

О функции надежности системы $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$. Часть II. Численное исследование и анализ чувствительности On the dependability function of a $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ system. Part II. Numerical study and sensitivity analysis

Рыков В.В.¹, Иванова Н.М.^{2*}

Rykov V.V., Ivanova N.M.

¹ Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

¹ National University of Oil and Gas (Gubkin University)

² V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences

*nm_ivanova@bk.ru



Рыков В.В.



Иванова Н.М.

Резюме. На основе теоретических результатов, представленных в первой части статьи, в данной части исследуются основные характеристики надежности системы k -из- n с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта ее элементов. На основе преобразования меток, предложенного в первой части статьи, методом имитационного моделирования вычисляются и исследуются различные вероятностно-временные характеристики модели и исследуется их чувствительность к исходным распределениям и их параметрам.

Abstract. Based on the theoretical findings presented in the first part of the paper, this part investigates the main characteristics of the dependability of a k -out-of- n system with arbitrary distributions of failure-free time and time to component repair. Using the marks transformations proposed in Part I of the paper and simulation, various probabilistic and temporal characteristics of the model are calculated and studied, while their sensitivity to the initial distributions and their parameters is analyzed.

Ключевые слова: маркированный марковский процесс, система $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$, произвольные распределения времени безотказной работы и восстановления, анализ чувствительности.

Keywords: marked Markov processes, $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ system, arbitrary distributions of failure-free time and time to repair, sensitivity analysis.

Для цитирования: Рыков В.В., Иванова Н.М. О функции надежности системы $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$. Часть II. Численное исследование и анализ чувствительности // Надежность. 2024. №4. С. 3-11. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-4-3-11>

For citation: Rykov V.V., Ivanova N.M. On the dependability function of a $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ system. Part II. Numerical study and sensitivity analysis. Dependability 2024;4:3-11. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-4-3-11>

Поступила: 07.05.2024 / **После доработки:** 03.09.2024 / **К печати:** 18.11.2024

Received on: 07.05.2024 / **Revised on:** 03.09.2024 / **For printing:** 18.11.2024

Введение

Вторая часть статьи посвящена численному исследованию характеристик надежности восстанавливаемой системы k -из- n с произвольными распределениями времени безотказной работы (в.б.р.) и ремонта ее элементов и произвольным числом ремонтирующихся устройств, которая обозначается как $\langle GI_{k \leq n} | GI | l \rangle$. Напомним, что A_i и B_i ($i=1,2,\dots$) – в.б.р. и ремонта элементов системы, которые предполагаются взаимно независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) случайными величинами (с.в.) с соответствующими функциями распределения $A(t)=P\{A_i \leq t\}$ и $B(t)=P\{B_i \leq t\}$.

На основе теоретических результатов, содержащихся в первой части статьи [1], предложен алгоритм вычисления основных вероятностно-временных характеристик надежности этой системы. Реализация алгоритма выполнена на языке программирования Python¹, в том числе с использованием библиотеки Seaborn² для генерации псевдослучайных величин с заданным распределением.

Для проверки результатов, полученных с помощью разработанного алгоритма, проводится сравнительный анализ с известными численными результатами на примере системы $\langle M_{3 \leq 6} | GI | 1 \rangle$ [2]. Анализ показал высокую точность характеристик надежности системы, вычисленных с помощью реализации алгоритма. Проведено численное исследование системы $\langle GI_{5 < 10} | GI | l \rangle$ для $l = 1$ и $l = 3$. Представлен анализ чувствительности характеристик надежности этой системы к виду исходных распределений и коэффициентам вариации в.б.р. и ремонта компонентов.

