

# Требования к точности и достоверности в вероятностных моделях Accuracy and precision requirements in probability models<sup>1</sup>

Зиновий Круглый<sup>1\*</sup>  
Zinovi Krougly<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Факультет Прикладной Математики, Западный Университет, Лондон, Онтарио, Канада

<sup>1</sup> Department of Applied Mathematics, Western University, London, Ontario, Canada N6A5B7

\* e-mail: zkrougly@uwo.ca



Зиновий Круглый

**Резюме.** Численное преобразование Лапласа и его обратное преобразование – сложная задача в теории массового обслуживания и других вероятностных моделях. Для нахождения стабильных и вычислительно эффективных методов используется подход двойного преобразования. Для проверки и улучшения полученного инверсионного решения выполняются прямые преобразования Лапласа от численно инвертированных преобразований с последующим сравнением с исходной функцией. Наиболее перспективные методы были применены к вычислительным вероятностным моделям, когда не существует аналитических решений для обратного преобразования Лапласа. Вычислительная эффективность, обеспечиваемая в зависимости от заданного уровня точности, продемонстрирована для различных моделей M/G/1 систем массового обслуживания.

**Abstract.** Numerical Laplace transform and inverse Laplace transform is a challenging task in queueing theory and others probability models. A double transformation approach is used to find stable, accurate, and computationally efficient methods for performing the numerical Laplace and inverse Laplace transform. To validate and improve the inversion solution obtained, direct Laplace transforms are taken of the numerically inverted transforms to compare with the original function. Algorithms provide increasing accuracy as precision level increases. The most promising methods were applied to computational probability models, when there are no closed-form solutions of the Laplace transform inversion. The computational efficiency compared to precision levels is demonstrated for different service models in M/G/1 queueing systems.

**Ключевые слова:** численное прямое и обратное преобразование Лапласа, высокоточные вычисления, точность и достоверность в вероятностных моделях

**Keywords:** numerical Laplace transform, numerical Laplace transform inversion, high precision computation, applications in probability models

**Для цитирования:** Круглый З. Требования к точности и достоверности в вероятностных моделях // Надежность. 2025. №4. С. 3-16. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2025-25-4-3-16>

**For citation:** Krougly Z. Accuracy and precision requirements in probability models. Dependability 2025;4: 3-16. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2025-25-4-3-16>

**Поступила:** 25.05.2024 / **После доработки:** 11.06.2025 / **К печати:** 28.09.2025

**Received on:** 25.05.2024 / **Revised on:** 11.06.2025 / **For printing:** 28.09.2025

## Введение

Численное инвертирование преобразования Лапласа для получения различных показателей эффективности расчетов является важным приемом в теории массового обслуживания и смежных стохастических моделях [1], [6], [16]. Методы преобразования Лапласа могут упростить задачу решения систем дифференциальных уравнений [5] и могут быть рассмотрены с точки зрения типичных приложений [4], [8]. Инвертирование преобразования Лапласа широко используется в различных прикладных областях, включая анализ производительности в теории массового обслуживания и соответствующих

вероятностных моделях [1], [6], [16]. Для численного инвертирования преобразований Лапласа разработано несколько алгоритмов, см., например, обзоры [4] и [13].

Алгоритм Гавера-Стефеста [18] является одним из наиболее эффективных методов для решения этой задачи. Сходимость данного алгоритма была исследована в работе [14]. К сожалению, несмотря на теоретические преимущества, в ряде практических приложений численная аппроксимация часто сталкивается с проблемами точности [1], [9], [11], [12], [13], [15]. Небольшие ошибки округления при вычислениях в стандартной двойной арифметике могут значительно искажать результаты, делая эти алгоритмы практически непригодными для применения.

<sup>1</sup> Ре-публикация статьи Zinovi Krougly. "Accuracy and Precision Requirements in Probability Models" Reliability: Theory & Applications, vol. 16, no. 1 (61), 2021, pp. 133-151. doi:10.24412/1932-2321-2021-161-133-151

Числа с двойной точностью, представленные в формате с плавающей запятой, обеспечивают точность вычислений до 15-17 значащих десятичных цифр (в среднем 16,3) в диапазоне от  $10^{-308}$  до  $10^{308}$ . При использовании расширенной точности можно добавить дополнительные значащие цифры и получать результаты, более точно сходящиеся к решению. Для численной реализации преобразования Лапласа и его инверсий мы использовали библиотеки численных классов C++ и MATLAB [10], [12], а также применили пакет ARPREC [3].

В работе [9] представлен подход двойного преобразования, включающий вычислительно эффективные методы для обратного преобразования Лапласа. Рассмотрены сложные численные примеры с периодическими и осциллирующими функциями. Было установлено, что количество членов разложения и выбранный уровень точности должны находиться в гармоничном балансе, чтобы получить корректные и стабильные результаты. В данной работе мы исследуем стабильность и точность инверсии преобразования Лапласа с использованием алгоритма Гавера-Стефеста [18]. Численные результаты были первоначально сопоставлены с известными аналитическими решениями. Затем наиболее интересные методы были применены к вероятностным моделям, для которых необходимо численное обратное преобразование Лапласа.

Для численного прямого преобразования Лапласа было реализовано составное правило Симпсона [9]. Численные примеры иллюстрируют вычислительную точность и стабильность прямого преобразования Лапласа и его инверсии благодаря увеличению уровня точности ( $N$ ) и количества членов ( $L$ ), включенных в разложение.

Остальная часть статьи организована следующим образом. Для обозначения преобразуемой функции мы используем строчные буквы  $f(t)$ , и заглавную букву  $C(s)$  для обозначения ее преобразования Лапласа, например  $\mathcal{L}\{f(t)\} = C(s)$ . Если аналитическая форма инверсии  $C(s)$  неизвестна, мы сравниваем исходное  $C(s)$  и численное решение  $\tilde{C}(s)$  после двойного преобразования. Результаты иллюстрируются графиками и оценками погрешностей.

В разделе 1 дается краткое описание основной теории и ее обозначений. В разделе 2 представлено численное вычисление прямого преобразования Лапласа с использованием составного правила Симпсона. В разделе 3 представлена методика численного двойного преобразования Лапласа. В разделах 4, 5 и 6 рассмотрены проблемные примеры и роль высокоточной арифметики при применении к вероятностным моделям. В разделах 7, 8, и 9 приведены численные преобразования Лапласа и их инверсии, в частности, для применения в моделях  $M/D/1$  и  $M/G/1$ . Мы исследуем устойчивость и точность инверсии преобразования Лапласа, а также влияние числа членов разложения и уровня точности на численное приближение. Мы обсуждаем методику двойного преобразования для проверки результатов численной инверсии. В разделе 10 демонстрируется методика

двойного преобразования и требования к точности для аппроксимации распределения времени ожидания в модели  $M/D/1$ .

## 1. Численные преобразования Лапласа и их инверсии

Пусть  $f(t)$  – функция, определенная для  $t \geq 0$ . Тогда интеграл

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

считается преобразованием Лапласа от  $f(t)$  при условии, что интеграл сходится. Символ  $\mathcal{L}$  – это оператор преобразования Лапласа, который действует на функцию  $f(t)$  и порождает новую функцию  $C(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .

Если  $C(s)$  представляет собой преобразование Лапласа функции  $f(t)$ , то есть  $\mathcal{L}\{f(t)\} = C(s)$ , то  $f(t)$  является обратным преобразованием Лапласа для  $C(s)$  и  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}$ . Обратное преобразование Лапласа  $\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}$  однозначно определено в том смысле, что если  $C(s) = G(s)$  и  $f(t)$  и  $g(t)$  непрерывные функции, то  $f(t) = g(t)$ .

Преобразование Лапласа может быть инвертировано алгебраически или численно. Условное обозначение  $\tilde{f}(t)$  используется для численной аппроксимации  $f(t)$  (численная инверсия преобразования Лапласа  $C(s)$ ),  $\tilde{C}(s)$  используется для численного преобразования Лапласа  $f(t)$ .

Если  $t$  случайная величина с функцией плотности распределения вероятности  $f(t)$  и кумулятивной функцией распределения  $F(t)$ , то это дает

$$C(0) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = 1 \quad (2)$$

## 2. Численное вычисление прямого преобразования Лапласа

Для проверки и улучшения решения инверсии, полученного с помощью алгоритма Гавера-Стефеста, используется численное прямое преобразование Лапласа для этой инверсии, которое сравнивается с исходным преобразованием Лапласа. Чтобы обеспечить высокую точность аппроксимации, численное прямое преобразование Лапласа реализуется [9] с помощью составного правила Симпсона [2]. Для обеспечения высокой точности мы использовали расчет по составному правилу Симпсона с большим количеством подинтервалов.

Преобразование Лапласа функции  $f(t)$  определяется выражением (1) на интервале  $[0, \infty]$ . Проблему с бесконечным верхним пределом интегрирования можно устранить, применив подстановку  $t = -\ln(u)$ ,  $dt = -u^{-1} du$ , которая заменяет бесконечные пределы на конечные.

Когда  $t = 0$ ,  $u = 1$  и когда  $t \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$ , тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_1^0 e^{\ln(u^s)} f(-\ln(u)) u^{-1} du = \int_0^1 u^{s-1} f(-\ln(u)) du. \quad (3)$$

Поведение преобразуемой функции должно быть рассмотрено в новых пределах, а экспоненциальная функция внутри интеграла требует особого изучения с точки зрения высокой точности.

