Перегуда А.И.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЯ, ПОДВЕРЖЕННОГО УДАРНЫМ НАГРУЗКАМ

Рассматривается математическая модель надежности, учитывающая кумулятивное накопление нагрузки изделием, вызванное воздействием циклических ударных нагрузок. Изучение процесса пересечения случайного уровня прочности накопленной нагрузкой при многократном воздействии ударных возмущений позволило получить математическую модель, которая дает возможность вычислять показатели надежности и долговечности. Полученные конечные соотношения для показателей надежности имеют простой вид, что позволяет их использовать при практических вычислениях.

Ключевые слова: *накопление повреждений, ударная нагрузка, распределение сумм случайных величин, показатель надежности, долговечность, оценка среднего значения, удар, пересечения уровня.*

Введение

В процессе эксплуатации изделий под воздействием таких факторов как повышенные температура и давление, циклические нагрузки, наличие коррозионной среды, которые приводят, например, к росту трещин усталости, и происходит старение материала. К настоящему времени в механике излома и механике материалов хорошо изучены физические процессы, приводящие к отказам оборудования.

В [1] отмечается, что к настоящему времени поведение конструкционных материалов в эксплуатационных условиях изучено не настолько хорошо, чтобы стать основой для обоснования модели кумулятивных повреждений на фундаментальных физических законах. Очевидно, что указанные задачи могут решаться без оценки количественной характеристики надежности, используя опыт эксплуатации подобных устройств в аналогичных или сходных производствах. Однако такое решение задачи без строгого математического анализа процессов функционирования и получения количественных оценок надежности и долговечности ни в коей мере нельзя считать достаточно обоснованным.

Рассматриваемый нами процесс функционирования изделия, на которое воздействуют ударные нагрузки, можно рассматривать как процесс со старением. В [2] введено понятие старения, основанное на поведении во времени функции интенсивности отказов. В частности, были определены возрастающая функция интенсивности ВФИ и убывающая функция интенсивности УФИ. Также было показано, что, если система состоит из независимых элементов с ВФИ распределением времени безотказной работы, то возникает распределение с возрастающей в среднем функцией интенсивности ВСФИ.

Часто можно получить сведения о нарастающем старении устройств, рассматривая динамику определенных параметров. Знание показателей процесса изменения параметра позволяет найти распределение наработок до отказа устройства, что, в свою очередь, дает возможность определения сроков остановки эксплуатации до его полного разрушения и последующего восстановления свойств устройства. Естественно, что при эксплуатации таких систем возникают задачи оценки количественных значений показателей их надежности и долговечности, а затем и планирование сроков остановки эксплуатации изделия [3].

К настоящему времени удовлетворительно развиты математические модели надежности изделий, к которым приложена статическая нагрузка и методы получения соответствующих показателей [4, 5]. В случае, когда кроме статической нагрузки, к изделию приложена нагрузка, имеющая случайную амплитуду и случайный период колебания, математические модели описания функционирования таких изделий становятся весьма громоздкими и получение из их анализа количественных значений для соответствующих показателей надежности и долговечности в общем случае не представляется возможным. Процесс функционирования таких изделий описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с дискретной составляющей [6]. В [7] рассмотрен асимптотический метод вычисления показателей долговечности изделия, к которому прилагаются ударные нагрузки и показано, что такой процесс является процессом с независимыми приращениями.

Изучение процессов накопления нагрузки приведено в [8], где кроме этого рассмотрены вопросы оптимизации профилактического обслуживания по критерию минимума ожидаемой стоимости.

В данной работе будет изучаться математическая модель надежности функционирования изделия, на которое воздействуют ударные нагрузки при условии, что прочность является веерным случайным процессом.

Остановимся сразу на математической постановке задачи нахождения показателей надежности и долговечности, используя математическую модель эволюции изделия, основанной на теории случайных процессов накопления.

