основой для оптимизации стратегий профилактического обслуживания. Знание точного распределения Y_c необходимо для прогнозирования поведения системы в начальные фазы каждого периода, когда часто происходят критические события.

График наглядно подтверждает, что даже внутри отдельных периодов система сохраняет свойства, унаследованные от экспоненциального распределения, но в модифицированной, усеченной форме. Эта ограниченная экспоненциальность в сочетании с дискретной геометрической компонентой порождает принципиально новое

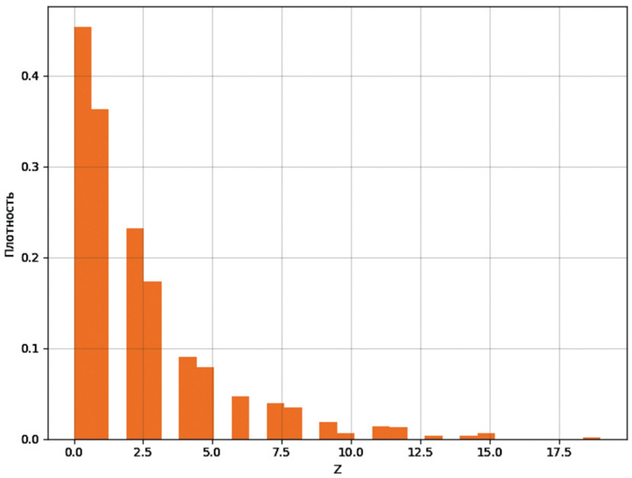

Рис. 6. Распределение компоненты Z (геометрическое)

вероятностное поведение – ALM-распределение, обладающее свойством отсутствия памяти только в дискретные моменты времени. Таким образом, компонента Y_c играет ключевую роль в формировании уникальных характеристик ALM-распределений, обеспечивая математическую основу для моделирования систем, работающих в периодически изменяющихся условиях окружающей среды.

График распределения компоненты Z (рис. 6) представляет особый интерес для понимания дискретной структуры ALM-распределений. Эта геометрически распределенная случайная величина является второй составляющей в фундаментальном представлении ALM-распределения $X=Y_c+cZ$, где Z независима от Y_c и принимает целочисленные значения $k=0,1,2,\ldots$ Визуальное представление демонстрирует классическое геометрическое распределение с параметром $p=1–a=0,3$, где $a=P(X\geq c)=0,7$ представляет вероятность «пережить» один полный период длиной с. Характер графика показывает резкое убывание вероятностей $P(Z=k)=(1–a)a^k$ с ростом k, что соответствует экспоненциальному decay, типичному для геометрического распределения. Наибольшая вероятность сосредоточена в точке $k=0$, а каждая последующая вероятность уменьшается в а раз по сравнению с предыдущей.

Смысловая интерпретация компоненты Z раскрывает ее как счетчик числа полностью завершенных периодов, которые система способна пройти до наступления отказа. Каждое значение $Z=k$ соответствует тому, что система успешно преодолела k полных циклов длиной с каждый, после чего отказала в течение следующего неполного цикла, описываемого компонентой Y_c. Таким образом, Z моделирует дискретную составляющую «долголетия» системы, измеряемую в целых числах периодов, в то время как Y_c описывает непрерывную составляющую внутри последнего, незавершенного периода. Такая интерпретация напрямую связана с свойством отсутствия памяти в дискретные моменты времени: после завершения каждого полного периода система статистически «обновляется» и начинает следующий период как новая, что математически выражается в том, что условное распределение $X–mc$ при условии $X\geq mc$ не зависит от m.

Связь геометрической компоненты Z с полным ALM-распределением проявляется в создании периодической структуры на макроуровне. В то время как компонента Y_c определяет поведение системы внутри каждого отдельного периода, компонента Z ответственна за повторение этой внутрипериодной структуры на всей временной оси. Именно геометрическое распределение Z обеспечивает свойство «блочного повторения» плотности распределения X, наблюдаемое на основном графике плотности ALM-распределения. Можно сказать, что Z задает «скелет» распределения X, определяя позиции тех точек, где плотность имеет локальные максимумы, соответствующие началам новых периодов.