### 2.1. Вычисление прямого преобразования Лапласа с помощью составного правила Симпсона

Для интегрирования по интервалу  $[a, b]$  выбирается четное  $n$  таким образом, чтобы функция была достаточно гладкой на каждом подинтервале  $[x_j, x_{j+1}]$ , где  $x_j = a + jh$  для всех  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  с  $h = (b - a)/n$ . В частности,  $x_0 = a$  и  $x_n = b$ . Тогда составное правило Симпсона имеет вид [2]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right] \quad (4)$$

Применяя это к преобразованному интегралу из уравнения (3), получаем  $u_j = jh$  для всех  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  с  $h = 1/n$ . Следовательно,

$$C(s) \approx \frac{1}{3n} \left[ 0^{s-1} f(-\ln(0)) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} u_{2j}^{s-1} f(-\ln(u_{2j})) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} u_{2j-1}^{s-1} f(-\ln(u_{2j-1})) + 1^{s-1} f(-\ln(1)) \right] \quad (5)$$

Основная формула правила Симпсона делит интервал интегрирования  $[a, b]$  на две части. Чтобы применить составное правило Симпсона, интервал  $[a, b]$  должен быть разбит на четное число подинтервалов  $n = 2m$ . Тогда

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}.$$

### 3. Численный метод двойного преобразования Лапласа

Мы определяем следующую технику двойного преобразования для инверсии преобразования Лапласа [9]:

$$\tilde{C}(s) = \mathcal{L} \{ \mathcal{L}^{-1} \{ C(s) \} \} \quad (6)$$

Это определение будет использоваться для оценки точности инверсии преобразования Лапласа, когда его аналитическое решение неизвестно.

После применения преобразования Лапласа задача переходит в область Лапласа и представляется как функция от  $s$ , а не от  $t$ .

Хотя вычисления в области Лапласа могут быть проще, оставлять решение в этой области, как правило, нецелесообразно. Для преобразования результата обратно во временную область применяются обратные преобразования Лапласа.

Когда аналитический ответ неизвестен, трудно оценить точность численного преобразования. Более того, трудно оценить, улучшает ли изменение метода или ухудшает точность инверсии. Используются следующие шаги:

1. Начинаем с доменной функции Лапласа  $C(s)$ ;
2. Вычисляется численная инверсия с использованием заданного набора параметров. В этом случае мы

будем контролировать уровень точности и количество членов аппроксимации. Установив уровень точности  $N_1$ , мы получим

$$\hat{f}_{N_1}(t) = \mathcal{L}_{N_1}^{-1} \{ C(s) \}; \quad (7)$$

3. Используется численное преобразование Лапласа для  $\hat{f}_{N_1}(t)$ , в результате чего

$$\mathcal{L} \{ \hat{f}_{N_1}(t) \} = \tilde{C}_{N_1}(s); \quad (8)$$

4. Сравниваются функции  $C(s)$  и  $\tilde{C}_{N_1}(s)$  и определяется функция ошибки:

$$\varepsilon_{N_1}(s) = |C(s) - \tilde{C}_{N_1}(s)|; \quad (9)$$

5. Повторяется процесс с другим уровнем точности  $N_2$ ;

6. Сравниваются  $\varepsilon_{N_1}(s)$  и  $\varepsilon_{N_2}(s)$ . Уровень точности, обеспечивающий меньшие погрешности, является более высоким, а разница между функциями погрешности может дать количественную оценку улучшения точности результата при увеличении уровня точности и добавлении дополнительных значащих цифр.

Для проверки и улучшения решения инверсии, полученного с помощью алгоритма Гавера-Стефеста, используется численное прямое преобразование Лапласа, которое сравнивается с исходным преобразованием. Численное прямое преобразование Лапласа реализуется в работе [9] с использованием составного правила Симпсона. [2]. Для обеспечения высокой точности мы использовали вычисления с увеличенным количеством подинтервалов.

### 4. Тестирование алгоритмов численной инверсии с произвольной точностью

В данной демонстрации применяются обратные преобразования Лапласа тестовых функций (табл. 1) для различных уровней численной точности. Дано  $C(s)$ , требуется найти  $f(t)$ , чтобы выполнялись следующие условия:

$$C(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (10)$$

**Пример 1.** Найти  $\tilde{f}_{01} = \mathcal{L}^{-1} \{ C_{01}(s) \}$ , где

$$C_{01}(s) = 1 / (1 + s/\beta)^\alpha \quad (\beta > 0 \text{ и } \alpha > 0). \quad (11)$$

Соответственно

$$f_{01}(t) = \beta^\alpha \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} e^{-t\beta}, \quad (12)$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – Гамма-функция.

Благодаря расширенной точности вычислений мы достигли более высокой точности численного инвертирования функции  $C_{01}(s) = 1/(1+s/\beta)^\alpha$ . Точная инверсия имеет вид  $f_{01}(t) = \beta^\alpha \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} e^{-t\beta}$ .

Табл. 1. Преобразования Лапласа и обратные преобразования для тестовых функций, используемых в численных расчетах

№	$C(s)$	$f(t)$	Тип функции	Алгоритм преобразования
1.	$\frac{1}{(1+s/\beta)^\alpha}$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}$	Гамма распределение	$\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}, \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}\}$
2.	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s t^{\alpha-1} e^{-t} dt$	Аналитическое решение неизвестно	Неполная Гамма-функция	$\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}, \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}\}$
3.	$\exp(-as^\alpha)$	$\delta(t-a)$ , если $a=1$	Сдвинутая дельта функция Дирака	$\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}, \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}\}$
4.	$\sum_{i=1}^2 \frac{p_i \mu_i}{\mu_i + s}$	$\sum_{i=1}^2 p_i \mu_i e^{-\mu_i t}$	Гиперэкспоненциальное распределение	$\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}, \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}\}$
5.	$\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda[1-B^*(s)]}$	Аналитическое решение неизвестно	$W_q(t)$ в M/G/1 модели	$\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}, \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C(s)\}\}$

Результаты, представленные на рис. 1, соответствуют параметрам  $\beta = 1$  и  $\alpha = 20$ , и иллюстрируют недостаточную точность приближения для уровня двойной точности ( $N = 16$ ). Численная инверсия также оценивалась с учетом расширенной точности и числа членов разложения,  $(N, L) = (32, 32)$ .

На рис. 2 представлены два скриншота для той же функции, что и на рис. 1. Мы наблюдаем значительное улучшение результата при увеличении точности до 256 знаков, с ошибкой порядка  $10^{-73}$ .

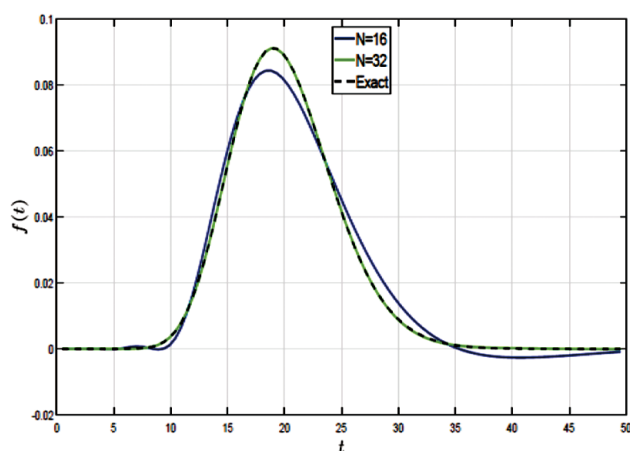


Рис. 1. Обратное преобразование Лапласа функции  $C_{01}(s) = 1/(1+s/\beta)^\alpha$  оценивается с двойной и повышенной точностью. Точное и численное решение с уровнем точности  $N = 32$  визуально неразличимы

Существует множество примеров, когда не существует аналитического решения для обратного преобразования Лапласа. Для таких задач мы сравниваем численное решение  $\tilde{C}(s)$  после применения техники двойного преобразования (6) с исходным преобразованием Лапласа  $C(s)$ .

Сначала мы проиллюстрируем метод двойного преобразования на рис. 3 для Гамма распределения с  $\alpha = 1$  (экспоненциальное распределение) и  $\alpha = 2,5$ . Оба преобразования Лапласа и инвертирование работают очень

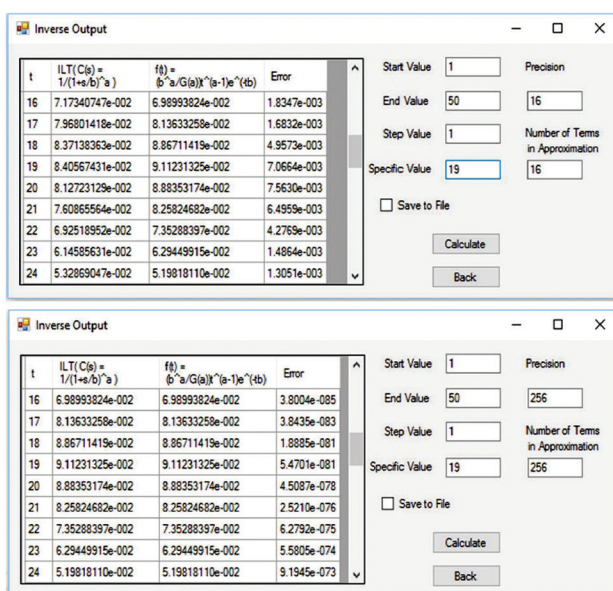


Рис. 2. Два скриншота для обратного преобразования Лапласа функции  $C_{01}(s) = 1/(1+s/\beta)^\alpha$  с двойной и повышенной точностью

хорошо. Ошибки  $E$  следующие:  $2,5 \times 10^{-5}$  и  $7,45 \times 10^{-4}$ , соответствуют графикам в левой и правой частях.