Постановка задачи

Рассмотрим изделие, подверженное износу из-за приложенного к нему ряда импульсных воздействий, это могут быть: толчки, удары, пульсации температуры и давления, вибрации и др. В дальнейшем, не уточняя физическую природу воздействий на изделие, будем импульсные воздействия называть ударными (циклическими) нагрузками. Пусть изменение параметров изделия вызвано ударными нагрузками (ударами, толчками импульсами), проявляющимися в моменты времени $t_0,\ t_1,\ t_2,\cdots,\ t_{k+1}\geq t_k,\quad k\geq 1$. Обозначим $\tau_i\ = t_{i+1}\text{-}t_i$, $i>0$, $t_0=0$, где τ_i – случайные величины и соответствуют длинам интервалов времени между соседними приложениями к изделию ударных воздействий. Случайные величины τ_i, $i=2,3,4,\cdots$ – независимы в совокупности и распределены с одной и той же функцией распределения $F(t)$, где $F_i(t)=P(\tau_i\leq t)$.

Заметим, если случайная величина равна $\tau_1=t_1$, то возможно, что для нее будет выполняться $F_1(t)\neq F(t)=P(\tau_1\leq t)$, следовательно, величина τ_1 распределена иначе, чем все остальные величины τ_i. Таким образом, последовательность неотрицательных взаимно независимых случайных величин $\{\tau_i, i\geq 1\}$ полностью характеризуется функциями распределения $F(t)$ и $F_1(t)$.

В моменты времени $t_i, i\geq 1$ к изделию прилагаются ударные воздействия (удары), и в эти же моменты происходит скачкообразное изменение повреждения, проявляющееся в скачкообразном росте нагрузки. Каждое такое изменение нагрузки будем обозначать через θ_i – случайную неотрицательную величину, равную приращению (увеличению) значения нагрузки (износу изделия) в результате воздействия i – го ударного возмущения, $i=1,2,3,\cdots$.

Относительно случайных величин θ_i естественно предполагать, что они также независимы в совокупности, а также то, что они распределены с одной и той же функцией распределения $G(y)$, следовательно, для них будет выполняться условие $G_1(y) = G_2(y) = \cdots = G(y)$, где $G_i(y) = P(\theta_i \le y)$. Полагаем, что в промежутке между двумя соседними ударными воздействиями значение нагрузки, приложенной к изделию, не будет изменяться. Отметим, что величина θ_0 независима от последовательности случайных величин $\{\tau_i, i \ge 1\}$. В [3] отмечается, что описанный выше процесс функционирования изделия описывается ВСФИ-распределением, которое характеризуется возрастанием в среднем функции интенсивности.

Обозначим теперь через χ_t значение прочности в момент времени t. Случайный процесс $\{\chi_t\}_{t\ge 0}$ изменения прочности будем представлять монотонно убывающей линейной случайной функцией вида

$$\chi_t = \chi_0 - X_t,$$

где $\{\chi_t\}_{t\ge 0}$ – стохастический процесс, обладающий свойством $t = 0$, χ_0 – начальное значение, которое может быть и не случайным. Предположим, что $X_t = Vt$, V – скорость изменения прочности, тогда математическое ожидание и дисперсия линейной случайной функции χ_t будет определяться следующим образом

$$M\chi_t = M(\chi_0 - tV) = M\chi_0 - tMV, \; M(\chi_t - M\chi_t) = 0,$$

$$M(\chi_t - M\chi_t)^2 = D\chi_0 + t^2 DV - 2tM\chi_t MV,$$

$$M(\chi_t - M\chi_t)^3 = M(\chi_0 - M\chi_0)^3 + t^2 M(V - MV)^3,$$

где $M\chi_0$, MV, $D\chi_0$, DV – математические ожидания и дисперсии начального значения и скорости изменения прочности соответственно. Здесь и далее будем предполагать, что случайные величины χ_0 и V независимы. Одномерную функцию распределения процесса $\{\chi_t\}_{t\ge 0}$ будем обозначать

$$F_\chi^t(x) = P(\chi_t \le x).$$

Описанный выше случайный процесс называется веерным, и все его реализации имеют общую случайную точку $(M\chi_0, 0)$ [9]. Относительно функции $F_\chi(y)$ будем требовать, чтобы она удовлетворяла всем свойствам функции распределения.

