Надежность, том 26, №1, 2026 / Dependability 1, 2026
Вопросы автоматизации и управления процессами на транспорте

УДК 534.11
Оригинальная статья
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2026-26-1-4-11

# Моделирование колебаний и исследование резонансных свойств каната переменной длины, лежащего на упругом основании, с учетом диссипации

# Simulation of oscillations and study of resonant properties of a rope of variable length lying on an elastic foundation, taking into account dissipation

**Литвинов В.Л.[1*], Шамолин М.В.[2], Литвинова К.В.[2]**
**Litvinov V.L.[1*], Shamolin M.V.[2], Litvinova K.V.[2]**

[1] Самарский государственный технический университет, Российская Федерация, Самара
[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, Москва
[1] Samara State Technical University, Russian Federation, Samara
[2] Lomonosov Moscow State University, Russian Federation, Moscow
* vladlitvinov@rambler.ru

Литвинов В.Л.

Шамолин М.В.

Литвинова К.В.

**Резюме.** *В настоящее время вопросы надежности при проектировании технических систем с подвижными границами требуют все более полного учета динамических явлений в них.* **Цель.** *Целью исследования является разработка математической модели и приближенно–аналитического метода для изучения поперечных колебаний и резонансных свойств вязкоупругого каната переменной длины, лежащего на упругом основании, с учетом диссипации энергии. Актуальность работы обусловлена широким распространением технических систем с подвижными границами (подъемные механизмы, гибкие передачи, контактные сети железных дорог, рельсовые пути, ленточные конвейеры, бурильные колонны и т.д.), для которых динамические нагрузки и резонанс представляют опасность. Существующие методы не позволяют полностью учесть комплекс факторов: изменение длины объекта, сопротивление среды, упругие свойства основания и внутреннее трение.* **Методы.** *Для решения задачи применен метод Канторовича–Галеркина, эффективный для систем с движущимися границами. Исходная краевая задача для уравнения в частных производных была сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Процедура решения включала переход к безразмерным переменным, выбор координатных функций в виде собственных форм и применение процедуры Галеркина. Для анализа нестационарных процессов использовался метод малого параметра. В рассмотренной модели сила сопротивления движению каната принимается пропорциональной скорости, а также учитывается изгибная жесткость конструкции.* **Результаты.** *Приведены расчетные выражения для амплитуды колебаний, соответствующих n-й динамической моде. Особое внимание уделено исследованию явлений установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Решение охватывает наиболее распространенный на практике случай действия внешних возмущений на движущейся границе системы. Установлено, что амплитуда существенно зависит от скорости движения границы, параметров диссипации и жесткости основания. Определены условия установившегося резонанса при определенном соотношении частоты внешнего воздействия и собственной частоты системы. Исследовано явление прохождения через резонанс. Полученные аналитические выражения верифицированы сравнением с известными частными случаями, что подтвердило корректность метода с погрешностью до 5% для основных мод.* **Выводы.** *Полученные аналитические выражения для амплитуды колебаний, условий установившегося резонанса и параметров прохождения через резонанс позволяют сформулировать ряд практических рекомендаций для инженеров–конструкторов, направленных на повышение надежности и долговечности технических систем с подвижными границами, предупреждение резонансных отказов в системах переменной длины. Ключевыми прикладными задачами, решаемыми с помощью данной модели, являются оценка усталостной долговечности, прогнозирование остаточного ресурса и предотвращение аварийных ситуаций. Учет диссипации и упругого основания критически важен для оценки резонансных свойств. Для предотвращения резонанса рекомендовано оптимизировать скорость движения границы, применять материалы с повышенным трением или демпферы, увеличивать жесткость основания. Результаты имеют прикладное значение для повышения надежности систем с подвижными границами. Перспективы исследований связаны с учетом нелинейных эффектов и негармонических воздействий.*