Практическая значимость анализа распределения Z заключается в возможности оценки «долговечности» системы в терминах числа циклов эксплуатации. Знание параметра $a=P(X\geq c)$ позволяет прогнозировать, сколько полных периодов система likely переживет до отказа, что особенно важно для систем, работающих в циклических режимах, таких как суточные циклы, сезонные изменения или регулярные технологические процессы. Кроме того, геометрический характер распределения Z обеспечивает удобный математический аппарат для вычисления различных вероятностных характеристик системы, таких как среднее время жизни $E[X]=E[Y_c]+cE[Z]$, где $E[Z]=a/(1–a)$.

График наглядно иллюстрирует, как дискретная геометрическая компонента в сочетании с непрерывной компонентой Y_c порождает гибридное распределение, обладающее свойствами как дискретных, так и непрерывных распределений. Эта уникальная комбинация позволяет ALM-распределениям адекватно моделировать системы, в которых процессы старения и обновления происходят на разных временных масштабах: непрерывное старение внутри периодов и дискретное «омоложение» на границах периодов. Таким образом, компонента Z является не просто математической абстракцией, а существенным элементом, отражающим фундаментальные механизмы работы систем в периодически изменяющихся условиях окружающей среды.

Таким образом, представленные графики обеспечивают комплексное визуальное представление ключевых свойств ALM-распределений, а именно:

- периодическая структура плотности и функции распределения;
- строгая периодичность интенсивности отказов;
- дискретное свойство отсутствия памяти;
- согласованность теоретических и эмпирических характеристик.

Выводы

Итак, в статье представлен обзор фундаментальных результатов, посвященных классу распределений с почти отсутствием памяти (ALM), которые служат естественным и мощным обобщением классического экспоненциального распределения. Ключевая мотивация работы связана с необходимостью адекватного моделирования систем, функционирующих в периодически меняющейся среде, где такие факторы, как сезонность, суточные циклы или циклы технического обслуживания, нарушают предположение о стационарности, присущее стандартным экспоненциальным моделям. В статье вводится и всесторонне исследуется класс ALM-распределений, характеризующихся свойством отсутствия памяти не в каждой точке времени, а лишь в дискретные моменты, образующие арифметическую прогрессию. Доказано, что если случайная величина забывает свой возраст в некоторой фиксированной точке, то это свойство автоматически распространяется на все кратные ей моменты времени.

Представлен комплекс эквивалентных характеристик ALM-распределений, включая явный вид функции распределения и плотности, имеющих блочную периодическую структуру, аналитическое свойство периодичности интенсивности отказов, а также вероятностное представление в виде суммы независимой случайной величины на интервале и геометрически распределенной величины. Это представление крайне полезно для моделирования и статистического анализа.

Методология работы носит междисциплинарный характер, объединяя методы теории вероятностей, математической статистики, теории надежности и теории массового обслуживания. Показано, что ALM-распределения напрямую связаны с периодическими нестационарными процессами Пуассона, что открывает широкие возможности для их применения в надежности технических систем, страховании, экологии, исследовании операций и других областях, где процессы подвержены периодическим изменениям.

В заключение отметим, что статья не только систематизирует богатый теоретический материал, но и служит практическим руководством, заполняя важный пробел в вероятностном моделировании. Предложенный класс распределений предоставляет исследователям адекватный и математически стройный аппарат для работы с периодическими нестационарными процессами, наглядно демонстрируя, как глубокие теоретические результаты находят прямое применение в решении прикладных задач.

