Надежность, том 25, №4, 2025 / Dependability 4, 2025
Системный анализ в задачах надежности и безопасности

УДК 519.216
Оригинальная статья
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2025-25-4-29-35

Исследование оценок параметров распределения по малой выборке

A study of small-sample estimates of distribution parameters

Воловик А.В.[1]*
Volovik A.V.[1]*

[1] *АО «ОДК-Климов», Санкт-Петербург, Российская Федерация*
[1] *JSC "UEC-Klimov", Saint Petersburg, Russian Federation*
* *volovik_aleksandr@mail.ru*

Воловик А.В.

Резюме. Цель. *Оценка параметров распределения по малой выборке представляет самостоятельную нетривиальную задачу, при решении которой путем максимизации функции правдоподобия можно получить сильно смещенный результат. В статье проанализированы свойства некоторых оценок параметров бета-распределения 1-го рода по малой выборке.* **Методы.** *Сравнение оценок параметров бета-распределения по малой выборке различными методами проведено имитационным моделированием при числе испытаний $N = 10^4$.* **Результаты.** *Оценки параметров методом максимального правдоподобия действительно дают сильно смещенный результат для выборок малого объема. Бутстреп-метод, по сравнению с методом максимального правдоподобия, дает менее смещенные оценки с меньшей дисперсией. Наиболее приемлемый (близкий к исходным значениям) результат получен с использованием математического ожидания (или медианы) и дисперсии.* **Выводы.** *Для выборок малого объема вряд ли можно рекомендовать какой-либо конкретный способ оценки параметров. Наиболее целесообразным представляется нейросетевой анализ малых выборок. С помощью нейросетевого объединения нескольких способов оценки можно существенно улучшить ее точность.*

Abstract. Aim. *Evaluating distribution parameters based on small samples is an unconventional problem in itself. Solving it by maximizing the likelihood function may produce highly biased results. The paper analyses the properties of some small-sample estimates of beta distribution parameters of the 1-st kind.* **Methods.** *The comparison of small-sample estimates of beta distribution parameters using various methods involved simulation with the number of tests $N = 10^4$.* **Results.** *Parameter estimation using the maximum likelihood method does produce a highly biased result for small samples. The bootstrap method, as compared to the maximum likelihood method, produces less biased estimates with a smaller variance. The most acceptable (close to the initial values) result was obtained using the mathematical expectation (or median) and variance.* **Conclusion.** *For small samples, no particular method of parametre estimation can be recommended. The neural network analysis appears to be the best suited for small samples. Neural network integration of a number of methods of estimation may significantly improve its accuracy.*

Ключевые слова: *малая выборка, плотность распределения, статистика, гипотеза, оценка параметра, бутстреп-метод, правдоподобие, нейросетевой анализ.*
Keywords: *small sample, distribution density, statistics, hypothesis, parameter estimation, bootstrap method, likelihood, neural network analysis.*

Для цитирования: *Воловик А.В. Исследование оценок параметров распределения по малой выборке // Надежность. 2025. №4. С. 29-35. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2025-25-4-29-35*
For citation: *Volovik, A.V. A study of small-sample estimates of distribution parameters. Dependability 2025;4: 29-35. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2025-25-4-29-35*

Поступила: *21.06.2025* / **После доработки:** *20.07.2025* / **К печати:** *28.09.2025*
Received on: *21.06.2025* / **Revised on:** *20.07.2025* / **For printing:** *28.09.2025*

Введение

Предложенный в [1] комбинаторный способ идентификации малой выборки предполагает знание параметров распределения проверяемой гипотезы для вероятностного интегрального преобразования [2] исходной выборки в выборку, наблюдения которой распределены равномерно в интервале [0;1].

Оценка параметров распределения по малой выборке представляет самостоятельную нетривиальную задачу [3, 4], при решении которой путем максимизации функции правдоподобия можно получить сильно смещенный результат [5].

В монографии [6] подробно рассмотрены проблемы оценки параметров бета-распределения. В частности, рядом исследований установлено, что метод моментов дает более близкие к истинным значениям оценки параметров бета-распределения по сравнению с методом максимального правдоподобия.

В данной статье исследованы оценки параметров классического бета-распределения 1-го рода по малой выборке, произведенные наиболее известными способами.

1. Метод

Классическое бета-распределение 1-го рода имеет плотность [7, 8, 9]

$$f(x) = \frac{1}{B(\lambda,\mu)} x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1},\ 0 \le x \le 1,\ \lambda > 0,\ \mu > 0, \qquad (1)$$

где $B(\lambda,\mu) = \dfrac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$ – бета-функция; λ, μ – параметры распределения; $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

На рис. 1 показана плотность бета-распределения с комбинациями параметров, которые использовались в [1] при исследовании мощности комбинаторного критерия равномерности.

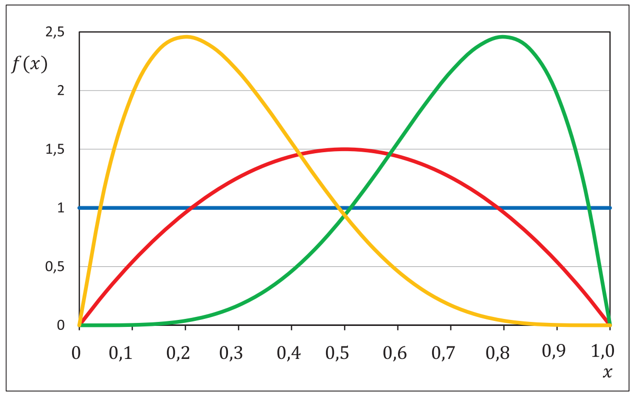


Рис. 1. Плотность бета-распределения при параметрах:
λ = 1 и μ = 1; λ = 1,5 и μ = 1,5;
λ = 1,5 и μ = 1; λ = 1 и μ = 1,5;

Сравнение оценок параметров бета-распределения по малой выборке различными методами проведено имитационным моделированием при числе испытаний N=10^4.