Если рассматривать традиционную модель надежности “нагрузка – прочность”, то вероятность безотказной работы изделия не зависит от времени, т.к. предполагается, что изделие испытывает статическое воздействие в процессе эксплуатации.

Нашей задачей является получение показателей безотказности и долговечности изделия, к которому прилагаются случайные возмущения в процессе его эксплуатации, при случайной его прочности.

Формализация и решение задачи

Динамику определяющего параметра работоспособности изделия, функционирующего в условиях воздействия ударных нагрузок, можно представить графически (рис. 1). Предполагается, что изделие прекращает работать, как только накопленные повреждения превысили заданный уровень прочности, значение которого ограничено случайной функцией $\chi_t = \chi_0 - X_t$, (см. рис. 1).

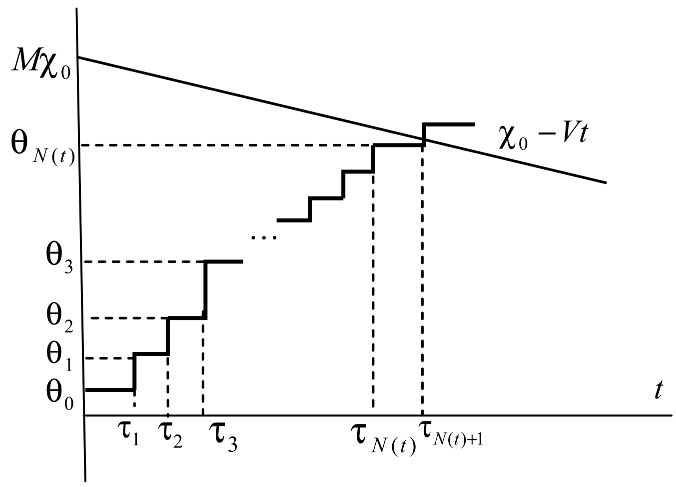

Рис.1. Графическое представление процесса функционирования в условиях воздействия ударных нагрузок

Именно учет случайных воздействий позволяет вводить в рассматриваемую модель зависимость от времени. В итоге традиционная статическая модель надежности “нагрузка – прочность” становится динамической моделью.

Нетрудно увидеть, что поскольку к изделию прикладывается все возрастающая нагрузка L_t, $t \geq 0$, то ее можно определить равенством

$$L_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_1(t)} \theta_i, & N_1(t) = 1, 2... \\ 0, & N_1(t) = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Величина L_t имеет смысл полного накопленного повреждения изделием за время функционирования t. Определенный таким способом стохастический процесс $\{L_t\}_{t>0}$ называют кумулятивным. Суммирование здесь ведется по всем ударным воздействиям, которые случились до момента времени t включительно. Обозначим через $N_1(t) = N_t$ число восстановлений считающего процесса восстановления $\{\mathrm{N}_1(t)\}_{t>0}$ соответствующего процессу $M\chi_t = M(\chi_0 + tV) = M\chi_0 + tMV$. Следовательно, $N_1(t) = N_t$ есть случайное число ударных воздействий за время $(0, t]$ или число циклов восстановления процесса $\{\tau_i, i \geq 1\}$, математическое ожидание от которого есть функция восстановления $H_1(t) = MN_1(t)$.

Ввиду того, что процесс $\{L_t\}_{t>0}$ – ступенчато возрастающий и его реализации – ступенчатые функции, то задавая допустимую границу (прочность), в нашем случае $\chi_t = \chi_0 - X_t$, можно вычислять соответствующие показатели надежности и долговечности.

Не останавливаясь более на описании процесса эволюции изделия, подверженного случайным периодическим воздействиям, введем дополнительные, но необходимые для дальнейшего изучения обозначения и определения.

Будем предполагать, что ударные возмущения имеют случайный характер, т.е. они прилагаются к изделию в случайные моменты времени и имеют случайную амплитуду. Каждое возмущение приводит к уменьшению прочности или можно утверждать, что каждое воздействие приводит к увеличению нагрузки на некоторую случайную величину, описываемую соответствующей функцией распределения. Таким образом, рассматривается случайный процесс накопления, в котором изменение нагрузки является ступенчато возрастающим стохастическим процессом и отказ изделия наступает, как только указанный процесс пересечет границу (см. рис. 1), которая здесь является случайной величиной и, более того, случайным процессом (веерным).