Список литературы / References

1. Dimitrov B., Petrov P. Controlled process with explicit or implicit breakdowns and repeat action / In: System Fault Diagnostics, Reliability and Related Knowledge – Basic Approaches, v. 1 (Edit. Sp. Tzafestas et al). D. Reidel Publ.Comp, 1987. Pp. 415-428.
2. Dimitrov B., Kolev N., Petrov P. Control of unreliable process with implicit breakdowns and mixed executive times // Math. Balkanica, New Series. 1988. Vol. 2. Pp. 391-396.
3. Khalil Z., Dimitrov B., Dion J.-P. A characterization of the geometric distribution related to random sums. Rapport de recherche N 76. Univ. de Quebec a Montreal, Dec. 1988. Pp. 1-21.
4. Dimitrov B., Khalil Z. On a new characterization of the exponential distribution related to a queuing system with an unreliable server // J. Appl Probab. 1990. Vol. 27. Pp. 221-226.
5. Khalil Z., Dimitrov B., Dion J.-P. A characterization of the geometric distribution related to random sums // Commun. in Statist. Stochastic Models. 1991. Vol. 7. Pp. 726-729.
6. Dimitrov B., Chukova S. On the bivariate distributions having the almost-lack-of-memory property. Technical Report of the Wurzburg Research Group on Quality Control, No. 33, June 1991. Pp. 1-16.
7. Dimitrov B., von Collani E. A characterization of distributions having the multiplicative almost lack of memory property. Technical report of the Wurzburg Research Group on Quality Control No. 32, June 1991. Pp. 1-16.
8. Khalil Z., Dimitrov B., Petrov P. On the total execution time of a job on unreliable server. Technical report, 1/91, Concordia Univ., Math & Stat. Dept. July 1991.
9. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Characterization of probability distributions similar to the exponential. Tech. Report, Concordia Univ. # 2, 1992. Pp. 1-29.
10. Dimitrov B., Chukova S. On the distributions having the almost lack-of-memory property // J. Appl. Prob. 1992. Vol. 429. No. 3. Pp. 691-698.
11. Dimitrov B., Khalil Z. A class of new probability distributions for modeling environmental evolution with periodic behavior // Environmetrics. 1992. Vol. 3(4). Pp. 447-464.
12. Chukova S., Dimitrov B., Garrido J. Renewal processes generated by distributions with periodic failure rates // Proc. 26-th Annual Actuarial Research Conference, Univ. of Iowa, Aug. 1992 / Editors: James Broffit and Elias S. Shiu. Actuarial Research Clearing House, 1993. Part 1. Pp. 83-95.
13. Chukova S., Dimitrov B., Garrido J. Renewal and non-homogeneous Poisson processes generated by distributions with periodic failure rate // Statistics & Probability Letters. 1993. Vol. 17. Pp. 19-25.
14. Chukova S., Dimitrov B., Khalil Z. A characterization of probability distributions similar to the exponential // The Canadian Jour. of Statistics. 1993. Vol. 21. No. 3. Pp. 269-276.
15. Dimitrov B., Khalil Z., Le Normand L. A statistical study of periodic environmental processes // Proceedings of the International Congress on Modelling and Simulation, Dec. 6-10, 1993. The Univ. of Western Australia, Perth, 1993. Vol. 41. Pp. 169-174.
16. Chukova S., Dimitrov B., Dion J.-P. Relevation transforms characterize probability distributions // J. of Appl. Math. and Stochastic Analysis. 1993. Vol. 6. No. 4. Pp. 345-358.
17. Dimitrov B., Khalil Z. Some characterizations of the exponential distribution based on the service time properties of an unreliable server // Stability Problems for Stochastic Models (Editors V. V. Kalashnikov, and V. M. Zolotarev). Lecture Notes in Mathematics, 1546. Springer, 1993. Pp. 17-25.
18. Dimitrov B., Chukova S., Green D. Probability distributions in periodic random environment // ASA 1993 Proceedings of the Section on Quality and Productivity. Pp. 251-256.
19. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Bivariate probability distributions similar to exponential // Approximation Probability and Related Fields / Edit. G. Anastassiou and S. Rachev. 1994. Pp. 167-178.
20. Khalil Z., Dimitrov B. The service time properties of an unreliable server characterize the exponential distribution // Adv. Appl. Prob. 1994. Vol. 26. Pp. 172-182.
21. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Definitions, characterizations and structural properties of probability distributions similar to the exponential // J. of Statistical Planning and Inference. 1995. Vol. 43(1). Pp. 271-287.
22. Dimitrov B., von Collani E. Contorted uniform and Pareto distributions // Statistics & Probability Letters. 1995. Vol. 23. No. 1. Pp. 157-164.
23. Chukova S., Dimitrov B. Execution time on an unreliable server with latent breakdowns / In: Matrix-Analytics Methods in Stochastic Models, Edt. S. Chakravarthy and A. Alfa. Marcel Dekker, Inc., New York – Basel – Hong Kong, 1996. Pp. 225-239.
24. Dimitrov B. Periodic random environment generates compound counting processes with amazing properties. Applications // 7-th Annual GMI Industry Symposium. Proceedings: Technology & The Quality Revolution. 1996. Pp. 148-163.
25. El-Saidi M.A., Dimitrov B., Chukova S. Some moment properties and limit theorems of the Reversed Generalized Logistic Distribution with applications // Communications in Statistics: Theory and Methods. 1996. Vol. 25. No. 3. Pp. 609-630.