Одними из традиционных оценок параметров распределений служат оценки максимального правдоподобия, которые максимизируют функцию [2]

$$l(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \lambda,\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i \mid \lambda,\mu).$$

При этом в общем случае нет гарантий, что для конечных выборок оценки максимального правдоподобия окажутся несмещенными [2]. В табл. 1 приведены

Табл. 1. Результаты оценки параметров методом максимального правдоподобия

Параметры исходного бета-распределения	Оценки параметров	Объем выборки, n											
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1000
λ=1,0 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	4,46	3,19	2,47	2,01	1,81	1,63	1,52	1,44	1,37	1,33	1,30	1,00
	$D(\hat{\lambda})$	12,73	8,69	5,57	3,43	2,42	1,62	1,18	0,87	0,62	0,54	0,42	0,002
	$M(\hat{\mu})$	4,47	3,17	2,50	2,00	1,81	1,63	1,51	1,44	1,37	1,33	1,29	1,00
	$D(\hat{\mu})$	12,74	8,55	5,67	3,32	2,48	1,58	1,15	0,85	0,67	0,54	0,43	0,002
λ=1,5 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	5,24	4,01	3,36	2,98	2,62	2,43	2,27	2,16	2,05	1,99	1,95	1,50
	$D(\hat{\lambda})$	11,88	9,28	7,13	5,40	3,73	2,88	2,21	1,74	1,29	1,17	0,90	0,004
	$M(\hat{\mu})$	5,33	4,03	3,35	2,98	2,63	2,43	2,27	2,16	2,05	2,00	1,95	1,50
	$D(\hat{\mu})$	12,15	9,46	6,95	5,38	3,80	2,89	2,15	1,72	1,32	1,15	0,93	0,004
λ=1,0 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	3,93	2,83	2,30	1,94	1,75	1,59	1,49	1,43	1,36	1,32	1,27	0,94
	$D(\hat{\lambda})$	10,53	6,69	4,35	2,66	1,99	1,36	0,94	0,75	0,57	0,50	0,39	0,018
	$M(\hat{\mu})$	5,73	4,31	3,51	3,05	2,75	2,49	2,31	2,21	2,10	2,03	1,96	1,41
	$D(\hat{\mu})$	13,29	10,95	7,99	5,96	4,54	3,25	2,38	1,89	1,55	1,28	1,01	0,028
λ=1,5 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	5,63	4,30	3,56	3,09	2,70	2,49	2,34	2,17	2,10	2,02	1,97	1,36
	$D(\hat{\lambda})$	13,21	11,02	8,17	6,08	4,36	3,28	2,60	1,86	1,50	1,21	1,04	0,047
	$M(\hat{\mu})$	3,86	2,82	2,27	1,96	1,73	1,59	1,50	1,40	1,36	1,31	1,29	0,94
	$D(\hat{\mu})$	10,28	6,63	4,12	2,71	1,84	1,41	1,01	0,70	0,60	0,47	0,39	0,01

оценки параметров методом максимального правдоподобия при рассмотренных выше параметрах исходного бета-распределения (M-математическое ожидание, D-дисперсия).

Из табл. 1 видно, что, действительно, для выборок с несимметричным распределением ($\lambda \neq \mu$) оценки параметров методом максимального правдоподобия оказываются смещенными даже при $n = 1000$.

Результатом метода двух начальных моментов является оценка по математическому ожиданию и дисперсии. Для бета-распределения с плотностью (1) математическое ожидание и дисперсия имеют, соответственно, вид [8, 10]

$$m = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \; s^2 = \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2 (\lambda + \mu + 1)}. \qquad (2)$$

Найдя по выборочным данным оценки $\hat{m}$ и $\hat{s}^2$, и, решая систему уравнений (2), можно определить оценки параметров $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ бета-распределения (1).

В табл. 2 приведены результаты оценки параметров бета-распределения по оценкам математического ожидания и дисперсии.

Как видно из табл. 2, смещение оценок при малых выборках по данному методу намного ниже, чем у метода максимального правдоподобия.

Сущность обобщенного метода моментов [10] заключается в использовании для оценки параметров закона распределения, в отличие от известного метода моментов, не только прямых степенных, но и моментов других типов, например, логарифмических. Для этого необходимо прологарифмировать плотность распределения. Затем в полученном аналитическом выражении определить слагаемые, которые являются функциями случайных величин ($\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и т.д.). Вид функциональных зависимостей определяет тип используемых моментов (степенной, логарифмический, экспоненциальный и т.д.) и их порядок.

Далее полученные аналитические выражения соответствующих моментов приравнивают к значениям соответствующих выборочных моментов. После чего оценки параметров распределения, как и в методе моментов, определяются в результате решения полученной системы уравнений. Количество уравнений в системе соответствует числу оцениваемых параметров.