1. Алгоритм вычисления функции надежности

Для описания алгоритма будем пользоваться введенными ранее в части I [1] статьи операторами, применяя их теперь к реализациям с.в.: оператором сдвига $Sh[v_j]$ массива $\mathbf{v}_j = (v_j^1, \dots, v_j^{n-j})$ и оператором пополнения $Ad[v_j, v]$ массива \mathbf{v}_j новым элементом v , которые, согласно результатам части I статьи, действуют следующим образом:

$$Sh[\mathbf{v}_j, v] \equiv \{\mathbf{v}_{sh} : v_{sh}^i = v_j^i - v, (i = \overline{1, n-j-1}), v \leq v_j^i\}$$

$$Ad[\mathbf{v}_j, v] \equiv \{\mathbf{v}_{ad}(v) : v_{ad}^{(i)}(v) = v_j^i \text{ при } i < r,$$

$$v_{ad}^{i+1}(v) = v, \text{ при } i = r,$$

$$v_{ad}^{i+2}(v) = v_j^{i+1} \text{ при } i > r (i = \overline{1, j-1})\},$$

где $r = \max\{i : v_j^i \leq v\}$. Напомним, что при применении этих операторов к массивам x_j и y_j они имеют размерности $n-j$ и $j \wedge l$ соответственно.

Алгоритм

Подготовка. Ввести исходные данные: целые n, k, M – число реализаций модели, l – количество ремонтирующихся устройств. Задать распределения $A(\cdot), B(\cdot)$ случайных величин A_i, B_i , соответствующие средние μ_A, μ_B и коэффициенты вариации v_A, v_B ³.

Подготовить счетчики: $v_j = (v_1, \dots, v_k)$ – число посещений состояний $j = 1, k$; m – счетчик числа реализаций; и массивы: $R = [0] * M$ – время до отказа системы, t_1, \dots, t_k – длительности пребывания системы в состояниях $j = 1, k$.

Начало. Положить $j=0, m=1$. Сгенерировать n реализаций с.в. $A \in A(\cdot)$ и вычислить начальное состояние системы в виде вариационного ряда из этой выборки

$$\mathbf{x}_0 = \{x_0^i (i = \overline{1, n}) : x_0^1 \leq x_0^2 \leq \dots \leq x_0^n\}, \mathbf{y}_0 = \{y_0^i = \infty\}.$$

Шаг 1. Если $m < M$, то переход на Шаг 2, в противном случае переход на Шаг 6.

Шаг 2. Считать $t_j := t_j + x_0^1, v_j := v_j + 1, R_m := R_m + x_0^1, j := j + 1$.

$$\text{Вычислить } \mathbf{x}_j = Sh[\mathbf{x}_{j-1}, x_0^1], \mathbf{y}_j = Ad[\mathbf{y}_{j-1}, B].$$

Переход на Шаг 3.

Шаг 3. Пока $0 < j < k$, повторять:

если $x_j^1 \leq y_j^1$:

положить $t_j := t_j + x_j^1, v_j := v_j + 1, R_m := R_m + x_j^1, j := j + 1$;

вычислить $\mathbf{x}_j = Sh[\mathbf{x}_{j-1}, x_j^1], \mathbf{y}_j = Sh[\mathbf{y}_{j-1}, x_j^1]$;

если $j \leq l$,

то $\mathbf{y}_j = Ad[B]$;

если $x_j^{(l)} > y_j^{(l)}$:

положить $t_j := t_j + y_j^1, v_j := v_j + 1, R_m := R_m + y_j^1$,

$j := j - 1$;

вычислить

если $j=0$:

$\mathbf{x}_j = Ad[Sh[\mathbf{x}_{j-1}, y_{j-1}^1], A], \mathbf{y}_j = \{y_j^i = \infty\}$. Переход на Шаг 2;

иначе $j \neq 0$:

$\mathbf{x}_j = Ad[Sh[\mathbf{x}_{j-1}, y_{j-1}^1], A]$;

если $j < l$,

$\mathbf{y}_j = Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1]$;

иначе $j \geq l$ или $l=1$,

$\mathbf{y}_j = Ad[Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1], B]$.

Шаг 4. Если $j=k$, то положить $j=0$ и перейти на Шаг 5.

Шаг 5. Сбор статистики:

- заполнение массива v_j ,

- заполнение массива R значениями R_m ,

- заполнение массивов t_1, \dots, t_k .