**Abstract.** *Currently, matters of dependability in the design of technical systems with moving boundaries require an increasingly complete consideration of underlying dynamic phenomena.* **Aim.** *The aim of the study is to develop a mathematical model and an approximate analytical method for studying the transverse vibrations and resonant properties of a viscoelastic rope of variable length lying on an elastic foundation, taking into account energy dissipation. The relevance of the work is due to the widespread use of technical systems with moving boundaries (lifting mechanisms, flexible transmissions, railway contact networks, rail tracks, belt conveyors, drill strings, etc.), for which dynamic loads and resonance are dangerous. The existing methods do not allow for a complete consideration of a system of factors, i.e., changes in the object's length, resistance of the medium, elastic properties of the foundation and internal friction.* **Methods.** *To solve the problem, the Kantorovich–Galerkin method, effective for systems with moving boundaries, was applied. The original boundary value problem for a partial differential equation was reduced to a system of ordinary differential equations. The solution procedure included the transition to dimensionless variables, the selection of coordinate functions in the form of eigenmodes and the application of the Galerkin procedure. The small parameter method was used to analyze non–stationary processes. In the considered model, the drag force of the rope movement is assumed to be proportional to the velocity, and the bending rigidity of the structure is also taken into account.* **Results.** *Calculation expressions are presented for the amplitude of oscillations corresponding to the n–th dynamic mode. Particular attention is paid to the study of the phenomena of steady–state resonance and passage through resonance. The solution covers the most common case in practice of the action of external disturbances on the moving boundary of the system. It is established that the amplitude significantly depends on the velocity of the boundary, dissipation parameters and the rigidity of the foundation. The conditions for steady–state resonance are determined for a certain ratio of the frequency of the external influence and the natural frequency of the system. The phenomenon of passage through resonance is studied. The resulting analytical expressions were verified by comparison with known special cases, confirming the method's validity with an error of up to 5% for the fundamental modes.* **Conclusions.** *The resulting analytical expressions for the oscillation amplitude, steady–state resonance conditions, and resonance passage parameters enable the formulation of a number of practical recommendations for design engineers aimed at increasing the dependability and durability of technical systems with moving boundaries and preventing resonant failures in variable–length systems. Key applied problems solved using this model include fatigue life assessment, residual life prediction, and emergency prevention. Consideration of dissipation and an elastic foundation is critical for assessing resonant properties. To prevent resonance, it is recommended to optimize the boundary velocity, use materials with increased friction or dampers, and increase the foundation rigidity. The results have practical significance for improving the dependability of systems with moving boundaries. Research prospects are related to taking into account nonlinear effects and non–harmonic influences.*

**Ключевые слова:** *колебания систем с движущимися границами, вязкоупругость, надежность систем переменной длины, упругое основание, сопротивление среды, резонансные свойства, амплитуда колебаний.*
**Key words:** *oscillations of systems with moving boundaries, viscoelasticity, dependability of variable–length systems, elastic foundation, resistance of the medium, resonant properties, oscillation amplitude.*

**Для цитирования:** *Литвинов В.Л., Шамолин М.В., Литвинова К.В. Моделирование колебаний и исследование резонансных свойств каната переменной длины, лежащего на упругом основании, с учетом диссипации // Надежность. 2026. №1. С. 4-11. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2026-26-1-4-11*
**For citation:** *Litvinov, V.L., Shamolin, M.V., Litvinova, R.V. Simulation of oscillations and study of resonant properties of a rope of variable length lying on an elastic foundation, taking into account dissipation. Dependability 2026;1: 4-11. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2026-26-1-4-11*

**Поступила:** *23.10.2025* / **После доработки:** *06.12.2025* / **К печати:** *01.02.2026*
**Received on:** *23.10.2025* / **Revised on:** *06.12.2025* / **For printing:** *01.02.2026*

## Введение

Широкое распространение технических систем с подвижными границами – от чувствительных элементов измерительных приборов до бурильных колонн и систем с упруго–инерционными основаниями – выдвигает на первый план проблемы обеспечения их надежности. Разработка точных методов математического моделирования динамики таких систем имеет ключевое значение для прогнозирования долговечности, оценки усталостной прочности и предотвращения отказов несущих конструкций горнодобывающих машин, подъемно–транспортных механизмов, а также буксирно–тралового оборудования. Данное исследование является особенно актуальным в контексте новых прикладных задач, таких как баллистика гибких нитей, где точный расчет динамических нагрузок напрямую определяет надежность и безопасность эксплуатации специализированных технических систем. Системы с подвижными границами широко используются в различных областях техники, включая подъемные механизмы [1–4], гибкие передачи [5], железнодорожные контактные сети [6], рельсовые пути [7], ленточные конвейеры [8] и др. Анализ явлений установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс имеет особое практическое значение, поскольку эти режимы представляют значительный риск для работы механических систем. Однако наличие подвижных границ существенно усложняет математическое моделирование таких систем [9]. Точные аналитические методы применимы, прежде всего, к волновому уравнению с простыми граничными условиями [10–11]. Среди приближенных методов наиболее эффективным является метод Канторовича–Галеркина [12, 13], учитывающий: силы сопротивления среды [14], изгибную жесткость [12, 15], вязкоупругие свойства материала [15] и жесткость подложки [10]. Полученные аналитические выражения для амплитуды колебаний, условий установившегося резонанса и параметров прохождения через резонанс позволяют сформулировать ряд практических рекомендаций, направленных на повышение надежности и долговечности технических систем с подвижными границами.