## 5. Численное обратное преобразование Лапласа неполной Гамма функции

Следующий пример значительно отличается от предыдущего, поскольку мы не можем выразить обратное преобразование Лапласа аналитически. Нижняя неполная Гамма функция  $P$  и верхняя неполная Гамма функция  $Q$  определяются как

$$P(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad (13)$$

$$Q(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (14)$$



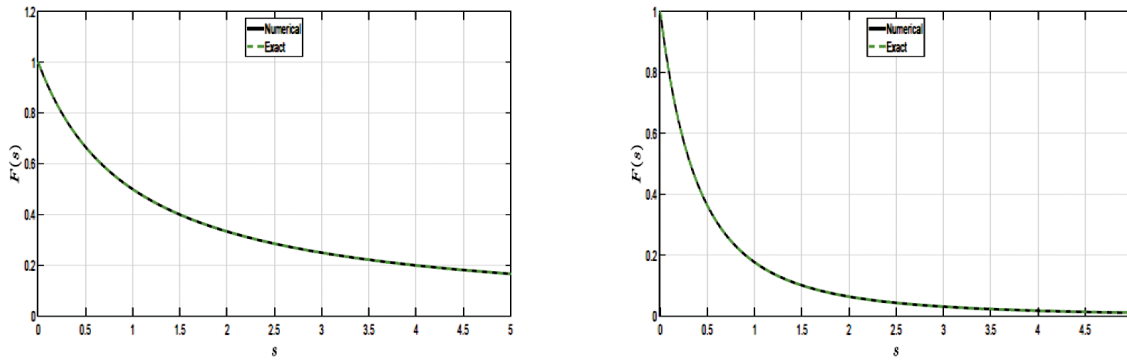


Рис. 3. Исходное преобразование Лапласа  $C_{01}(s) = 1/(1+s/\beta)^\alpha$ ; вычисляется его численная аппроксимация  $\tilde{C}_{01}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{1/(1+s/\beta)^\alpha\}\}$ , оцененная для  $\beta = 1,0$  при значениях  $\alpha = 1,0$  (левый график) и  $\alpha = 2,5$  (правый график). Исходное и численное решение визуально неразличимы

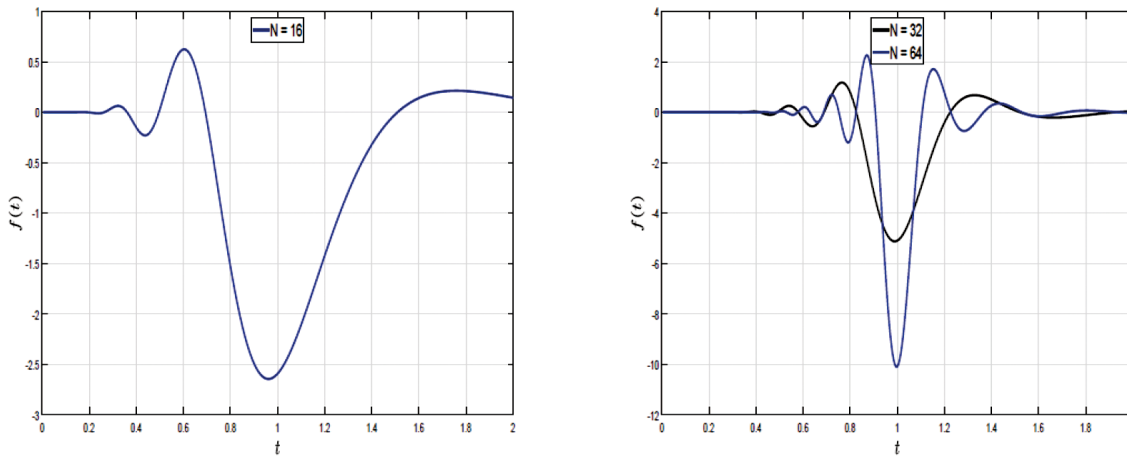


Рис. 4. Обратное преобразование Лапласа функции  $C_{02}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  с двойной точностью (левый график) и с точностью 32 и 64 знаков (правый график); важно отметить, что на графиках использованы разные масштабы

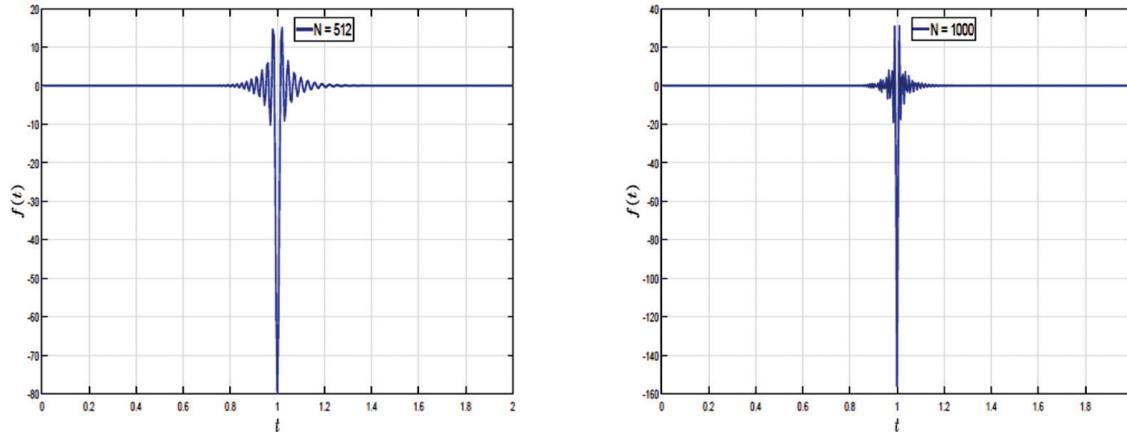


Рис. 5. Обратное преобразование Лапласа функции  $C_{02}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  на уровне точности 512 (левый график) и 1000 (правый график). Следует отметить, что на двух графиках используются разные масштабы

Мы использовали нормализованное определение неполной Гамма функции, где  $P(\alpha, x) + Q(\alpha, x) = 1$ .

**Пример 2.** Определим  $\tilde{f}_{02}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C_{02}(s)\}$  и  $\tilde{C}_{02}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C_{02}(s)\}\}$ , где

$$C_{02}(s) = P(\alpha, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (15)$$

Мы получили аппроксимацию (рис. 4) для инвертирования функции (15) с параметром  $\alpha = 1,0$ .

Точное решение обратного преобразования Лапласа имеет вид  $-\delta(t-1)$ , где  $\delta(t)$  дельта функция Дирака (16).

Улучшения можно достичь при увеличении числа знаков  $N$ , начиная с двойной точности (рис. 4, левый график) и до точности 32 и 64 знаков (рис. 4, правый график).

Количество членов в аппроксимации соответствует уровню точности,  $L=N$ . Для более точной оценки используются уровни точности 500 и 1000, как показано на рис. 5.

Оригинал  $C_{02}(s)$  сравнивается с численным решением  $\tilde{C}_{02}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C_{02}(s)\}\}$ , полученным после двойного преобразования. Таким образом,  $\tilde{f}_{02}(t)$  вычисляется как численная инверсия  $C_{02}(s)$ . Затем преобразование Лапласа  $\tilde{C}_{02}(s)$  от  $\tilde{f}_{02}(t)$  сравнивается с исходной функцией  $C_{02}(s)$ . Исходное преобразование Лапласа  $C_{02}(s)$  (Exact) и численная аппроксимация (Numerical) этого двойного преобразования показаны на рис. 6. Использованы следующие параметры:  $\alpha = 0,5; 1; 3$  и  $5$ .

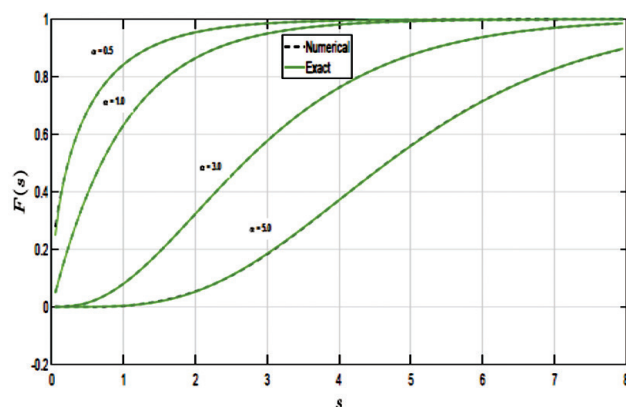


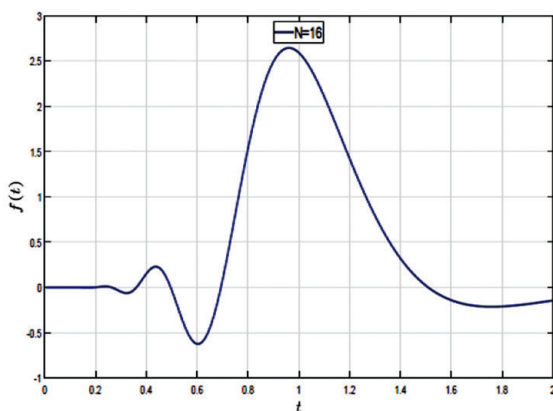
Рис. 6. Неполная Гамма функция  $C_{02}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ ; вычисляется ее численная аппроксимация

$\tilde{C}_{02}(s) = \mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s t^{\alpha-1} e^{-t} dt\right\}\right\}$  для значений  $\alpha = 0,5; 1; 3$  и  $5$ .

## 6. Аппроксимация дельта функции Дирака

Дельта функцию Дирака [5] можно условно представить как функцию на вещественной прямой, которая равна нулю везде, кроме начала координат, где она бесконечна,

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (16)$$



и которая также ограничена, чтобы удовлетворять тождеству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (17)$$

Это всего лишь эвристическая характеристика. Дельта Дирака не является функцией в традиционном смысле, поскольку ни одна функция, определенная на вещественных числах, не обладает такими свойствами. Эта функция может быть строго определена либо как распределение, либо как мера.