Положить $m := m + 1$. Перейти на Начало.

Шаг 6. Обработка Статистики:

- вычисление распределения числа v_j посещений состояний j ,

$$\hat{v} = \frac{v_j}{\sum_{j \leq k} v_j},$$

¹ <https://www.python.org/>

² <https://seaborn.pydata.org/index.html>

³ Обращаем внимание читателя, что здесь v_A и v_B обозначают коэффициенты вариации, а не метку

- вычисление эмпирической функции надежности $\hat{R}(t)$,

$$\hat{R}(t) = 1 - \frac{1}{M} R_m, \quad R_m \leq t < R_{m+1},$$

- среднего времени жизни системы,

$$\mu_R = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M R_m,$$

- вывод результатов.

СТОП

2. Численные примеры и анализ чувствительности

В этом разделе будут рассмотрены численные примеры, а также проведено сравнение результатов оценки характеристик надежности, полученных с помощью алгоритма, с численными результатами, вычисленными из явных аналитических выражений.

2.1. Сравнение с аналитическими результатами для модели $\langle M_{k<n} | GI | 1 \rangle$

Для начала сравним результаты алгоритма с результатами, полученными при расчете по известным аналитическим выражениям. Для оценки точности рассмотрим абсолютную погрешность Δ ,

$$\Delta = |R_{in}(t) - \hat{R}(t)|,$$

где $R_{in}(t)$ – значения функции надежности, вычисленные по аналитической формуле, а $\hat{R}(t)$ – оценка значений функции надежности, полученная с помощью алгоритма.

Рассмотрим систему 3-из-6 с одним ремонтным устройством. Для моделирования времени до отказа компонентов используется показательное распределение, а для времени их ремонта – произвольное. В обобщенной символике Кендалла такая система будет обозначаться

как $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$. Аналитические выражения функции надежности и среднего времени жизни такой системы были получены ранее с помощью метода введения дополнительных переменных и решения дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных методом характеристик [2]. В случае когда время ремонта имеет показательное распределение, характеристики системы могут быть получены с помощью простого процесса рождения и гибели. В качестве распределений времени ремонта выбраны распределения Гамма (Γ) и Гнеденко-Вейбулла (GW). Параметры и характеристики этих распределений представлены в табл. 1.

Далее для определения среднего и коэффициента вариации в.б.р., ремонта элементов и в.б.р. всей системы будут использоваться нижние индексы, соответствующие этим с.в., а именно A , B и R .

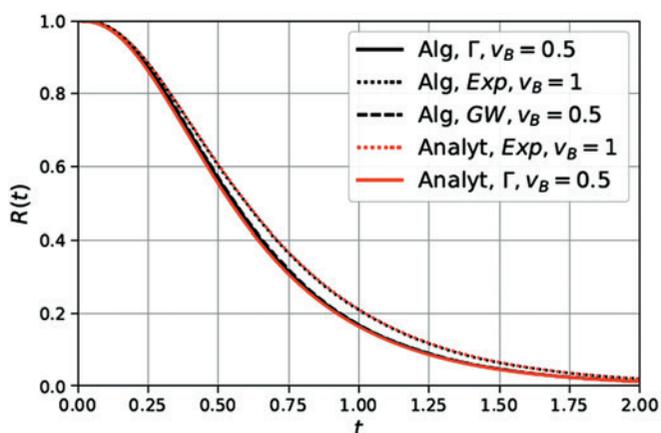
В случае когда $\nu_B=1$, распределение времени ремонта элементов системы становится экспоненциальным со средним μ_B , что приводит к марковской модели $\langle M_{3<6} | M | 1 \rangle$. Этот пример будет рассматриваться в качестве проверки точности алгоритма. Для сравнения результатов алгоритма в случае непоказательного распределения времени ремонта рассмотрена система $\langle M_{3<6} | \Gamma | 1 \rangle$, для которой аналитические и численные результаты также представлены в работе [2].