В результате логарифмирования плотности (1) получены функции $y_1=\varphi_1(x)=\ln x$ и $y_2=\varphi_2(x)=\ln(1-x)$. После их усреднения имеем систему уравнений [10]

$$M[\ln x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i;$$

$$M[ln(1-x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i),$$

из решения которой находятся оценки параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$.

Для оценки теоретических моментов необходимо определить плотности распределений случайных величин y_1 и y_2. Для этого введем в рассмотрение обратные функции $x_1 = e^{y_1}$ и $x_2 = 1 - e^{y_2}$. Тогда плотности распределений случайных величин y_1 и y_2 запишутся следующим образом [2]

$$g_1(y_1) = f\left(e^{y_1}\right)\left|\left(e^{y_1}\right)'\right| = \frac{1}{B(\lambda,\mu)} e^{\lambda y_1}\left(1 - e^{y_1}\right)^{\mu - 1}, \qquad (3)$$

Табл. 2. Результаты оценки параметров по математическому ожиданию и дисперсии

Параметры исходного бета-распределения	Оценки параметров	Объем выборки, n											
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1000
λ=1,0 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	1,76	1,61	1,53	1,45	1,39	1,36	1,32	1,29	1,26	1,24	1,21	1,00
	$D(\hat{\lambda})$	1,10	0,94	0,80	0,69	0,61	0,54	0,48	0,43	0,37	0,35	0,31	0,002
	$M(\hat{\mu})$	1,77	1,61	1,53	1,46	1,38	1,35	1,32	1,29	1,26	1,24	1,21	1,00
	$D(\hat{\mu})$	1,11	0,94	0,82	0,72	0,60	0,54	0,49	0,43	0,39	0,35	0,31	0,002
λ=1,5 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	2,00	1,92	1,90	1,86	1,84	1,82	1,82	1,80	1,78	1,76	1,75	1,50
	$D(\hat{\lambda})$	0,92	0,81	0,71	0,66	0,60	0,57	0,53	0,50	0,47	0,43	0,41	0,005
	$M(\hat{\mu})$	2,00	1,94	1,91	1,86	1,84	1,82	1,82	1,80	1,77	1,75	1,75	1,50
	$D(\hat{\mu})$	0,91	0,82	0,73	0,66	0,60	0,56	0,53	0,50	0,46	0,43	0,42	0,005
λ=1,0 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	1,54	1,40	1,36	1,30	1,29	1,26	1,24	1,20	1,20	1,20	1,17	1,00
	$D(\hat{\lambda})$	0,98	0,75	0,62	0,52	0,45	0,41	0,36	0,31	0,29	0,26	0,24	0,002
	$M(\hat{\mu})$	2,21	2,08	2,03	1,97	1,93	1,89	1,87	1,83	1,82	1,80	1,78	1,50
	$D(\hat{\mu})$	0,91	0,89	0,82	0,77	0,71	0,66	0,61	0,58	0,55	0,52	0,49	0,005
λ=1,5 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	2,21	2,10	2,01	1,98	1,95	1,88	1,87	1,84	1,80	1,80	1,78	1,50
	$D(\hat{\lambda})$	0,92	0,88	0,82	0,76	0,72	0,65	0,61	0,57	0,54	0,51	0,48	0,005
	$M(\hat{\mu})$	1,52	1,41	1,36	1,32	1,30	1,26	1,25	1,22	1,19	1,19	1,18	1,00
	$D(\hat{\mu})$	0,97	0,75	0,63	0,52	0,46	0,39	0,36	0,32	0,28	0,26	0,24	0,002

$$g_2(y_2) = f\left(1-e^{y_2}\right)\left|\left(1-e^{y_2}\right)'\right| = \frac{1}{B(\lambda,\mu)} e^{\mu y_2}\left(1-e^{y_2}\right)^{\lambda-1}. \quad (4)$$

Отсюда получаем обобщенные моменты

$$M_{y_1} = \frac{1}{B(\lambda,\mu)} \int_{-\infty}^{0} y_1 e^{\lambda y_1}\left(1-e^{y_1}\right)^{\mu-1} dy_1, \quad (5)$$

$$M_{y_2} = \frac{1}{B(\lambda,\mu)} \int_{-\infty}^{0} y_2 e^{\mu y_2}\left(1-e^{y_2}\right)^{\lambda-1} dy_2. \quad (6)$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} M\left[\ln x\right] = M_{y_1}; \\ M\left[ln(1-x)\right] = M_{y_2} \end{cases} \quad (7)$$

относительно переменных μ и λ, получим оценки параметров $\hat{\mu}$ и $\hat{\lambda}$.

Результаты оценки параметров обобщенным методом моментов приведены в табл. 3.

Из табл. 3 видно, что, несмотря на заявленную в [10] «малую погрешность оценивания параметров распределений при малых выборках», для бета-распределения данный метод неприемлем для действительно малых ($n < 10$) выборок.

В последнее время находит применение бутстреп-метод оценки параметров [4]. Основная идея этого метода состоит в многократном извлечении случайным образом выборки заданного размера из исходной совокупности наблюдений и расчете по ним требуемых оценок с последующим осреднением. В табл. 4 приведены результаты оценки параметров бета-распределения бутстреп-методом.

Из табл. 4 видно, что бутстреп-метод для выборок малого объема дает также смещенный результат с достаточно большим рассеиванием.