Отметим, что дельта функция Дирака может быть определена как предел (в смысле распределений) последовательности нуль-центрированных нормальных распределений

$$\delta_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{a^2}}, \quad a \rightarrow 0. \quad (18)$$

Преобразование Лапласа дельта функции определяется как [5]

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-a) dt = e^{-as}, \quad (19)$$

что согласуется с определением преобразования Лапласа для  $\delta(t-a)$  как  $e^{-as}$ .

**Пример 3.** Н а й т и  $\tilde{f}_{03}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C_{03}(s)\}$  и  $\tilde{C}_{03}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C_{03}(s)\}\}$ , где

$$C_{03}(s) = \exp(-as^\alpha) \quad a > 0 \text{ и } \alpha \in (0,1). \quad (20)$$

Выражение обратного преобразования Лапласа в терминах стандартных математических функций неизвестно. Мы можем работать с обратным преобразованием Лапласа и методом двойного преобразования, включая дельта функцию Дирака и ее сдвинутую форму.

Итак, если  $a=1$ , то  $f(t)=\delta(t-a)$ , где  $\delta(t)$  дельта функция Дирака.

Пакет Математика дает численное значение обратного преобразования Лапласа для  $a=0,5$  и  $\alpha=0,5$ :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\exp(-as^\alpha)\} = \frac{0.14104739588693907 \exp(-0.0625/t)}{t^{3/2}}. \quad (21)$$

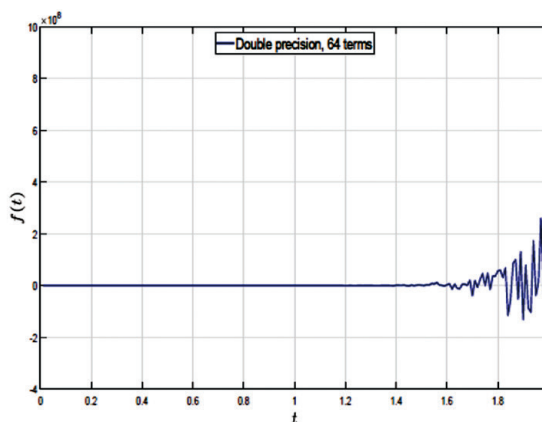


Рис. 7. Аппроксимация дельта функции Дирака с параметром  $a = 1$ , вычисленная с двойной точностью.

Уровень точности  $N$  знаков и количество членов разложения  $L$  (16, 16) для левого графика и (16, 64) для правого графика.

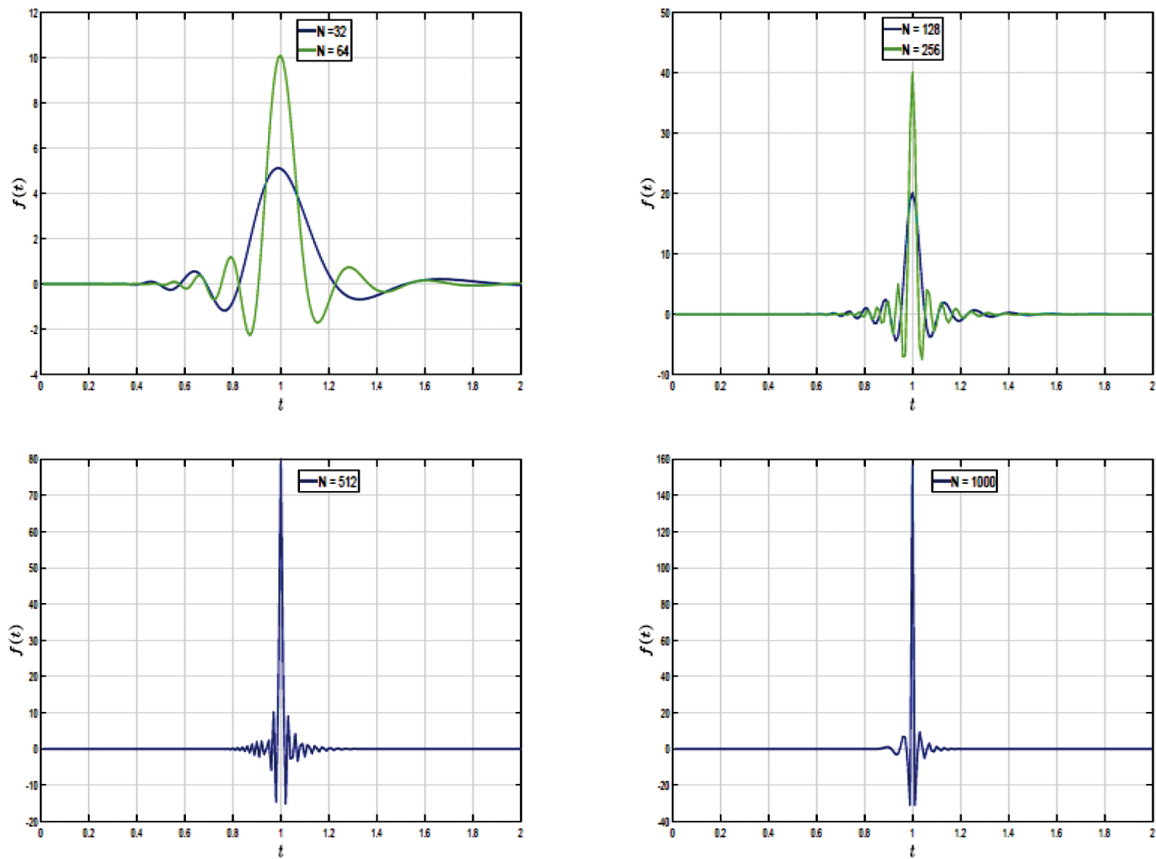


Рис. 8. Аппроксимация дельта функции Дирака,  $a = 1$ ; уровень точности  $N$  и количество членов  $L$  равны,  $L=N$ : 32, 64, 128, 256, 512 и 1000; обратите внимание на различия в масштабах на четырех графиках

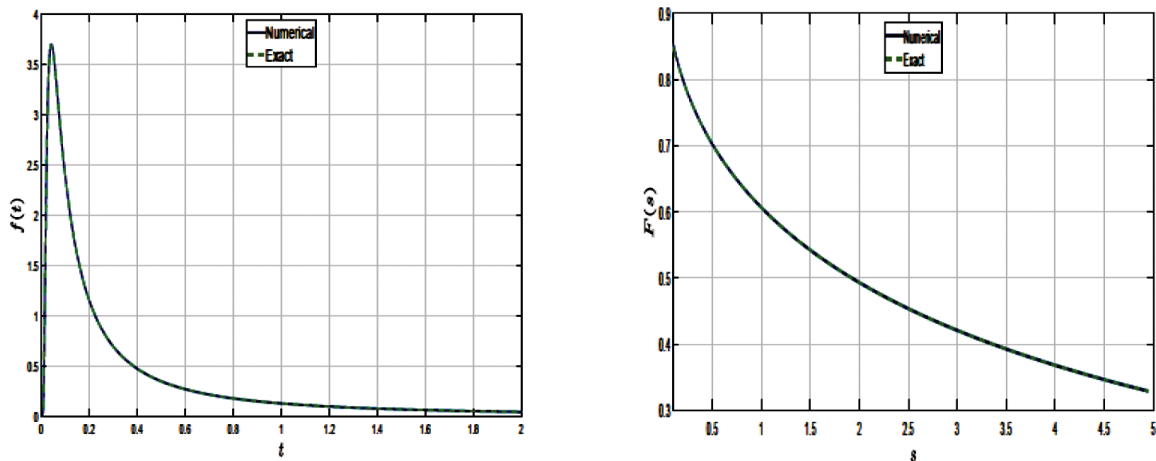


Рис. 9. Исходное преобразование Лапласа  $C_{03}(s) = \exp(-as^a)$ ; вычисляется его обратное преобразование (левый график) и численная аппроксимация  $\tilde{C}_{03}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{\exp(-as^a)\}\}$  (правый график)

Численное инвертирование преобразования Лапласа  $C_{03}(s) = e^{-as^a}$ , как известно, эквивалентно аппроксимации дельта функции Дирака. На рис. 7 показана аппроксимация дельта функции Дирака с параметром  $a = 1$ , вычисленная с двойной точностью.

На левом графике используется одинаковое количество членов разложения и уровня точности,  $L=N$ . Эта аппроксимация принимает отрицательные значения, в то время как дельта-функция строго положительна.

На правом графике  $N = 16$  и  $L = 64$ . При рассмотрении численной инверсии важно обратить внимание на точность в зависимости от количества членов разложения и уровня точности. Мы сравниваем инверсии с помощью реализации Гавера-Стефеста и наблюдаем, как повышается точность инверсий при увеличении числа членов разложения и уровня точности (знаков). Однако существует ограничение на добавление дополнительных членов [12]. При увеличении числа членов разложения

до  $L = 64$  мы обнаруживаем, что численная инверсия становится неустойчивой и в нашей функции преобразует численная ошибка (правый график).

Использование расширенной точности (рис. 8) позволяет преодолеть численные ограничения, которые возникают при работе с двойной точностью. Таким образом, мы можем использовать большее количество термов. В этих примерах используется одинаковое количество членов разложения и уровня точности,  $L=N$ . Для повышения точности аппроксимации мы увеличили число знаков  $N$  до 32, 64, 128, 512 и 1000.