26. Dimitrov B., Khalil Z., El-Saidi M.A. On probability distributions with accumulating failure rates in periodic random environment // Environmetrics. 1996. Vol. 7. Pp. 17-26.

27. Garrido J., Dimitrov B., Chukova S. Ruin Modeling for Compound Non-Stationary Process with Periodic Claim Intensity Rate. Technical Report No. 2/96, May, Concordia University, Dept. of Mathematics and Statistics, Montreal, Canada. 1996.

28. Dimitrov B., Chukova S., Green D. Probability distributions in periodic random environment and their applications // SIAM J. Appl. Math. 1997. Vol. 57. No. 2. Pp. 501-517.

29. Chukova S., El-Saidi M.A., Dimitrov B. Extended Logistic Distribution. Properties and Possible Applications // Statistical Data Analysis, Edt. D. Vandev, Bulg. Acad. Sci., and St. Kl. Ohridski Univ. of Sofia. 1998. Pp. 10-22.

30. Dimitrov B. Uncertainty in periodic random environment // Applications of Mathematics Engineering. Vol. 23. Heron Press, Sofia, 1998. Pp. 15-26.

31. Dimitrov B., El-Saidi M.A., Khalil Z. Overall Population Growth in Periodic Environment // Environmetrics. 1998. Vol. 9. Pp. 317-328.

32. Dimitrov B., Chukova S. Environmental Modeling in Driving Periodic Conditions // Applications of Mathematics in Engineering. Vol. 24. Heron Press, Sofia, 1999. Pp. 21-30.

33. Dimitrov B., Chukova S., Green D. The Bivariate Probability Distributions with Periodic Failure Rate Via a Hyperbolic Differential Equation // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. 1999. Vol. 5. Pp. 81-92.

34. Dimitrov B., Chukova S., El-Saidi M.A. Modeling Uncertainty in Periodic Random Environment: Applications to Environmental Studies // Environmetrics. 1999. Vol. 10. Pp. 467-485.

35. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis of an Age Dependent Failure Model for Repairable and Non-Repairable Products. Tech. Rep. No.2/99, July 1999. Dept. of Math. and Statistics, Concordia University, Montreal. Pp. 1-16.

36. Chukova S., Dimitrov B. Rate Models in Environmental Studies. Research Report 2000:1, Division of Quality Technology & Statistics, Lulea Univ. of Technology, SE – 971 87, Lulea, SWEDEN. Pp. 1-6.

37. Dimitrov B., Khalil Z., Christozov D. Reliability Maintenance Under Age – Proportional Repairs / ESREL 2001 Towards a Safer World. Ed. by E. Zio, M. Demichela, N. Piccinini, Politecnico di Torino // Proceedings of the European Safety and Reliability Meeting, v. 2. Pp. 1147-1154.