## 1. Математическая постановка задачи

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания каната, имеет вид:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x,t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \\ + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxxt}(x,t) + \frac{k_0}{\rho} U(x,t) = 0. \quad (1)$$

Граничные условия с возмущением гармонического вида на движущейся границе можно записать следующим образом:

$$U(0,t) = 0; U_{xx}(0,t) = 0; \quad (2)$$

$$U(l_0(t),t) = B\cos W_0(\omega_0 t); U_x(l_0(t),t) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия в данной задаче опущены, поскольку они не влияют на резонансные свойства для линейных систем [12].

Обозначения:

$U(x,t)$ – поперечное смещение; $E$ – модуль упругости каната; $I$ – осевой момент инерции; $\mu$ – коэффициент вязкоупругости; $\lambda$ – коэффициент сопротивления среды; $\rho$ – линейная плотность; $k_0$ – жесткость подложки; $a = \sqrt{T/\rho}$ – минимальная скорость распространения волн; $T$ – сила натяжения; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ – закон движения границы; $L_0$ – начальная длина каната; $W_0(z)$ – функция класса $C^1$; $B$, $\omega_0$ – константы.

После перехода к безразмерным переменным

$$\xi = \omega_0 x / a; \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; U(x,t) = Bu(\xi,\tau)$$

и новой функции

$$u(\xi,\tau) = e^{-\alpha\tau} V(\xi,\tau), \text{ где } \alpha = \lambda/(2\omega_0\rho),$$

система принимает вид:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) - \sigma^2 V(\xi,\tau) + (\beta^2 - \alpha\gamma^2) V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) + \\ + \gamma^2 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = 0; \quad (4)$$

$$V(0,\tau) = 0; V_{\xi\xi}(0,\tau) = 0; \quad (5)$$

$$V(l(\varepsilon\tau),\tau) = e^{\alpha\tau}\cos W(\tau); V_{\xi}(l(\varepsilon\tau),\tau) = 0, \quad (6)$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho}\frac{\omega_0^2}{a^4}; \gamma^2 = \frac{\mu I}{\rho}\frac{\omega_0^3}{a^4}; l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau;$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 - \frac{k_0}{\rho\omega_0^2}; W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0);$$

$$\gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \varepsilon = -v_0/a.$$

## 2. Методы решения задачи

Для решения задачи (4)–(6) используем метод Канторовича–Галеркина [12, 13]. Решение будем искать в виде:

$$V(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi,\varepsilon\tau).$$

Обозначим $\delta^2 = (\beta^2 - \alpha\gamma^2)$ и $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \sigma^2$, где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи (4)–(6).

Из решения задачи:

$$\delta^2 X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - X_{n\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(0,\varepsilon\tau) = 0;\ X_{n\xi\xi}(0,\varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0;\ X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0$$

найдем выражение для динамических мод $X_n(\xi,\ \varepsilon\tau)$ и функций $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$:

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau) = A_n\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau)sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\};$$

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)]\sqrt{1+\delta^2[\omega_{1n}(\varepsilon\tau)+d_n(\varepsilon\tau)]^2},$$

где

$$A_n = 1/\max\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau)sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\};$$

$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{-1+\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}};$$

$$k_2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{1+\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}};$$

$$c_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\sin[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{sh[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]};\ \omega_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)};$$

$$d_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)}arctg\frac{\delta\omega_{1n}(\varepsilon\tau)}{\sqrt{1+\delta^2\omega_{1n}^2(\varepsilon\tau)}}.$$

Предположим $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau)$, где функция $y_n(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному с точностью до порядка $\varepsilon^2$:

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}e^{\alpha\tau}\cos W(\tau). \quad (7)$$

Выполнив вычисления, получаем для функций $Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)$, $A_{0n}$:

$$Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau) = \frac{-k_1(\varepsilon\tau)\sqrt{1+4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)}\cos[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)];$$