На рис. 9 показаны обратное преобразование Лапласа (левый график) и численное двойное преобразование Лапласа (правый график) для  $C_{03}(s)=\exp(-as^\alpha)$ , оцененные для  $a=0,5$  и  $\alpha=0,5$ . Аналитическое решение обратного преобразования Лапласа, соответствующее (21), представлено на графике как точное. Аппроксимация дана с двойной точностью, а погрешности равны  $E=6,6 \times 10^{-4}$  и  $1,3 \times 10^{-2}$ , соответственно для левого и правого графиков.

На рис. 10 представлен скриншот инверсии преобразования Лапласа для  $C_{03}(s)=\exp(-as^\alpha)$ , оцененной для тех же  $a$  и  $\alpha$  с уровнем точности 64. Отметим, что точность аппроксимации улучшилась, и погрешность составила порядка  $10^{-18}$ .

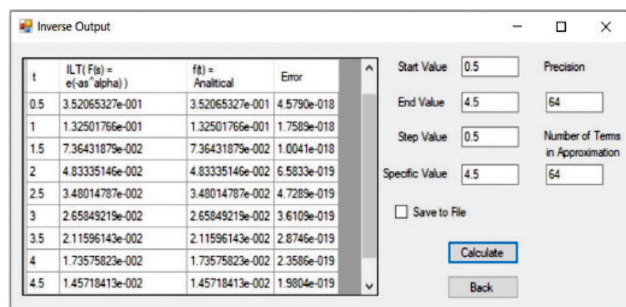


Рис. 10. Скриншот для обратного преобразования Лапласа функции  $C_{03}=\exp(-as^\alpha)$ , оцененного для  $a=0,5$  и  $\alpha=0,5$ , с уровнем точности 64 знака

В табл. 2 показана погрешность  $\epsilon_{03}(s)=|C_{03}(s)-\tilde{C}_{03}(s)|$  для численного приближения  $\tilde{C}_{03}(s)=\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{\exp(-as^\alpha)\}\}$ , оцененная для  $a=0,5$  и  $\alpha=0,5$ , при различных уровнях точности 16 и 64.

**Табл. 2. Численная погрешность  $\epsilon_{03}(s)=|C_{03}(s)-\tilde{C}_{03}(s)|$  для численного приближения  $\tilde{C}_{03}(s)=\mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{\exp(-as^\alpha)\}\}$ , оцененная для  $a=0,5$  и  $\alpha=0,5$ , при различных уровнях точности: 16 и 64 знаков.**

$s$	Численное решение	Ошибка, $L=16$	Ошибка, $L=64$
0,5	0,7022	$9,23 \times 10^{-6}$	$2,76 \times 10^{-6}$
1	0,6065	$4,03 \times 10^{-7}$	$9,13 \times 10^{-10}$
2	0,4931	$6,81 \times 10^{-7}$	$3,51 \times 10^{-17}$
3	0,4206	$4,38 \times 10^{-7}$	$3,69 \times 10^{-23}$
4	0,3679	$7,82 \times 10^{-8}$	$1,97 \times 10^{-24}$
5	0,3269	$2,25 \times 10^{-7}$	$3,94 \times 10^{-25}$

## 7. Распределение времени ожидания в M/G/1

Модель M/G/1 предполагает пуассоновское поступление с интенсивностью  $\lambda$  и произвольным распределением времени обслуживания  $S=1/\mu$ , где  $\mu$  – интенсивность обслуживания. Интенсивность трафика  $\rho=\lambda/\mu=\lambda S<1$ .

Важно выполнение условия  $\rho<1$ , иначе система становится нестабильной.

Коэффициент вариации времени обслуживания  $c_s=\sigma/b$ , где  $b=E[S]$  – среднее время и  $\sigma$  – стандартное отклонение.

Если  $c_s=1$ , мы имеем модель M/M/1 с преобразованием Лапласа-Стилтьеса времени обслуживания

$$B^*(s)=\mu/(\mu+s).$$

Рассмотрим функцию плотности вероятности ФПВ (probability density function, PDF) и кумулятивную функцию распределения КФР (cumulative distribution function, CDF).

Для модели M/M/1, ФПВ и КФР времени ожидания определяются соответственно [17]:

$$w_q(t)=\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t>0, \text{ ФПВ, M/M/1, } (22)$$

$$W_q(t)=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0, \text{ КФР, M/M/1. } (23)$$

Если коэффициент  $c_s>1$ , то время ожидания можно эффективно аппроксимировать гиперэкспоненциальным распределением, используя для него определение по параллельным стадиям.

Пусть время обслуживания  $S$  соответствует гиперэкспоненциальному распределению  $H_2$ , ФПВ которого определяется выражением (33), а КФР задается формулой (34).

Преобразование Лапласа для ФПВ представлено в уравнении (32), что позволяет получить преобразование Лапласа для КФР как

$$F(s)=C(s)/s=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^2\frac{p_i\mu_i}{\mu_i+s}. \quad (24)$$

Первая и вторая производные от  $C(s)$  вычисляются следующим образом:

$$\frac{dC(s)}{ds}=-\sum_{i=1}^2\frac{p_i\mu_i}{(\mu_i+s)^2}, \quad (25)$$

$$\frac{d^2C(s)}{ds^2}=2\sum_{i=1}^2\frac{p_i\mu_i}{(\mu_i+s)^3}. \quad (26)$$

Математическое ожидание  $E[S]=-\frac{dC(s)}{ds}\big|_{s=0}$  и дисперсия  $Var[S]=E[S^2]-(E[S])^2$  случайной переменной  $S$  следующие:

$$E[S]=\frac{p_1}{\mu_1}+\frac{p_2}{\mu_2}, \quad (27)$$



$$Var[S] = \frac{p_1(2-p_1)}{\mu_1^2} + \frac{p_2(2-p_2)}{\mu_2^2} - \frac{2p_1p_2}{\mu_1\mu_2}, \quad (28)$$

$$E[S^2] = \frac{d^2 C(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{2p_1}{\mu_1^2} + \frac{2p_2}{\mu_2^2}. \quad (29)$$

Чтобы удовлетворить условие (27), пусть

$$\mu_1 = 2p_1 E[S], \quad \mu_2 = 2p_2 E[S]. \quad (30)$$

Подставляя (27), (29) и (30) в  $c_s^2 = \frac{(\sigma[S])^2}{(E[S])^2} = \frac{E[S^2] - (E[S])^2}{(E[S])^2}$ , получим параметры гиперэкспоненциального распределения [6]:

$$p_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{c_s^2 - 1}{c_s^2 + 1}} \right), \quad p_2 = 1 - p_1, \quad \mu_1 = \frac{2p_1}{E[S]}, \quad \mu_2 = \frac{2p_2}{E[S]}. \quad (31)$$

## 8. Решение задач производительности в модели M/G/1.

**Пример 4.** Рассматриваются два варианта модели M/G/1.

Вариант 1. Приведено преобразование Лапласа для ФПВ распределения времени обслуживания.

Найти  $\tilde{f}_{04}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C_{04}(s)\}$  и  $\tilde{C}_{04}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{C_{04}(s)\}\}$ , где

$$C_{04}(s) = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i \mu_i}{\mu_i + s}, \quad (0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1, p_1 + p_2 = 1), \quad (32)$$

$$f_{04}(t) = \sum_{i=1}^2 p_i \mu_i e^{-\mu_i t} \quad (t > 0). \quad (33)$$

Вариант 2. Идентичен варианту 1, но теперь для КФР.

Найти  $\tilde{F}_{04}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_{04}(s)\}$  и  $\tilde{F}_{04}(s) = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}\{F_{04}(s)\}\}$ , где

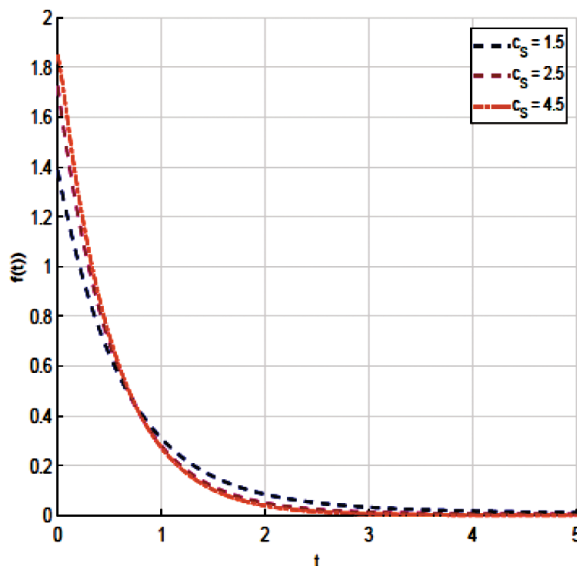


Рис. 11. Обратное преобразование Лапласа функции  $C_{04}(s)$ , оцененной для ФПВ (левый график), и  $(C_{04}(s))/s$ , оцененной для КФР (правый график); модель M/G/1 имеет  $\lambda=0,8$ , матожидание  $E[S]=1,0$ , коэффициенты вариации  $c_s = 1,5; 2,5$  и  $4,5$ .

$$F_{04}(s) = C_{04}(s)/s = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^2 \frac{p_i \mu_i}{\mu_i + s}, \quad (34)$$

$$F_{04}(t) = 1 - \sum_{i=1}^2 p_i e^{-\mu_i t}, \quad (t > 0). \quad (35)$$

Таким образом, было рассмотрено несколько вариантов для модели M/G/1. Первый – преобразование Лапласа для ФПВ распределения времени обслуживания и второй, идентичный, для КФР. Модель M/G/1 описывается с помощью  $\lambda=0,8$ , матожидание  $E[S]=1,0$ , коэффициент вариации  $c_s = 1,5; 2,5$  и  $4,5$ .