При вычислении характеристик безотказности и долговечности изделия будем использовать результаты, полученные для случая детерминированной прочности изделия [10].

В дальнейшем будем учитывать то, что процесс $\{L_t\}_{t>0}$ есть простой процесс восстановления, порожденный функциями распределения $F_1(t)$, $F(t)$. Это упрощающее предположение легко обобщается на случай запаздывающего процесса восстановления. Нетрудно убедиться, что для получения вероятности безотказной работы изделия за время t, может быть использовано одно из записанных соотношений для вероятности $P(L_t \le \mathrm{x})$ [3]. Используя условие отказа изделия, а также формулу полной вероятности вычисляем условную вероятность того, что накопленная нагрузка не превосходит величину прочности изделия за время функционирования t, которую запишем так

$$P\left(L_t \le x\right) = MJ_{\sum\limits_{i=1}^{N_1(t)} \theta_i \le x} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(MJ_{\sum\limits_{i=1}^{N_1(t)} \theta_i \le x} \Big|_{N_1(t)=k} \right) P(N_1(t)=k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(MJ_{\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i \le x} \right) P(N_1(t)=k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} G^{*(k)}(x) P(N_1(t)=k) = \sum_{k=0}^{\infty} G^{*(k)}(x)\left(F^{*(k)}(t) - F^{*(k+1)}(t)\right).$$

Поскольку в рассматриваемой модели прочность случайная величина, то используя формулу условного математического ожидания от случайной функции $P(L_t \le \mathrm{x})$, получаем вероятность безотказной работы изделия $P(t)$ за время t. Тогда

$$P(t) = \int_0^{\infty} P(L_t \le \mathrm{x})\, dF_{\chi_t}(x) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1(t)=k) G^{*(k)}(x)\, dF_{\chi_t}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1(t)=k) \int_0^{\infty} G^{*(k)}(x)\, dF_{\chi_t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1(t)=k) C(k) = \sum_{k=0}^{\infty} C(k) P_k(t) = MC(N_1(t)), \tag{2}$$

где $C(k) = \int\limits_0^{\infty} G^{*(k)}(x)\, dF_{\chi_t}(x) = MG^{*(k)}(\chi_t)$.

Отметим, что соотношение (2) – это функция распределения накопленной нагрузки за время t.

Аналогично введем второй процесс восстановления $\left\{Z_x\right\}_{x>0}$, связанный со временем функционирования изделия формулой (см. рис. 1)

$$Z_x = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N_2(x)} \tau_i + \tau_t, & N_2(x) = 1, 2, \cdots \\ 0, & N_2(x) = 0 \end{cases},$$

где Z_x – случайная наработка при заданной допустимой нагрузке x. Здесь $N_2(x) = N_x$ – число циклов восстановления до исчерпания запаса прочности процессом накопления нагрузки. Математическое ожидание от случайной величины $N_2(x)$ также есть функция восстановления, обозначим её как $H_2(x) = MN_2(x)$. Величина $\sum_{i=0}^{N_2(x)} \tau_i + \tau_t$ – случайная наработка изделия до пересечения накопленной нагрузкой уровеня прочности χ_t, где τ_t – обратное остаточное время, это время в течение которого изделие функционировало исправно после последнего ударного воздействия. Условную функцию распределения наработки на отказ изделия запишем, используя формулу полной вероятности

$$P(Z_x \le t) = MJ_{\sum_{i=1}^{N_2(x)} \tau_i + \tau_t \le t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(MJ_{\sum_{i=1}^{N_2(x)} \tau_i + \tau_t \le t} \Big|_{N_2(x)=k} \right) P\big(N_2(x) = k\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N_2(x)} \tau_i + \tau_t \le t \Big|_{N_2(x)=k} \right) P\big(N_2(x) = k\big) = \sum_{k=0}^{\infty} F_t * F^{*(k)}(t) P\big(N_2(x) = k\big),$$

где $F_t(t)$ – функция распределения обратного остаточного времени τ_t [3].