Есть мнение [11], что в случае отклонения распределения от симметричного закона среднее значение использовать некорректно, так как оно является слишком чувствительным параметром к так называемым «выбросам». В этом случае для характеристики центральной тенденции в выборке должен применяться другой параметр – медиана. Медиана – это значение признака, справа и слева от которого находится равное число наблюдений (по 50%). Этот параметр (в отличие от среднего значения) устойчив к «выбросам» [11].

Медиана непрерывного распределения вероятностей M есть значение, удовлетворяющее соотношению [12]

$$F(M)=0{,}5,$$

где $F(x)$ – функция распределения генеральной совокупности.

Разумное приближение значения медианы бета-распределения для $\lambda,\mu\geq 1$ задается формулой [13]

$$M \approx \frac{\lambda - \frac{1}{3}}{\lambda + \mu - \frac{2}{3}}. \quad (8)$$

В табл. 5 приведены результаты оценки параметров бета-распределения по медиане и дисперсии аналогично системе уравнений (2), в которой вместо оценки математического ожидания используется оценка медианы (8).

Из табл. 5 видно, что оценки по медиане и дисперсии вместо математического ожидания и дисперсии дают

Табл. 3. Результаты оценки параметров обобщенным методом моментов

Параметры исходного бета-распределения	Оценки параметров	Объем выборки, n											
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1000
λ=1,0 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	17,66	6,27	3,26	2,26	1,84	1,67	1,54	1,45	1,37	1,34	1,30	1,00
	$D(\hat{\lambda})$	870,56	204,55	46,59	10,76	4,32	2,09	1,61	0,98	0,64	0,56	0,46	0,0017
	$M(\hat{\mu})$	17,42	6,27	3,16	2,31	1,87	1,67	1,53	1,45	1,37	1,33	1,30	1,00
	$D(\hat{\mu})$	846,07	204,46	40,01	13,37	6,77	2,16	1,41	1,06	0,64	0,53	0,46	0,0017
λ=1,5 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	20,58	8,56	4,94	3,48	2,87	2,54	2,95	2,19	2,07	1,99	1,94	1,50
	$D(\hat{\lambda})$	901,77	261,21	82,34	31,58	12,88	5,72	3,57	2,51	1,55	1,23	0,97	0,004
	$M(\hat{\mu})$	20,81	8,57	4,93	3,47	2,87	2,53	2,31	2,20	2,08	2,01	1,95	1,50
	$D(\hat{\mu})$	924,49	265,97	86,94	28,51	11,39	6,61	3,31	2,30	1,55	1,25	0,98	0,004
λ=1,0 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	15,34	5,59	3,14	2,18	1,84	1,66	1,51	1,41	1,37	1,31	1,28	1,00
	$D(\hat{\lambda})$	643,93	147,67	36,20	8,53	4,10	2,29	1,14	0,77	0,64	0,51	0,40	0,002
	$M(\hat{\mu})$	23,54	9,11	5,11	3,52	2,94	2,63	2,34	2,21	2,13	2,03	1,98	1,50
	$D(\hat{\mu})$	1157	313,80	87,07	25,07	12,28	7,95	3,14	2,51	1,76	1,48	1,09	0,004
λ=1,5 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	23,04	9,12	5,17	3,68	2,92	2,57	2,35	2,20	2,09	2,04	1,97	1,50
	$D(\hat{\lambda})$	1147	307,74	98,54	33,41	10,73	5,37	3,69	2,21	1,71	1,27	1,02	0,004
	$M(\hat{\mu})$	14,99	5,87	3,19	2,25	1,83	1,63	1,50	1,41	1,35	1,32	1,28	1,00
	$D(\hat{\mu})$	640,87	146,95	45,42	10,72	3,95	2,72	1,19	0,80	0,63	0,47	0,38	0,002

Табл. 4. Результаты оценки параметров бутстреп-методом

Параметры исходного бета-распределения	Оценки параметров	Объем выборки, n											
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1000
λ=1,0 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	3,02	2,66	2,37	2,18	2,02	1,90	1,77	1,70	1,64	1,58	1,53	1,01
	$D(\hat{\lambda})$	3,51	3,25	2,92	2,57	2,28	2,01	1,74	1,53	1,38	1,22	1,08	0,005
	$M(\hat{\mu})$	3,04	2,65	2,36	2,15	2,01	1,88	1,77	1,69	1,65	1,56	1,52	1,01
	$D(\hat{\mu})$	3,51	3,24	2,91	2,53	2,25	1,97	1,73	1,51	1,38	1,16	1,06	0,004
λ=1,5 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	3,33	3,06	2,88	2,70	2,59	2,51	2,43	2,33	2,27	2,23	2,19	1,51
	$D(\hat{\lambda})$	2,96	2,87	2,67	2,50	2,32	2,15	1,98	1,84	1,70	1,58	1,49	0,009
	$M(\hat{\mu})$	3,31	3,03	2,87	2,71	2,59	2,50	2,44	2,34	2,28	2,24	2,19	1,51
	$D(\hat{\mu})$	2,94	2,84	2,64	2,52	2,31	2,13	2,03	1,85	1,71	1,59	1,49	0,009
λ=1,0 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	2,57	2,30	2,09	2,93	1,82	1,73	1,67	1,61	1,56	1,48	1,47	1,00
	$D(\hat{\lambda})$	3,26	2,75	2,34	2,00	1,71	1,51	1,34	1,19	1,05	0,88	0,84	0,004
	$M(\hat{\mu})$	3,68	3,38	3,11	2,90	2,78	2,61	2,53	2,46	2,39	2,30	2,25	1,51
	$D(\hat{\mu})$	2,83	2,99	2,92	2,85	2,69	2,48	2,32	2,20	2,01	1,85	1,72	0,010
λ=1,5 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	3,72	3,36	3,12	2,91	2,76	2,66	2,54	2,44	2,37	2,30	2,24	1,51
	$D(\hat{\lambda})$	2,76	2,98	3,01	2,84	2,65	2,52	2,33	2,20	2,00	1,87	1,73	0,01
	$M(\hat{\mu})$	2,55	2,31	2,09	1,95	1,85	1,74	1,68	1,58	1,55	1,51	1,46	1,00
	$D(\hat{\mu})$	3,23	2,75	2,31	2,01	1,74	1,48	1,33	1,14	1,04	0,94	0,84	0,004