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\tau)};$$

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{1}{2}l(\varepsilon\tau)[1-c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}.$$

Линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (7), имеют вид:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau);\ y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau).$$

Метод малого параметра позволяет получить выражения для $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$:

$$a_n(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)};\ w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)d\zeta.$$

## 3. Результаты. Сделанные предположения.

После преобразований с учетом (6) получим выражение для амплитуды колебаний, соответствующих $n$–ной динамической моде [12]:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\begin{aligned}&\left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \\ &+\left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\end{aligned}\right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)};$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);$$

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta)Q_{n_{21}}(\varepsilon\zeta)e^{\alpha\zeta}\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta)/\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Установившийся резонанс наблюдается при:

$W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma$, где $\gamma$ – константа.

Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = E_n(\varepsilon\tau)\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)d\zeta.$$

Явление прохождения через резонанс может возникнуть на любой из динамических мод при воздействии на систему гармонического возмущения с частотой $\omega_0$ когда $W(\tau) = \tau$.

Точка резонансной области $\tau_0$ приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\frac{2\delta^2}{-1+\sqrt{1+4\delta^2(1+\sigma^2)}}}\cdot\pi n - 1\right].$$

Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2)\left\{\begin{aligned}&\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \\ &+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\end{aligned}\right\}.$$

Предлагаемая модель и полученное решение имеют следующие допущения и ограничения:

1. Линейность модели: Модель предполагает линейную зависимость сил сопротивления от скорости

и вязкоупругости материала. Это ограничивает ее применимость областями малых деформаций и умеренных скоростей.

2. Гармоническое возмущение: Решение для резонансных мод получено для случая гармонического внешнего воздействия на границе. Для ударных или широкополосных случайных воздействий требуется дальнейшее развитие модели.

3. Одномерность: Модель рассматривает исключительно поперечные колебания, пренебрегая продольно–поперечной связью, которая может стать существенной при больших амплитудах.

4. Простота закона движения границы $l(\tau)$: Метод допускает различные законы движения границ, но представленные аналитические результаты наиболее наглядны для плавных и монотонных изменений длины. Резкие изменения длины могут потребовать численного анализа.

Принятие во внимание этих ограничений дает направления для дальнейших исследований, таких как включение нелинейных членов в уравнение и использование численных аналитических методов.

## 4. Обсуждение полученных результатов и сравнение их с ранее известными

Для проверки предложенной модели в частном случае, когда сопротивление среды и вязкоупругие свойства пренебрежимо малы, а жесткость основания постоянна, полученные зависимости для амплитуд колебаний при установившемся резонансе и прохождении через резонанс, а также форм колебаний были сопоставлены с результатами, представленными в [11, 12]. Наблюдается полное качественное и количественное совпадение для основных форм колебаний, что подтверждает корректность примененного метода Канторовича–Галеркина (погрешность не превышает 5% при ($\varepsilon<0{,}37$)). В случае учета только демпфирующих сил модель согласуется с результатами, представленными в [16].

## 5. Прикладные аспекты и формулировка рекомендаций

Полученные аналитические выражения для амплитуды колебаний $A_n(\tau)$, условий установившегося резонанса и параметров прохождения через резонанс позволяют сформулировать ряд практических рекомендаций, направленных на повышение надежности и долговечности технических систем с подвижными границами. Ключевые прикладные задачи, решаемые с помощью данной модели, включают оценку усталостной долговечности, прогнозирование остаточного ресурса и предотвращение аварийных ситуаций.

Для инженерной оценки усталостной долговечности элемента переменной длины и прогнозирования ресурса предлагается следующий подход:

1. На основе кинематического закона движения границы $l(\tau)$ определить моменты времени $\tau_1$, $\tau_2$ и параметры, при которых система проходит резонансные области.

2. Используя выражение для максимальной амплитуды $A_n(\tau_1, \tau_2)$ при прохождении через резонанс, рассчитать максимальные динамические напряжения в системе с учетом ее геометрических и жесткостных характеристик.

3. Количество циклов нагружения, соответствующих каждому прохождению через резонанс, можно оценить по количеству смен знака напряжений за время нахождения системы в резонансной области.

4. Суммируя повреждения по всем резонансным режимам за характерный рабочий цикл, можно оценить накопление усталостных повреждений и спрогнозировать остаточный ресурс конструкции.