Вычисляя математическое ожидание от записанного выше соотношения, получаем функцию распределения времени наработки на отказ изделия:

$$Q(t) = \int_0^{\infty} P(Z_x \le \mathrm{t}) dF_{\chi_t}(x) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_t * F^{*(k)}(t) P(N_2(x) = k) dF_{\chi_t}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} F_t * F^{*(k)}(t) \int_0^{\infty} (G^{*(k)}(x) - G^{*(k+1)}(x)) dF_{\chi}(x). \quad (3)$$

Функция $Q(t)$ является вероятностью отказа изделия за время функционирования t, следовательно $Q(t) + P(t) = 1$. Подынтегральное выражение (3) $G^{*(k)}(x) - G^{*(k+1)}(x) = P\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i < x < \sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \right)$ – вероятность того, что отказ произошел между k и $k+1$-м ударным воздействием.

Нетрудно увидеть, что соотношения (3) и (2) есть смесь функций распределения $F^{*(k)}(t)$ и $G^{*(k)}(x)$ с весами $g_2(x) = G^{*(k)}(x) - G^{*(k+1)}(x)$ и $g_1(t) = F^{*(k)}(t) - F^{*(k+1)}(t)$ соответственно. Важным является то, что распределение наработки принадлежит классу ВСФИ при любой функции распределения $G(t)$.

Видно, что дальнейшие аналитические преобразования соотношения (2), (3) в общем виде не представляются возможными. При решении задач, в которых необходимо вычислять многочисленные свертки функций, обычно используются преобразования Лапласа или производящие функции, а затем возникает необходимость обращать полученное преобразование. Отметим, что задача обращения преобразования Лапласа, как правило, имеет тот же порядок трудности, что и решение исходной задачи. Трудность решения исходной задачи заключается в том, что для получения в удобном виде необходимых вероятностей требуется последовательно вычислить: во-первых, математическое ожидание от i –кратной свертки функции $G(x)$ или $F(t)$ в зависимости от рассматриваемой задачи, и во-вторых, повторно математическое ожидание от полученного результата.

Рассмотрим частный случай кумулятивного процесса – процесс ударных нагрузок, для этого предположим, что случайные величины τ и $\chi_t = \chi$ экспоненциально распределены, т.е. $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ и $F_\chi(x) = 1 - e^{-\nu x}$, где λ – интенсивность потока ударных нагрузок, а $\nu = 1/M\chi$ – интенсивность изменения прочности. В таком предположении последовательность случайных величин τ_i образует пуассоновский поток событий, а из предположения $V = 0$ следует, что пересечение уровня прочности определяющим параметром происходит только в моменты воздействия ударных нагрузок. Поскольку случайные процессы $\{L_t\}_{t>0}$, $\{Z_x\}_{x>0}$ одновременно претерпевают изменения (см. рис. 1), то это позволяет их рассматривать как синхронные процессы.

Перепишем (2) с учетом сделанных предположений. Учитывая, что поток ударных воздействий образует пуассоновский процесс, для которого $P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, имеем

$$P(t) = \int_0^\infty P(L_t \le \mathrm{x}) dF_{\chi_t}(x) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty P(N_t = k) G^{*(k)}(x) dF_{\chi_t}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \int_0^\infty G^{*(k)}(x) dF_{\chi_t}(x) = 1 - \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \int_0^\infty F_{\chi_t}(x) dG^{*(k)}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \int_0^\infty \bar{F}_{\chi_t}(x) dG^{*(k)}(x).$$

Замечая, что интеграл этого соотношения следует рассматривать как преобразование Лапласа–Стилтьеса $\tilde{G}(\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x} G(x) dx = Me^{-\nu\theta}$ функции $G^{*(k)}(x)$, поскольку $\bar{F}_{\chi_t}(x) = e^{-\nu x}$ при экспоненциальном законе распределения случайной величины χ_t, то

$$P(t) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \int_0^\infty e^{-\nu x} dG^{*(k)}(x) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}) \left(\tilde{G}(\nu)\right)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{\left(\lambda t \tilde{G}(\nu)\right)^k}{k!} = e^{-\lambda t (1 - Me^{-\nu\theta})}. \tag{4}$$

Аналогично (2) вычислим функцию распределения накопленной нагрузки за время t, используя соотношение (3) в предположении, что процесс функционирования изделия есть процесс ударных нагрузок. При общих предположениях функция распределения накопленной нагрузки за время t определяется так

$$P(t) = \sum_{k=0}^\infty F' * F^{*(k)}(t) \int_0^\infty (G^{*(k)}(x) - G^{*(k+1)}(x)) dF_\chi(x),$$

где $F_t(x)$ – функция распределения обратного остаточного времени τ_t.