Табл. 5. Результаты оценки параметров по медиане и дисперсии

Параметры исходного бета-распределения	Оценки параметров	Объем выборки, n											
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1000
λ=1,0 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	1,45	1,31	1,24	1,19	1,17	1,15	1,14	1,12	1,10	1,10	1,08	1,00
	$D(\hat{\lambda})$	1,22	0,98	0,81	0,66	0,57	0,51	0,44	0,39	0,34	0,32	0,28	0,002
	$M(\hat{\mu})$	1,46	1,32	1,25	1,20	1,16	1,15	1,13	1,13	1,11	1,10	1,09	1,00
	$D(\hat{\mu})$	1,24	0,98	0,82	0,68	0,57	0,50	0,44	0,40	0,35	0,32	0,29	0,002
λ=1,5 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	1,68	1,62	1,62	1,60	1,61	1,61	1,61	1,59	1,60	1,60	1,58	1,50
	$D(\hat{\lambda})$	1,14	0,96	0,83	0,74	0,64	0,61	0,55	0,51	0,48	0,45	0,42	0,005
	$M(\hat{\mu})$	1,69	1,62	1,63	1,59	1,61	1,61	1,61	1,59	1,60	1,60	1,58	1,50
	$D(\hat{\mu})$	1,15	0,95	0,84	0,73	0,66	0,62	0,55	0,51	0,48	0,46	0,42	0,005
λ=1,0 μ=1,5	$M(\hat{\lambda})$	1,32	1,23	1,19	1,16	1,17	1,14	1,14	1,12	1,12	1,11	1,12	1,02
	$D(\hat{\lambda})$	0,98	0,74	0,58	0,50	0,44	0,39	0,33	0,31	0,28	0,26	0,24	0,003
	$M(\hat{\mu})$	1,84	1,72	1,69	1,64	1,67	1,63	1,65	1,62	1,61	1,60	1,62	1,50
	$D(\hat{\mu})$	1,29	1,12	0,98	0,86	0,78	0,70	0,66	0,60	0,55	0,51	0,48	0,005
λ=1,5 μ=1,0	$M(\hat{\lambda})$	1,84	1,73	1,69	1,66	1,65	1,64	1,62	1,63	1,61	1,61	1,61	1,50
	$D(\hat{\lambda})$	1,30	1,12	1,00	0,88	0,78	0,72	0,65	0,60	0,55	0,52	0,49	0,005
	$M(\hat{\mu})$	1,30	1,23	1,19	1,17	1,15	1,14	1,14	1,13	1,11	1,11	1,11	1,02
	$D(\hat{\mu})$	0,94	0,74	0,59	0,51	0,42	0,39	0,34	0,33	0,27	0,26	0,24	0,003

менее смещенный результат для выборок малого объема даже в случае симметричного распределения. Хотя являются и менее эффективными из-за бóльшего рассеивания. На рис. 2 и 3 приведены графики зависимостей оценок математического ожидания $M(n)$ и дисперсии $D(n)$ параметра λ бета-распределения от объема n используемых для этого выборок, реализованных рассмотренными выше методами, для случая λ=1,5 и μ=1,0.

Из рис. 2 и 3 видно, что наименее удачным для выборок малого (n<10) объема является обобщенный метод моментов. Оценки параметров методом максимального правдоподобия действительно дают сильно смещенный результат для выборок малого объема [5]. При этом и дисперсия оценки параметра является высокой по сравнению с остальными методами. Так, при параметрах λ=μ=1,5 и объеме выборки n=2 в одной реализации слу-