Для предотвращения возникновения опасных резонансных явлений на этапе проектирования рекомендуется следующее:

1. Контроль скорости движения границы: Зная собственные частоты системы $\omega_{0n}$ в критических точках (например, на минимальной и максимальной длинах), следует выбирать закон изменения скорости движения границы $l(\tau)$, обеспечивающий минимизацию времени нахождения вблизи условий прохождения через резонанс и максимизацию скорости изменения обобщенной частоты.

2. Оптимизация демпфирования: Поскольку амплитуда резонансных колебаний обратно пропорциональна коэффициенту демпфирования $\beta$, выбор материалов с повышенным внутренним трением или установка внешних демпферов является эффективной мерой подавления колебаний.

3. Учет жесткости основания: Расчеты показывают, что увеличение безразмерного параметра $k_0$, характеризующего жесткость упругого основания, приводит к увеличению собственных частот $\omega_{0n}$. Это позволяет вывести низшие формы колебаний из рабочего диапазона частот внешних возмущений, характерных для данного объекта.

## Выводы

Таким образом, разработанные математическая модель и методы решения представляют не только теоретический интерес, но и практическое значение для расчета и оптимизации динамических характеристик вязкоупругих канатов, лежащих на упругом основании, с учетом диссипации, что позволяет более точно прогнозировать их поведение в резонансных условиях. Сформулированные на этой основе рекомендации по выбору кинематических и жесткостных параметров системы позволяют на стадии проектирования предотвратить возможность возникновения значительных амплитудных колебаний в несущих элементах установок, а также открывают перспективы для дальнейших исследований, в том числе с учетом нелинейных свойств материала, продольно–поперечных колебаний каната и т.д. Представленные решения могут быть использованы при исследовании колебаний механических объектов с подвижными границами (см. также [16–27]) в целях повышения надежности и увеличения срока службы технических систем переменной длины.

## Список литературы

1. Весницкий А.И., Потапов А.И. Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. 1975. № 7. С. 84-89.

2. Колосов Л.В. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов: Горный журнал. 1981. № 3. С. 83-86.

3. Литвинов В.Л. Исследование прохождения через резонанс вязкоупругого каната переменной длины в грузоподъемных механизмах // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2008: XI Всероссийская научно-техническая конференция. Пермь, 2008.

4. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust. 2006. Vol. 1. Pp. 66-78.

5. Самарин Ю.П., Анисимов В.Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение. 1986. № 12. С. 17-21.

6. Ryue J., Thompson D. Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies // J. Sound and Vibr. 2009. № 4-5. Pp. 955-976.

7. Lei Xiao-yan. Влияние резких изменений жесткости основания железнодорожного полотна на его вибрацию при движущейся нагрузке // Journal of Vibration Engineering. 2006. № 2. Pp. 195-199.

8. Мулухов К.К. Особенности динамического расчета ленточно-колесных конвейеров // Труды Северо-Кавказского государственного технологического университета. 2000. № 7. С. 266-269: 3 ил.

9. Самарин Ю.П. О волновых явлениях в областях с подвижными границами // Волжский математический сборник. Куйбышев, 1967. Вып. 5. С. 337-340.

10. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

11. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2012. № 3(28). С. 145-151. DOI: 10.14498/vsgtu1079 EDN: QBUTVH

12. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009. 131 с. EDN: COXZEM

13. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159-161.

14. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2009. № 2(19). DOI: 10.14498/vsgtu1079 EDN: LADKBT

15. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2008. 358 с.

16. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Применение метода Канторовича-Галеркина для анализа резонансных характеристик систем с затуханием // Теоретическая и математическая физика. 2025. Т. 224. № 1. С. 95-104. DOI: 10.4213/tmf10930 EDN: GRXBCL

17. Литвинов В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 188-199. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-188-199 EDN: LGJAHF

18. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегродифференциальным уравнениям // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 6. С. 977-986. DOI: 10.31857/S0044466922060126 EDN: NHEDUP

19. Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Об одном асимптотическом методе решений однородных интегро-дифференциальных уравнений, описывающих колебания объектов с движущимися границами // Сибирский журнал индустриальной математики. 2025. Т. 28. № 2. С. 39-54. DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.203 EDN: HLTSWB

20. Савин Г.Н. Об основных уравнениях шахтного подъемного каната // Прикладная механика. 1955. Т. 1. № 1. С. 15-24.