С целью дальнейшего упрощения полученного соотношения для $P(t)$ перепишем фигурирующий интеграл в этом соотношении так

$$\int_0^\infty (G^{*(k)}(x) - G^{*(k+1)}(x))dF_\chi(x) = \int_0^\infty \left(P\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i \le x\right) - P\left(\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \le x\right)\right) dF_\chi(x) =$$
$$= \int_0^\infty \overline{F}_\chi(x) d\left\{ P\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i \le x\right) - P\left(\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \le x\right)\right\}.$$

Учитывая, что величина $\chi_t = \chi$ экспоненциально распределена с параметром ν, т.е. $F_\chi(x) = 1 - e^{-\nu x}$, и вычисляя преобразование Лапласа–Стилтьеса функции $P\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i \le x\right) - P\left(\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \le x\right)$ рассматриваемый интеграл перепишем еще раз:

$$\int_0^\infty (G^{*(k)}(x) - G^{*(k+1)}(x))dF_\chi(x) =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\nu x} d\left\{ P\left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i \le x\right) - P\left(\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \le x\right)\right\} = Me^{-\nu k\theta} - Me^{-\nu(k+1)\theta} = Me^{-\nu k\theta}(1 - Me^{-\nu\theta}).$$

Поскольку процесс ударных воздействий является процессом Пуассона, который обладает свойством отсутствия последействия, то в силу этого замечательного свойства случайная величина τ_t имеет то же распределение, что и величина τ. Учитывая свертки функций $F(t)$, перепишем вероятность $P(t)$ следующим образом:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{t} F^{*(k+1)}(t) Me^{-\nu k\theta}(1 - Me^{-\nu\theta}).$$

Выполняя преобразование Лапласа–Стилтьеса функции $F(t)$, перепишем

$$\tilde{P}(s) = \frac{(1 - Me^{-\nu\theta})\tilde{F}(s)}{1 - \tilde{F}(s)Me^{-\nu\theta}}.$$

Учитывая, что $\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$ для экспоненциального закона распределения случайной величины τ, $\tilde{P}(s)$ перепишем так

$$\tilde{P}(s) = \frac{1 - Me^{-\nu\theta})\frac{\lambda}{\lambda + s}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda + s} Me^{-\nu\theta}} = \frac{\lambda(1 - Me^{-\nu\theta})}{s + \lambda(1 - Me^{-\nu\theta})}.$$

Отсюда получаем окончательное выражение для функции распределения накопленной нагрузки за время t, которое запишем, используя теорему о вычетах

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t(1 - Me^{-\nu\theta})} = 1 - e^{-\lambda t} e^{\lambda t Me^{-\nu\theta}} . \tag{5}$$

Если предположить, что функция $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, то $Q(t) = 1 - e^{-\lambda t \frac{\nu}{\mu+\nu}}$, а $P(t) = e^{-\lambda t \frac{\nu}{\mu+\nu}}$.

Вычислим теперь другие показатели надежности, например, интенсивность отказов изделия.

Интенсивность отказов изделия

Используя (2), получим соотношение для интенсивности отказов $\Lambda(t)$ изделия, на которое воздействует последовательность ударных нагрузок. Из определения интенсивности отказов $\Lambda(t)$ запишем так

$$\Lambda(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f^{*(k+1)}(t) \int_0^{\infty} (G^{*(k)}(x) - G^{*(k+1)}(x)) dF_{\chi}(x)}{\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} G^{*(k)}(x) dF_{\chi}(x) (F^{*(k)}(t) - F^{*(k+1)}(t))},$$

где плотность распределения $f^{*(k+1)}(t)$ определяется последовательным интегрированием $f^{*(k+1)}(t) = \int_0^t f^{*(k)}(t-x) f(x) dx$, где $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$.