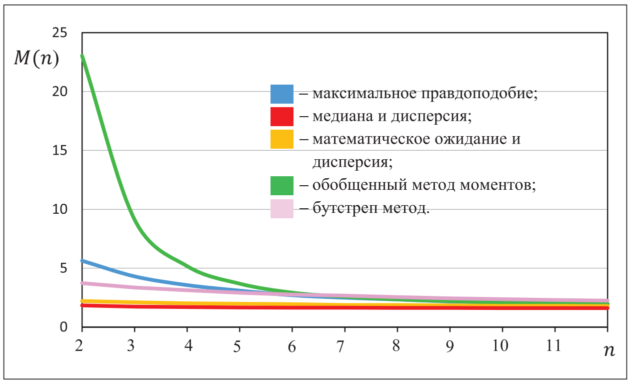


Рис. 2. Графики оценок математического ожидания параметра λ

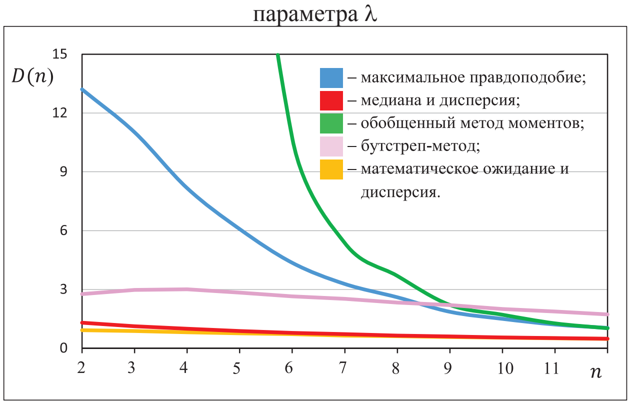


Рис. 3. Графики оценок дисперсии параметра различными методами

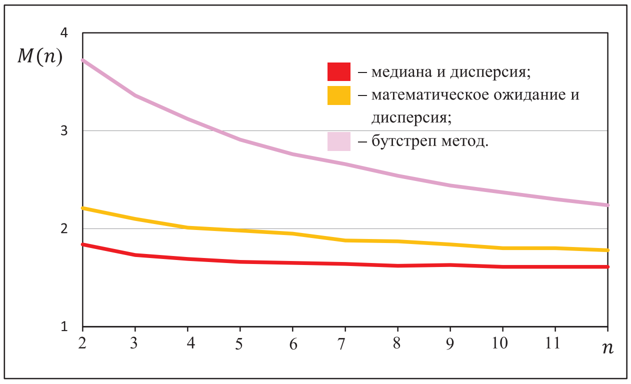


Рис. 4. Графики оценок математического ожидания параметра λ тремя методами

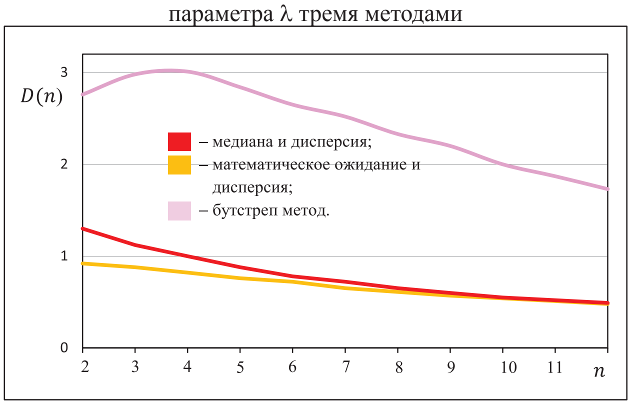


Рис. 5. Графики оценок дисперсии параметра тремя методами

чайные величины бета-распределения приняли значения X_1=0,36 и X_2=0,69. Методом максимального правдоподобия оценки параметров при этом составили $\hat{\lambda} = 4,6$ и $\hat{\mu} = 4,1$. В то время, как оценки по медиане и дисперсии $\hat{\lambda} = 1,7$ и $\hat{\mu} = 1,6$ представляются более адекватными.

На рис. 4 и 5 для наглядности приведены графики тех же зависимостей без метода максимального правдоподобия и обобщенного метода моментов, как наиболее грубых для выборок объемом n<10.

Из рис. 4 и 5 видно, что наиболее близкими к исходным значениям являются оценки по медиане и дисперсии. Однако наименьшей дисперсией обладают оценки по математическому ожиданию и дисперсии.

Таким образом, наиболее приемлемыми оценками параметров несимметричных бета-распределений по малой выборке являются оценки по математическому ожиданию (или медиане) и дисперсии.

2. Результат

Наименее удачным для выборок малого (n<10) объема является обобщенный метод моментов. Оценки параметров методом максимального правдоподобия действительно дают сильно смещенный результат для выборок малого объема [5]. При этом, и дисперсия оценки параметра является высокой по сравнению с остальными методами. Так, при параметрах λ=μ=1,5 и объеме выборки n=2 в одной реализации случайные величины бета-распределения приняли значения X_1=0,36 и X_2=0,69. Методом максимального правдоподобия оценки параметров при этом составили $\hat{\lambda} = 4,6$ и $\hat{\mu} = 4,1$. В то время, как оценки по медиане и дисперсии $\hat{\lambda} = 1,7$ и $\hat{\mu} = 1,6$ представляются более адекватными.

Оценки по двум начальным моментам ожидаемо практически совпадают с оценками по математическому ожиданию и дисперсии т.к. последние явно выражаются через первые два начальных момента.

Бутстреп-метод, по сравнению с методом максимального правдоподобия, дает менее смещенные оценки с меньшей дисперсией. Таким образом, наиболее приемлемый (близкий к исходным значениям) результат получен с использованием математического ожидания (или медианы) и дисперсии.

Заключение

В результате исследования выявлено, что для выборок малого объема вряд ли можно рекомендовать какой-либо конкретный способ оценки параметров. Наиболее целесообразным представляется нейросетевой анализ малых выборок [15]. С помощью нейросетевого объединения нескольких способов оценки можно существенно улучшить ее точность.

Список литературы

1. Воловик А.В. Комбинаторный способ идентификации малой выборки// Надежность. 2024. № 2. С. 3-7. DOI: 10.21683/1729-2646-2024-24-2-3-7

2. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных / Под ред. Э.К. Лецкого. М.: Мир, 1980. 610 с.