21. Литвинов В.Л., Анисимов В.Н. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография. Самара: СамГТУ, 2020. 118 с. EDN: WZLYFA

22. Литвинов В.Л., Литвинова К.В. Об одном обратном методе решения задач о колебаниях механических систем с движущимися границами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2024. № 3. С. 53-59. DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-3-8 EDN: AZGKFY

23. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of a one-phase problem with free boundary // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 189. No. 2. Pp. 274-283. DOI: 10.1007/s10958-013-1209-9 EDN: RFJYVD

24. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Studying the interphase zone in a certain singular-limit problem. Journal

of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 189, No. 2. Pp. 284-293. DOI: 10.1007/s10958-013-1210-5 EDN: RFJYWH

25. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Квазигармоническая продольная волна, распространяющаяся в стержне Миндлина-Германа, погруженном в нелинейно-упругую среду // Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 211. № 2. С. 216-235. DOI: 10.4213/tmf10253 EDN: AVOJTF

26. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Общие соотношения для волн, распространяющихся в одномерных упругих системах // Математические методы механики: материалы международной конференции. К 90-летнему юбилею акад. А.Г. Куликовского. М.: МИАН, 2023. С. 26-27.

27. Семенов А.Л. Литвинов В.Л., Шамолин М.В. Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины // Computational Mathematics and Information Technologies. 2025. Т. 9. № 2. С. 34-43. DOI: 10.23947/2587-8999-2025-9-2-34-43 EDN: LTGFLA

## References

1. Vesnitskiy A.I., Potapov A.I. [Transverse vibrations of ropes in mine hoists]. *Dinamika sistem. Gorkovsky universitet* 1975;7:84–89. (in Russ.)

2. Kolosov L.V. [Longitudinal and transverse vibrations of the rope string of a hoisting unit]. *Minerals and Mining Engineering* 1981;3:83–86. (in Russ.)

3. Litvinov V.L. [Study of passage through resonance of a viscoelastic rope of variable length in lifting mechanisms]. In: Proceedings of Aerospace engineering, high technologies and innovations 2008: XI All–Russian science and technology conference. Perm; 2008. (in Russ.)

4. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control. *Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust.* 2006;1:66-78.

5. Samarin Yu.P., Anisimov V.N. [Forced transverse vibrations of a flexible link during acceleration]. *BMSTU Journal of mechanical engineering* 1986;12:17–21. (in Russ.)

6. Ryue J., Thompson D. Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies. *J. Sound and Vibr.* 2009;4-5:955-976.

7. Lei Xiao–yan. Effect of abrupt changes in the rigidity of the railway bed base on its vibration under a moving load. *Journal of Vibration Engineering* 2006;2:195–199.

8. Mulukhov K.K. [Features of Dynamic Calculation of Belt–Wheel Conveyors]. *Proceedings of the North Caucasus State Technological University* 2000;7:266–269. (in Russ.)

9. Samarin Yu.P. On Wave Phenomena in Domains with Moving Boundaries. *Volzhskiy matematichesky sbornik. Kuibyshev* 1967;5:337–340. (in Russ.)

10. Vesnitsky A.I. Waves in Systems with Moving Boundaries and Loads. Moscow: Fizmatlit; 2001. (in Russ.)

11. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. On a Method for Obtaining an Analytical Solution of the Wave Equation Describing Oscillations of Systems with Moving Boundaries. *Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences* 2012;3(28):145–151. DOI: 10.14498/vsgtu1079. (in Russ.)

12. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Resonance Properties of Mechanical Objects with Moving Boundaries: a monograph. Samara State Technical University. Samara; 2009. (in Russ.)

13. Lezhneva A.A. Flexural Oscillations of a Variable–Length Beam. *Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Solid Body Mechanics* 1970;1:159–161. (in Russ.)

14. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Analysis of the Influence of Boundary Movement in the Study of Resonance Properties of Damped Systems. *Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences* 2009;2(19). DOI: 10.14498/vsgtu1079. (in Russ.)

15. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Calculation of Natural Frequencies of Transverse Oscillations of a Viscoelastic Rope Moving in the Longitudinal Direction and Having Flexural Rigidity. In: Mathematical Modeling and Boundary Value Problems: Proceedings of the Fifth All–Russian Scientific Conference with International Participation. Part 1: Mathematical Models of Mechanics, Strength, and Reliability of Structural Elements. Samara: SamSTU; 2008. (in Russ.)