Ввиду того, что дальнейшие аналитические упрощения записанного соотношения интенсивности отказов $\Lambda(t)$ невозможны, то опять предполагаем, что имеет место процесс ударных нагрузок, для которого величины τ и $\chi_t = \chi$ являются экспоненциально распределенными случайными величинами, тогда

$$f^{*(k+1)}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} .$$

Учитывая сделанные предположения и подставляя плотность распределения $f^{*(k+1)}(t)$ в соотношение для интенсивности отказов $\Lambda(t)$ изделия, имеем

$$\Lambda(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \left(\tilde{G}(\nu)\right)^k (1 - \tilde{G}(\nu))}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{G}(\nu)\right)^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}} = \lambda(1 - \tilde{G}(\nu)). \tag{6}$$

Соотношение (6) можно получить непосредственно из (5) и (4). Таким образом, получен несколько неожиданный результат – интенсивность отказов «стареющего» изделия не зависит от времени.

Поскольку траектории процесса функционирования изделия – это ступенчатая функция, то и время до отказа является дискретной случайной величиной, поэтому для оценки интенсивности отказов изделия можно использовать ее дискретный аналог ([2] с. 35). Используя ранее полученное, имеем

$$\lambda_{k+1} = \frac{MG^{*(k+1)}(\chi_t)}{\sum_{i=k}^{\infty} MG^{*(i+1)}(\chi_t)} = \frac{\left(\tilde{G}(\nu)\right)^{k+1}(1-\tilde{G}(\nu))}{\sum_{i=k}^{\infty}\left(\tilde{G}(\nu)\right)^{i+1}(1-\tilde{G}(\nu))} = \frac{\left(\tilde{G}(\nu)\right)^{k+1}}{\sum_{i=k}^{\infty}\left(\tilde{G}(\nu)\right)^{i+1}} = 1-\tilde{G}(\nu),$$

где λ_{k+1} представляет вероятность того, что изделие, исправное после k-го удара, откажет после $k+1$-го. В случае, когда $G(x) = 1-e^{-\mu x}$, тогда $\lambda_{k+1} = \dfrac{\nu}{\nu+\mu}$, $\lambda_{k+1} \le 1$.

Таким образом, предположения об экспоненциальных распределениях потока ударных нагрузок и величины прочности позволили, исходя из математической модели надежности изделия, функционирующего в условиях многократных воздействий ударных возмущений, получить в явном виде количественные показатели надежности изделия, необходимые для инженерной практики. Конечные соотношения показателей надежности просты, что делает их привлекательными для практического использования.

Литература

1. **Богданофф Дж., Козин Ф.** Вероятностные модели накопления повреждений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 334 с.
2. **Барлоу Р., Прошан Ф.** Математическая теория надежности: Пер. с англ. – М.: Сов. Радио, 1969.– 488 с.
3. **Байхельт Ф., Франкен П.** Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
4. **Капур К., Ламберсон Л.** Надежность и проектирование систем: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 604 с.
5. **Дилон Б., Сингх Ч.** Инженерные методы обеспечения надежности систем: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 318 с.
6. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1973, том. 2. С. 398 -399.-640 с.
7. **Перегуда А.И., Андреев А.Г.** Асимптотический метод вычисления показателей надежности и долговечности изделий, функционирующих в условиях ударных нагрузок. – Надежность, 2007, №3 (22) – С. 45-53.
8. **Toshio Nakagawa.** Shock and damage models in reliability theory. – Springer – Verlag London Limited 2007. – 191
9. **Дружинин Г.В.** Надежность автоматизированных систем. – М.: Энергия, 1977. – 535 с.
10. **Перегуда А.И., Соборова И.А., Андреев А.Г.** Об одном методе построения двухсторонних оценок показателей надежности и долговечности изделий, функционирующих в условиях ударных нагрузок. – Надежность, 2005, №2 (13) – С. 14-24.