3. Гаскаров Д.В., Шаповалов В.И. Малая выборка. М.: Статистика, 1978. 248 с.

4. Орлов А.И. Эконометрика. М.: Экзамен, 2002. 410 с.

5. Попукайло В.С. Поддержка принятия решений по пассивным выборкам малого объема / Дисс. доктора информатики. УДК 004.415.2. Кишинев, 2017. 168 с.

6. Джонсон Н.Л. Одномерные непрерывные распределения: в 2 ч. Ч. 2. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010-2012. 600 с.

7. Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению. Новосибирск: НГТУ, 2015. 182 с.

8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

9. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.

10. Громов Ю.Ю., Карпов И.Г. Законы распределения непрерывной случайной величины с максимальной энтропией. Обобщенный метод моментов // Научно-технические ведомости СПбГПУ 1. 2009. С. 37-41.

11. Реброва О. Среднее или все же медиана // «Троицкий вариант». 2011. № 90. с. 13.

12. ГОСТ Р 50779.24-2005 (ИСО 8595:1990) Статистические методы. Статистическое представление данных. Оценка медианы. М.: Стандартинформ, 2005. II, 6 с.

13. Керман, Джуни (2011). «Аппроксимация в замкнутой форме для медианы бета-распределения»[электронный ресурс]. URL: https://arxiv.org/abs/1111.0433 (дата обращения: 29.9.2025).

14. Лемешко Б.Ю., Гильдебрант С.Я., Постовалов С.Н. К оцениванию параметров надежности по цензурированным выборкам // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 1. С. 52-64.

15. Волчихин В.И. и др. Нейросетевой анализ нормальности малых выборок биометрических данных с использованием хи-квадрат критерия и критериев Андерсона-Дарлинга // Инженерные технологии и системы. 2019. Том 29. № 2. С. 205-217.

References

1. Volovik A.V. A combinatorial method of small sample identification. *Dependability* 2024;24(2):3-7. (in Russ.). DOI: 10.21683/1729-2646-2024-24-2-3-7

2. Johnson N., Leone F. Statistics and Experimental Designs and Engineering and the Physical Sciences. Mathods of Data Processing. Moscow: Mir; 1980.

3. Gaskarov D.V., Shapovalov V.I. [Small sample]. Moscow: Statistika; 1978. (in Russ.)

4. Orlov A.I. [Econometrics]. Moscow: Examen; 2002. (in Russ.)

5. Popukailo V.S. [Decision support for small-size passive samples]. A Doctor of Computer Science dissertation. UDC 004.415.2. Chisinau; 2017. (in Russ.)

6. Johnson N.L. Continuous Univariate Distributions: in 2 volumes. Volume 2. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy; 2010-2012.

7. Lemeshko B.Yu., Blinov P.Yu [Criteria for testing a distribution for deviation from a uniform law. An application guide]. Novosibirsk: NSTU; 2015. (in Russ.)

8. Korn G., Korn T. Mathematical handbook. Moscow: Nauka; 1974.

9. Vadzinsky R.N. Handbook of Probability Distributions. St. Petersburg: Nauka; 2001. (in Russ.)

10. Gromov Yu.Yu., Karpov I.G. [Distribution laws of a continuous random variable with maximum entropy. Generalized method of moments]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPBGPU 1* 2009:37-41. (in Russ.)

11. Rebrova O. [Average or median though]. *Troitsky variant* 2011;90:13. (in Russ.)

12. GOST R 50779.24-2005 (ISO 8595:1990): Interpretation of statistical data. Estimation of a median. Moscow: Standartinform; 2005. (in Russ.)

13. Kerman J. A closed-form approximation for the median of the beta distribution. (accessed 29.9.2025). Available at: https://arxiv.org/abs/1111.0433.

14. Lemeshko B.Yu., Hildebrant S.Ya., Postovalov S.N. [On the assessment of reliability parameters based on censored samples]. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials* 2001;67(1):52-64. (in Russ.)

15. Volchikhin V.I. et al. The neural network analysis of normality of small samples of biometric data through using the Chi-square test and Anderson–Darling criteria. *Inzhenernyye tekhnologii i sistemy* 2019;29(2):205-217. (in Russ.)

Сведения об авторе

Воловик Александр Васильевич – кандидат технических наук, ведущий инженер-конструктор АО «ОДК-Климов». Адрес: д. 16 корп. А, кв.128, ул. Центральная, пос. Шушары, тер. Детскосельский, Санкт-Петербург, Российская Федерация, 196634, тел. 8-951-651-83-39, e-mail: volovik_aleksandr@mail.ru.

About the author

Alexander V. Volovik, Candidate of Engineering, Lead Design Engineer, JSC “UEC-Klimov”. Address: 16 bldg. A, apt. 128, Tsentralnaya, Shushary, ter. Detskoselsky, Saint Petersburg, 196634, Russian Federation, tel. 8 (951) 651 83 39, e-mail: volovik_aleksandr@mail.ru.

Вклад автора в статью

Исследование проведено автором самостоятельно в полном объеме.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Разрабатывается автоматизированная система роспуска грузовых вагонов на сортировочных горках КГМ РИИЖТ.

1980

1960

Разработаны и внедрены отечественные системы автоматической локомотивной сигнализации.