На рис. 11 показано обратное преобразование Лапласа  $C_{04}(s)$ , оцененное для ФПВ (левый график), и обратное преобразование Лапласа  $(C_{04}(s))/s$  оцененное для КФР (правый график). Погрешности составляют  $E=3,52 \times 10^{-5}$  и  $E=1,2 \times 10^{-5}$  соответственно.

## 9. Распределение времени ожидания в модели M/D/1

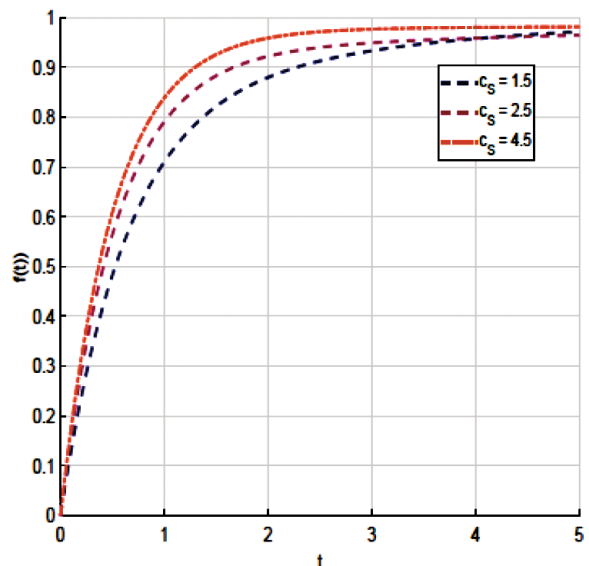
Пусть время обслуживания имеет плотность распределения  $E_k$  со средним  $1/\mu$  и ФПВ

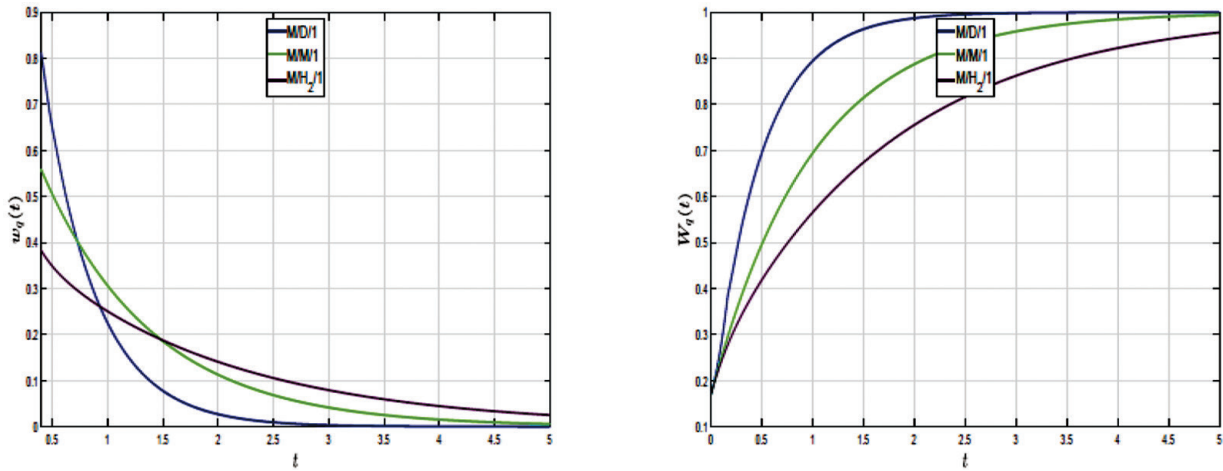
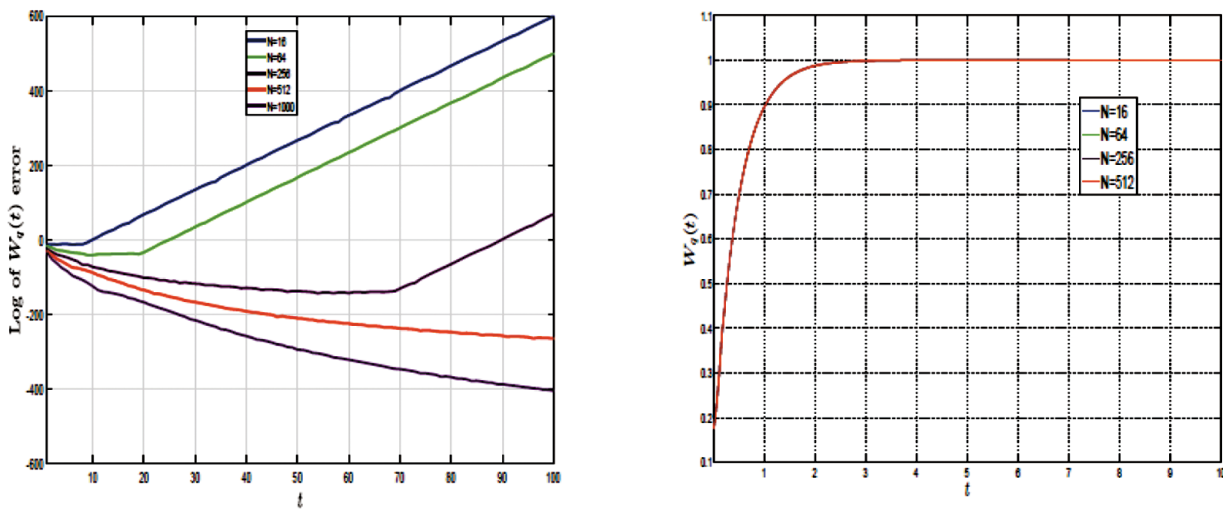
$$f(t) = \frac{(\mu k)^k t^{k-1} e^{-k\mu t}}{(k-1)!} \quad (0 < t < \infty). \quad (36)$$

Преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$B^*(s) = \left( \frac{\mu k}{s + \mu k} \right)^k. \quad (37)$$

Плотность распределения  $E_k$  можно трактовать как распределение Эрланга с параметром  $k$ . Модель M/D/1 можно рассматривать как частный случай M/E<sub>k</sub>/1 так как когда  $k \rightarrow \infty$  и  $\mu \rightarrow \infty$  таким образом, что  $k\mu^{-1} \rightarrow b$  ( $0 < b < \infty$ ), время обслуживания  $E_k$  детерминировано с константой  $b$ . Интенсивность трафика  $\lambda b < 1$ . Теперь  $B^* \rightarrow e^{-bs}$  как




 Рис. 12. ФПВ и КФР времени ожидания для  $M/M/1$ ,  $M/D/1$  и  $M/H_2/1$ 

 Рис. 13.  $M/D/1$ : ошибки  $\text{Log } W_q(t)$  (левый график) и оценка для  $W_q(t)$  по инверсии Гавера-Стефеста (правый график)

$k \rightarrow \infty$ . ФПР времени ожидания имеет преобразование Лапласа [17]:

$$w_q(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda[1 - e^{-bs}]}. \quad (38)$$

**Пример 5.** Численно оценить распределение времени ожидания  $W_q(t)$  для различных моделей обслуживания в модели  $M/G/1$ .

Преобразование Лапласа для  $W_q(t)$  задается уравнением преобразования Поллачека-Хинчина (Р-Х) [17]

$$W_q(s) = \frac{w_q(s)}{s} = \frac{(1-\rho)}{s - \lambda[1 - B^*(s)]}, \quad \text{где} \quad (39)$$

$$B^*(s) = \int_0^\infty dF(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \quad (40)$$

$B^*(s)$  – это преобразование Лапласа-Стилтьеса функции  $F(t)$ , где  $F(t)$  является КФР времени обслуживания,  $\lambda$  и  $b$  – средние значения интенсивности прибытия и времени обслуживания соответственно,  $\rho = \lambda b$  – интенсивность трафика.

Как и в случае с  $M/G/1$ , рассматриваются следующие модели обслуживания:

$$M / M / 1: \quad B^*(s) = \frac{\mu}{s + \mu}, \quad (41)$$

$$M / E_k / 1: \quad B^*(s) = \left( \frac{\mu}{s + \mu} \right)^k, \quad (42)$$

$$M / D / 1: \quad B^*(s) = e^{-bs}, \quad (43)$$

$$M / H_2 / 1: \quad B^*(s) = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i \mu_i}{\mu_i + s}. \quad (44)$$

Для модели  $M/H_2/1$  интенсивность поступления  $\lambda=5,0$ . Распределение времени обслуживания  $H_2$  оценивается для  $\mu=6$ ,  $b=1/\mu$  и  $c_s=1,5$ . Для этой модели интенсивность трафика  $\rho=\lambda/\mu$ , а КФР в момент времени 0 имеет вид  $F(0)=1-\rho$ . Алгоритм Гавера-Стефеста использован для инвертирования преобразования Лапласа для  $B^*(s)$ , которое определяется с помощью (39). Для моделей

$M/D/1$ ,  $M/H_2/1$  и  $M/M/1$ , ФПВ и КФР времени ожидания показаны на рис. 12.

Для модели  $M/D/1$  время обслуживания детерминировано и равно значению  $b$ . Для детерминированного обслуживания  $B^*(s)$  определяется формулой (43). Мы сравниваем  $W_q(t)$ , вычисленное путем инвертирования в (39), с  $W_q(t)$ , аналитически полученным в [17]:

$$W_q(t) = (1-\rho) \sum_{i=0}^{\lfloor t/b \rfloor} e^{-\lambda(ib-t)} \frac{(ib-t)^i}{i!} \lambda^i, \quad (45)$$

где  $\lfloor x \rfloor$  – наибольшее целое число, меньшее или равное  $x$ .