16. Litvinov V.L., Litvinova K.V. Application of the Kantorovich–Galerkin method for the analysis of resonant characteristics of systems with damping. *Teoreticheskaia i Matematicheskaia Fizika* 2025;224(1):95–104. DOI: 10.4213/tmf10930. (in Russ.)

17. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro–differential equations. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* 2020;26(2):188–199. DOI: 10.21538/0134–4889–2020–26–2–188–199. (in Russ.)

18. Litvinov V.L., Litvinova K.V. An approximate method for solving boundary value problems with movable boundaries by reduction to integro–differential equations. *Zhurnal Vychislitel'noi Ma-tematiki i Matematicheskoi Fiziki* 2022;62(6):977–986. DOI: 10.31857/S0044466922060126. (in Russ.)

19. Litvinov V.L., Shamolin M.V. On an asymptotic method for solving homogeneous integro–differential equations describing oscillations of objects with moving boundaries. *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki* 2025;28(2):93–107.DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.203. (in Russ.)

20. Savin G.N. On the basic equations of a mine hoisting rope. *Prikladnaia Mekhanika* 1955;1(1):15–24. (in Russ.)

21. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and investigation of the resonant properties of mechanical objects with a changing boundary: a monograph. Samaral; SamGTUl; 2020. (in Russ.)

22. Litvinov V.L., Litvinova K.V. On one inverse method for solving problems of oscillations of me-chanical systems with moving boundaries. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriia 1: Matematika. Mekhanika* 2024;3:53–59. DOI: 10.55959/MSU0579–9368–1–65–3–8. (in Russ.)

23. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Local solvability of a one-phase problem with free boundary. *Journal of Mathematical Sciences* 2013;189(2):274-283. DOI: 10.1007/s10958-013-1209-9 EDN: RFJYVD. (in Russ.)

24. Selivanova N.Yu., Shamolin M.V. Studying the interphase zone in a certain singular–limit problem. *Journal of Mathematical Sciences* 2013;189(2):284–293. DOI: 10.1007/s10958–013–1210–5. (in Russ.)

25. Erofeev V.I., Leont'eva A.V. Quasiharmonic longitudinal wave propagating in a Mindlin–Hermann rod embedded in a nonlinearly elastic medium. *Teoreticheskaia i Matematicheskaia Fizika* 2022;211(2):216–235. DOI: 10.4213/tmf10253. (in Russ.)

26. Erofeev V.I., Lisenkova E.E. General relations for waves propagating in one–dimensional elastic systems. In: Mathematical Methods in Mechanics: materials of the international conference. To the 90th anniversary of academician A.G. Kulikovsky. Moscow, MIAN; 2023. Pp. 26–27. (in Russ.)

27. Semenov A.L., Litvinov V.L., Shamolin M.V. Investigation of the influence of boundary motion on the oscillatory and resonant properties of mechanical systems of variable length. *Computational Mathematics and Information Technologies* 2025;9(2):34–43. DOI: 10.23947/2587–8999–2025–9–2–34–43. (in Russ.)

## Сведения об авторах

**Владислав Львович Литвинов** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой Общетеоретические дисциплины (Высшей математики), Самарский государственный технический университет. Адрес: Российская Федерация, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244. E–mail: vladlitvinov@rambler.ru

**Владимирович Шамолин Максим** – член–корреспондент РАН, доктор физико–математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. Адрес: Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1. E–mail: shamolin@rambler.ru

**Кристина Владиславовна Литвинова** – студент, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. Адрес: Российская Федерация, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1. E–mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

## About the authors

**Vladislav L. Litvinov,** Candidate of Engineering, Associate Professor, Head of the Department of General Theoretical Disciplines (Higher Mathematics), Samara State Technical University. Address: 244 Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation. E–mail: vladlitvinov@rambler.ru

**Maksim V. Shamolin,** Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lomonosov Moscow State University. Address: 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation. E–mail: shamolin@rambler.ru

**Kristina V. Litvinova,** Student, Lomonosov Moscow State University. Address: 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation. E–mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

## Вклад авторов статью

**В.Л. Литвинов** – постановка задачи; формулировка идей исследования, целей и задач.

**М.В. Шамолин** – общее научное руководство; разработка методологии; визуализация; валидация.

**К.В. Литвинова** – перевод; изучение истории задачи; поиск литературы.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.