14 февраля 1956 года Министр путей сообщения СССР Б.П. Бещев подписал приказ о создании Конструкторского бюро Главного управления сигнализации и связи (КБ ЦШ).

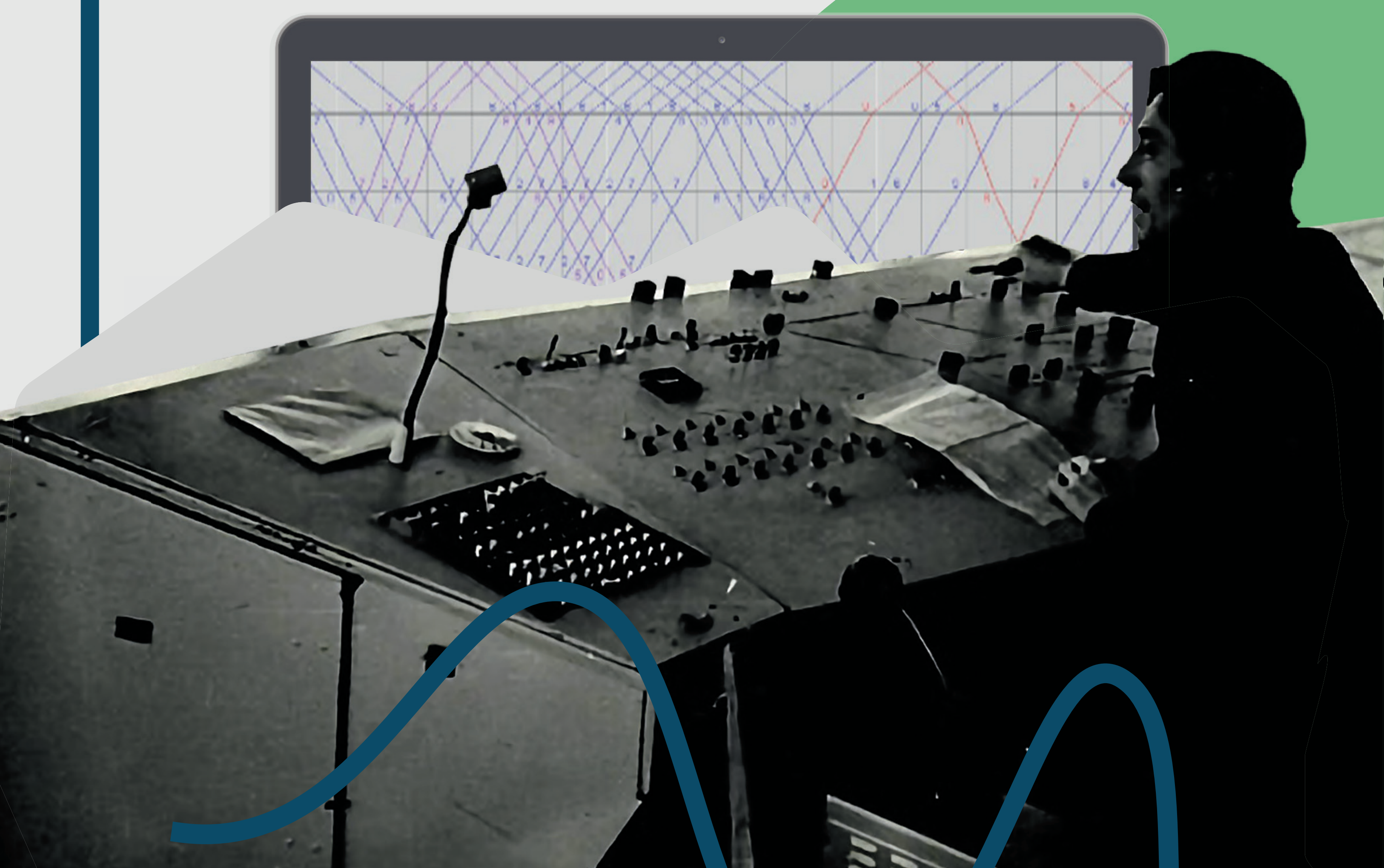
1956

1990

Внедрение автоматизированных информационных систем АСОУП, ДИСПАРК, ДИСТПС, «Грузовой экспресс», новые системы локомотивной сигнализации для скоростного движения АЛС-ЕН.

1970

Создание устройств диспетчерской централизации, сигнализации и автоблокировки. Развитие направления автоматизации технологических процессов.



2000

Достижения в сфере создания бортовых устройств безопасности для тягового, моторвагонного и специального подвижного состава. Началось массовое внедрение систем КЛУБ, КЛУБ-У, КЛУБ-П.

НИИАС

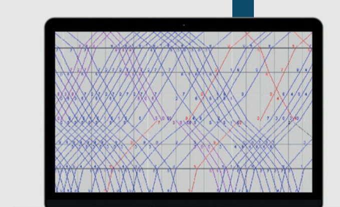
Старт разработок в области комплексной интеллектуальной системы управления железнодорожным транспортом (ИСУЖТ). Решение локальных функциональных задач: анализ надежности, управление рисками ресурсами.

2010

Внедрение цифровых решений в области железнодорожного транспорта. Развитие систем интервального регулирования движением поездов. Разработка беспилотного управления поездами и бортовых систем безопасности.

2020

Внедрение единой программно-аппаратной экосистемы, включающей новейшие средства автоматизации, механизации и роботизации.



2025

niias.ru

vniias_official