На рис. 13 показаны результаты для модели  $M/D/1$  при  $\lambda = 5,0$ ,  $\mu = 6,0$  ( $b=1/\mu$  и  $\rho=\lambda/\mu = 0,8$ ). На рисунке показаны ошибки, по аналитической оценке, в логарифмическом масштабе  $\text{Log} W_q(t)$  (левый график). Оценка для  $W_q(t)$  (правый график) получена с помощью алгоритма Гавера-Стефеста.

Нам не удалось получить численное решение для следующих уровней точности:  $N = 16$ , если  $t > 10$ ;  $N = 64$ , если  $t > 26$ ;  $N = 256$ , если  $t > 90$ . Только для  $N = 512$  и  $N = 1000$  мы получаем правильный результат на всем диапазоне  $0 < t \leq 100$ .

Инверсии  $W_q(t)$  представлены на правом графике. Даже при использовании двойной точности мы получаем правильное решение и не можем визуальнo различить кривые с разной точностью для  $N = 16$ ; 64; 256 и 512.

На рис. 14 для модели  $M/D/1$  показаны численные результаты распределения времени ожидания  $W_q(t)$  с двойной точностью ( $N = 16$ ) по аналитическому решению (45) и по инверсии Гавера-Стефеста. В аналитическом решении доминируют шумы после  $t > 9$ .

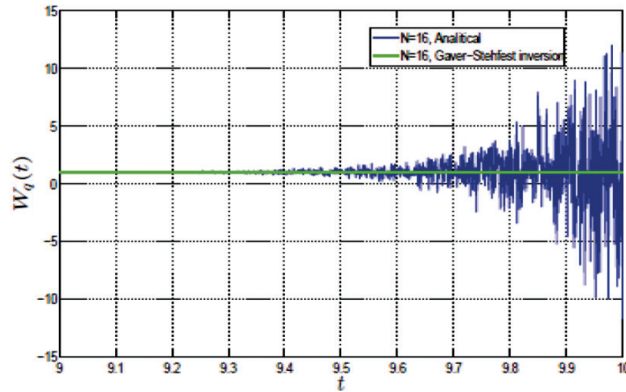


Рис. 14.  $W_q(t)$  для модели  $M/D/1$  КФР времени ожидания получена аналитически, а также с использованием инверсии Гавера-Стефеста. В аналитическом решении доминируют шумы после  $t > 9$ .

Наиболее распространенным распределением времени обслуживания является экспоненциальное, и в этом случае распределение времени ожидания можно получить в аналитической форме. Для более общих случаев аналитические решения уравнения преобразования (Р-Х) для модели  $M/G/1$  являются математически неразрешимыми.

Следующий конкретный пример используется для сравнения аналитического решения и инверсии Гавера-

Стефеста. Рассмотрим систему  $M/H_2/1$  с распределением времени обслуживания [7]

$$B(t) = \frac{1}{4} \lambda e^{-\lambda t} + \frac{3}{4} (2\lambda) e^{-2\lambda t}, \quad (46)$$

где  $\lambda$  – интенсивность поступления,  $b=5/(8\lambda)$  и  $\rho=\lambda b=5/8$ . Для численных решений мы использовали  $\lambda=5$ .

Соответствующее преобразование Лапласа

$$B^*(s) = \left(\frac{1}{4}\right) \frac{\lambda}{\lambda+s} + \left(\frac{3}{4}\right) \frac{2\lambda}{2\lambda+s}. \quad (47)$$

Используя  $B^*(s)$  и уравнение преобразования (Р-Х) (10.4), получим  $W_q(s)$  и  $W_q(t)$  для плотности времени ожидания [7]:

$$w_q^*(s) = (1-\rho) \left[ 1 + \frac{\lambda/4}{(3/2)\lambda+s} + \frac{3\lambda/4}{(1/2)\lambda+s} \right], \quad (48)$$

$$w_q(t) = \frac{3}{8} u_0(t) + \frac{3\lambda}{32} e^{-(3/2)\lambda t} + \frac{9\lambda}{32} e^{-(1/2)\lambda t} \quad t \geq 0, \quad (49)$$

где  $u_0(t)$  – единичная импульсная функция.

Аналитическое решение для КФР времени ожидания может быть легко найдено как:

$$W_q^*(s) = (1-\rho) \left[ \frac{1}{s} + \frac{\lambda/4}{((3/2)\lambda+s)s} + \frac{3\lambda/4}{((1/2)\lambda+s)s} \right], \quad (50)$$

$$W_q(t) = (1-\rho) \left[ \frac{8}{3} - \frac{1}{6} e^{-(3/2)\lambda t} - \frac{3}{2} e^{-(1/2)\lambda t} \right], \quad t \geq 0. \quad (51)$$

На рис. 15 показаны численные результаты распределения времени ожидания для  $M/H_2/1$  по аналитическому решению и инверсии Гавера-Стефеста для ФПВ (левый график) и КФР (правый график). Отличить визуальнo аналитические результаты от результатов инверсии Гавера-Стефеста практически невозможно.

## 10. Требования к точности и достоверности анализа $M/D/1$ с большим временем ожидания

Результаты аппроксимации двойного преобразования для распределения времени ожидания  $W_q(s)$  в  $M/D/1$  показаны на рис. 16 и 17. Для преобразования Лапласа при инверсии используется техника двойного преобразования

$$\tilde{W}_q(s) = \mathcal{L} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ W_q(s) \} \right\}. \quad (52)$$

Точное решение  $W_q(s)$  сравнивается с  $\tilde{W}_q(s)$  после применения метода двойного преобразования. Инверсия преобразования Лапласа реализована алгоритмом Гавера-Стефеста, а для численного прямого преобразования Лапласа используется составное правило Симпсона.

Аппроксимация для распределения времени ожидания в  $M/G/1$  удобна при малой интенсивности потока и небольших значениях  $t$ , обеспечивая подходящую аппроксимацию с двойной точностью.

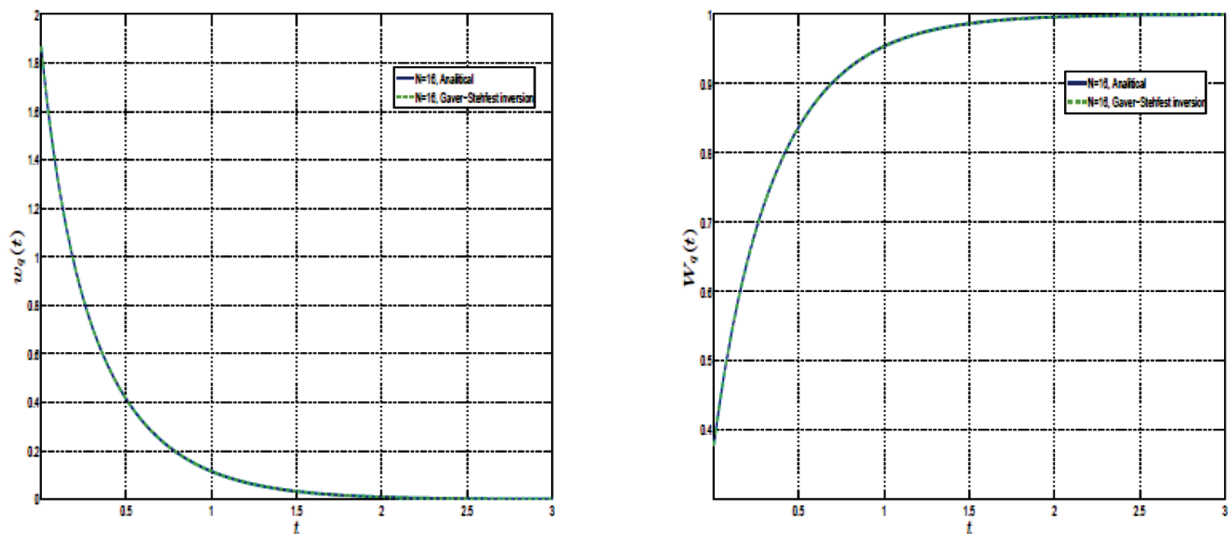


Рис. 15. Распределение времени ожидания для  $M/H_2/1$  по аналитическому решению и инверсии Гавера-Стефеста для ФПВ (левый график) и КФР (правый график)

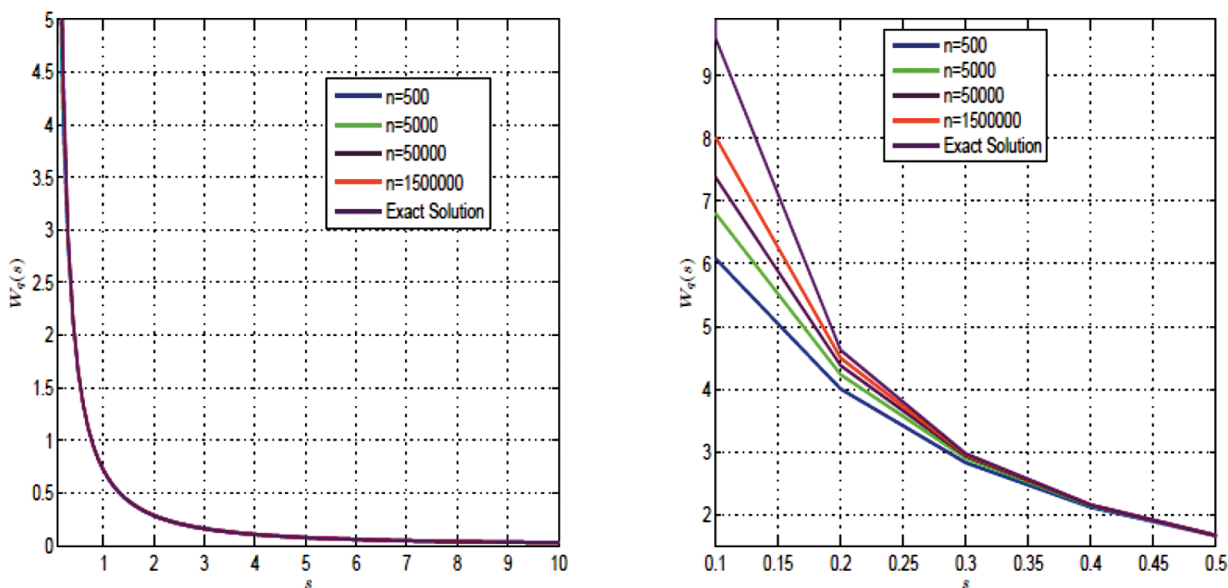


Рис. 16. Аппроксимация двойного преобразования для распределения времени ожидания  $W_q(s)$  в  $M/D/1$ : двойная точность ( $N = 16$ ) с различным количеством подинтервалов  $n = 500, 5000, 50000, 150000$  и диапазонах  $[0,1; 10]$  (левый график) и  $[0,1; 5]$  (правый график)

Фигуры соответствуют широкому диапазону малых параметров преобразования Лапласа  $s$ , соответствующих большому значению  $t$ .