38. Dimitrov B., Khalil Z., Rykov V. et al. Likelihood Ratio Test for Almost-Lack-of-Memory Distributions. Technical Report #1/2001. Concordia University, Montreal, Canada, 2001. V. 2. Pp. 669-687.

39. Dimitrov B., Chukova S., Chakravarthy S. A simple unreliable service model characterizes exponential distribution // Kuwait Journal of Sciences. 2001. Vol. 28. No. 2. Pp. 203-212.

40. Dimitrov B., Chukova S., Vogt H. A Class of Symmetric Probability Distributions Similar to the Double Exponential // Engineering Simulations. 2002. Vol. 19. No. 4. Pp. 467-485.

41. Dimitrov B., Khalil Z., Rykov V. et al. Likelihood Ratio Test for Almost-Lack-of-Memory Distributions / In: Applied Statistical Science IV, Ed. by M. Ahsanullah, J. P. Dion. Nova Science Publishers, Inc., 2002. Pp. 1-18.

42. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2003. Pp. 241-254.

43. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2003. Pp. 78-94.

44. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2004. Pp. 241-254.

45. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2004. Pp. 78-94.

46. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2005. Pp. 241-254.

47. Dimitrov B., Chukova S., and Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2005. Pp. 78-94.

48. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2006. Pp. 241-254.

49. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2006. Pp. 78-94.

50. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2007. Pp. 241-254.

51. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2007. Pp. 78-94.

52. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2008. Pp. 241-254.

53. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2008. Pp. 78-94.

54. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2009. Pp. 241-254.

55. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2009. Pp. 78-94.

56. Dimitrov B., Chukova S., and Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2010. Pp. 241-254.

57. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2010. Pp. 78-94.

58. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2011. Pp. 241-254.

59. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2011. Pp. 78-94.

60. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7, World Scientific, 2012. Pp. 241-254.
61. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2012. Pp. 78-94.
62. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2013. Pp. 241-254.
63. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2013. Pp. 78-94.
64. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2014. Pp. 241-254.
65. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2014. Pp. 78-94.
66. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2015. Pp. 241-254.
67. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2015. Pp. 78-94.
68. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2016. Pp. 241-254.
69. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2016. Pp. 78-94.
70. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2017. Pp. 241-254.
71. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2017. Pp. 78-94.
72. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2018. Pp. 241-254.
73. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2018. Pp. 78-94.
74. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2019. Pp. 241-254.
75. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2019. Pp. 78-94.
76. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2020. Pp. 241-254.
77. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2020. Pp. 78-94.
78. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2021. Pp. 241-254.
79. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2021. Pp. 78-94.
80. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2022. Pp. 241-254.
81. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2022. Pp. 78-94.
82. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Warranty Cost Analysis with Intermittent Usage / In: Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Ed. by B. H. Lindquist and K. A. Doksum. Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, v. 7. World Scientific, 2023. Pp. 241-254.
83. Dimitrov B., Chukova S., Khalil Z. Probability Distributions in Periodic Random Environment and their Applications / In: Recent Advances in Statistical Methods, Ed. by Y. P. Chaubey. Imperial College Press, 2023. Pp. 78-94.

Сведения об авторе

Боян Димитров, д-р физ.-мат. наук, профессор по теории вероятностей и математической статистике, доцент кафедры математики (теория вероятностей и мат. статистика), Инженерно-управленческий институт GMI (ныне Университет Кеттеринга), e-mail: dimitrob@gmail.com, тел.: +1 (810) 344-9628

About the author

Boyan Dimitrov, Dr. of Math. Sci., Professor of Probability and Statistics, Associate Professor of Mathematics (Probability and Statistics), GMI Engineering and Management Inst. (now Kettering), e-mail: dimitrob@gmail.com, tel.: +1 (810) 344-9628

Вклад автора

Постановка задачи и исследования были выполнены автором самостоятельно.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.