На рис. 16 приведены кривые для уровня двойной точности ( $N = 16$ ) с различным количеством подинтервалов  $n = 500, 5000, 50000$  и  $150000$  при вычислении преобразования Лапласа. Похоже, что для  $s$  отсутствует эффект от увеличения  $n$  на интервале  $[0,1; 10]$  (левый график), но кривые отличаются для  $s$  на меньшем интервале  $[0,1; 0,5]$  (правый график).

На рис. 17 показано влияние уровня точности  $N$ . Количество подинтервалов  $n = 500$ . При двойной точности метод работает плохо, а значительное улучшение наблюдается при увеличении уровня точности до 256.

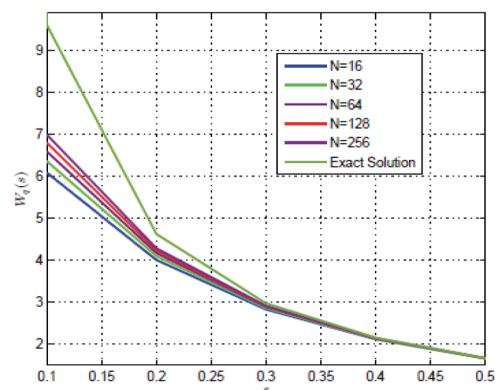


Рис. 17. Аппроксимация двойного преобразования для распределения времени ожидания  $W_q(s)$  для  $M/D/1$  с расширенной точностью вычислений, число подынтервалов  $n = 500$



## Выводы

Вычисления с произвольной точностью, также известные как расширенная точность или арифметика высокой точности, необходимы в различных областях, где стандартные вычисления с двойной точностью с плавающей запятой, которые обычно обеспечивают точность до 15-17 десятичных знаков, оказываются недостаточными.

Точность и стабильность численного преобразования Лапласа и его инверсии играют ключевую роль в ряде приложений вычислительных вероятностных моделей. В данной работе мы предложили и оценили различные численные методы реализации преобразования Лапласа и его инверсии в арифметических системах с повышенной точностью.

Рассматриваются два возможных способа выполнения преобразования. Если примеры включают функции с известными инверсиями, эффективность моделей с расширенной точностью может быть подтверждена сравнением с аналитическим решением. Наиболее реалистичные и сложные задачи включают функции с аналитически неизвестными инверсиями.

Таким образом, для поиска вычислительно эффективных методов численного преобразования Лапласа и его инверсии был предложен подход двойного преобразования. В этом подходе выполняются прямые преобразования Лапласа численно инвертированных преобразований для сравнения с исходной функцией. Численное прямое преобразование Лапласа реализуется с использованием составного правила Симпсона.

Точность может быть проверена сравнением с исходной формой преобразования Лапласа. Мы наблюдаем улучшение точности инверсий с увеличением числа членов разложения и уровня заданной точности, что приводит к более устойчивым решениям.

Вычислительная эффективность, в зависимости от уровня заданной точности, продемонстрирована на примере распределения времени ожидания в моделях  $M/G/1$ .

## Список литературы

1. Abate J., Valko P. Multi-precision Laplace transform inversion // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004. Vol. 60. Pp. 979-993.
2. Atkinson K. *An Introduction to Numerical Analysis*: 2nd ed. John Wiley & Sons, 1989.
3. Bailey D. *High-Precision Software Directory*. 2024 URL: <https://www.davidhbailey.com/dhbssoftware/> (дата обращения 04.10.2025).
4. Cohen A. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Springer, 2007.
5. Edwards C., Penney C. *Differential Equations and Boundary Value Problems*: 5th ed. Computing and Modeling, 2015.

6. Kao E. *An Introduction to Stochastic Processes*. Duxbury Press, 1997.
7. Клейнрок Л. *Теория Массового Обслуживания*. Том I. М.: Машиностроение, 1979.
8. Kreyszig E. *Advanced Engineering Mathematics*: 10th ed. John Wiley & Sons, 2011. 1280 p.
9. Krougly Z., Davison M., Aiyar S. The role of high precision arithmetic in calculating numerical Laplace and inverse Laplace transforms // *Applied Mathematics*. 2017. Vol. 8. Pp. 562-589.
10. Krougly Z., Jeffrey D. Implementation and application of extended precision in Matlab / In: N. Mastorakis et al (Eds.). *Proc. of the Applied Computing Conference ACC'09*, WSEAS Press. 2009. Pp. 103-108.
11. Krougly Z., Stanford D. Iterative algorithms for performance evaluation of closed network models // *Performance Evaluation*. 2005. Vol. 61. Pp. 41-64.
12. Krougly Z., Jeffrey D., Tsarapkina D. Software implementation of numerical algorithms in arbitrary precision / In: 15th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2013). N. Björner et al. (Eds.). IEEE Computer Society. 2014. Pp. 132-138.
13. Kuhlman K. Review of inverse Laplace transform algorithms for Laplace-space numerical approaches // *Numerical Algorithms*. 2013. Vol. 63. Pp. 339-355.
14. Kuznetsov A. On the convergence of Gaver-Stehfest algorithm // *SIAM J. Numer. Anal.* 2013. Vol. 51. Pp. 2984-2998.
15. Murli A., Rizzardi M. Algorithm 682 Talbot's method for the Laplace inversion problem // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1990. Vol. 16. Pp. 158-168.
16. Nadarajah S., Kotz S. On the Laplace transform of the Pareto distribution // *Queueing System*. 2006. Vol. 54. Pp. 243-244.
17. Shortle J., Thompson J., Gross D. et al. *Fundamentals of Queueing Theory*: 5th ed. Wiley, New York, 2018.
18. Stehfest H. Алгоритм 368: Численная инверсия преобразования Лапласа // *Communications of the ACM*. 1970. Vol. 13(1). Pp. 47-49.

## References

1. Abate J., Valko P. Multi-precision Laplace transform inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2004;60:979-993.
2. Atkinson K. *An Introduction to Numerical Analysis*: 2nd ed. John Wiley & Sons; 1989.
3. Bailey D. *High-Precision Software Directory*. (accessed 04.10.2025). Available at: <https://www.davidhbailey.com/dhbssoftware>.
4. Cohen A. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Springer; 2007.
5. Edwards C., Penney C. *Differential Equations and Boundary Value Problems*: 5th ed. Computing and Modeling; 2015.

6. Kao E. An Introduction to Stochastic Processes. Duxbury Press; 1997.

7. Kleinrock L. Queueing systems. Volume 1. Moscow: Mashinostriyeniye; 1979.

8. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics: 10th ed. John Wiley & Sons; 2011.

9. Krougly Z., Davison M., Aiyar S. The role of high precision arithmetic in calculating numerical Laplace and inverse Laplace transforms. *Applied Mathematics* 2017;8:562-589.

10. Krougly Z., Jeffrey D. Implementation and application of extended precision in Matlab. In: Mastorakis N. et al., editors. Proc. of the Applied Computing Conference ACC'09, WSEAS Press; 2009. Pp. 103-108.

11. Krougly Z., Stanford D. Iterative algorithms for performance evaluation of closed network models. *Performance Evaluation* 2005;61:41-64.

12. Krougly Z., Jeffrey D., Tsarapkina D. Software implementation of numerical algorithms in arbitrary precision. In: Bjorner N. et al., editors. 15th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC 2013). IEEE Computer Society; 2014. Pp. 132-138.

13. Kuhlman K. Review of inverse Laplace transform algorithms for Laplace-space numerical approaches. *Numerical Algorithms* 2013;63:339-355.

14. Kuznetsov A. On the convergence of Gaver-Stehfest algorithm. *SIAM J. Numer. Anal.* 2013;51:2984-2998.

15. Murli A., Rizzardi M. Algorithm 682 Talbot's method for the Laplace inversion problem. *ACM Transactions on Mathematical Software* 1990;16:158-168.

16. Nadarajah S., Kotz S. On the Laplace transform of the Pareto distribution. *Queueing System* 2006;54:243-244.

17. Shortle J., Thompson J., Gross D. et al. Fundamentals of Queueing Theory: 5th ed. Wiley (New York); 2018.

18. Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms. *Communications of the ACM* 1970;13(1):47-49.

## Сведения об авторе

**Зиновий Круглый**, Факультет Прикладной Математики, Западный Университет, Лондон, Онтарио, Канада, e-mail: zkrougly@uwo.ca.

## About the author

**Zinovi Krougly**, Department of Applied Mathematics, Western University, London, Ontario, Canada N6A5B7, e-mail: zkrougly@uwo.ca.

## Вклад автора

Исследование проведено автором самостоятельно в полном объеме.

## Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.