Положим для примера $\mu_A=\mu_B=1$, $\nu_B=0,5$, 1. Графические результаты оценки функции надежности системы $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$ представлены на рис. 1, а) в масштабе t и на рис. 1, б) в масштабе среднего времени жизни системы. Представленные кривые получены как численно, так и с помощью разработанного алгоритма.

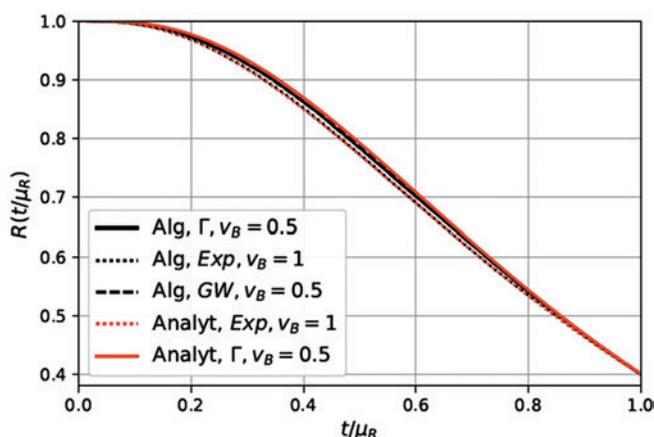
Черные кривые представляют собой функцию надежности, оценка которой получена с помощью алгоритма, красный цвет кривых соответствует численному решению при $B \sim \Gamma$. Оценка функции надежности с помощью предложенного алгоритма демонстрирует высокую точность по сравнению с аналитическими результатами.

Табл. 1. Распределения времени ремонта и их характеристики

Характеристика	$GW(\alpha, \beta)$	$\Gamma(\alpha, \beta)$
α – параметр формы, β – параметр масштаба		
Функция распределения	$F(t) = 1 - e^{-(t/\beta)^\alpha}$	$F(t) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, t\beta)}{\alpha}$
Плотность распределения	$f(t) = \frac{\alpha e^{-(t/\beta)^\alpha} (t/\beta)^{\alpha-1}}{\beta}, t > 0$	$f(t) = \frac{\beta^\alpha e^{-t/\beta} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t > 0$
Математическое ожидание	$\mu = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$	$\mu = \frac{\alpha}{\beta}$
Дисперсия	$\sigma^2 = \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \mu^2$	$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$
Коэффициент вариации	$\nu = \frac{\sigma}{\mu}$	$\nu = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$
Параметры распределений	$\alpha, \beta = \frac{\mu}{\Gamma(1 + 1/\alpha)}$	$\alpha = \nu^{-2}, \beta = \mu \nu^2$



а) В масштабе t



б) В масштабе μ_R

Рис. 1. Функция надежности системы $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$

Кроме того, из графика видно, что кривая функции надежности при $B \sim GW$ практически идентична кривой при $B \sim \Gamma$, что говорит о слабой зависимости функции надежности системы от вида ф.р. времени ремонта ее элементов.

На рис. 1, а) кривые функции надежности марковской модели (красные и черные штриховые кривые), то есть при $v_B=1$, расположены выше кривых с меньшим коэффициентом вариации времени ремонта. Однако при больших значениях времени t все кривые сливаются в одну.

На рис. 1, б) все кривые расположены очень близко друг к другу. К моменту $t/\mu_R=1$ значение функции надежности достигает $R(t) \approx e^{-1}$, что демонстрирует нечувствительность функции надежности системы $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$ к виду распределения и коэффициенту вариации времени ремонта v_B при фиксированном среднем μ_B в масштабе среднего времени жизни системы μ_R .

В табл. 2 представлены значения среднего времени жизни для данной системы. Оценка среднего времени μ_R , полученная с помощью алгоритма, достаточно близка к аналитическим результатам. Так же, как и график функции надежности, она отражает высокую точность предложенного алгоритма.

Рассмотрим погрешность Δ результатов, полученных с помощью алгоритма, по сравнению с численными. На

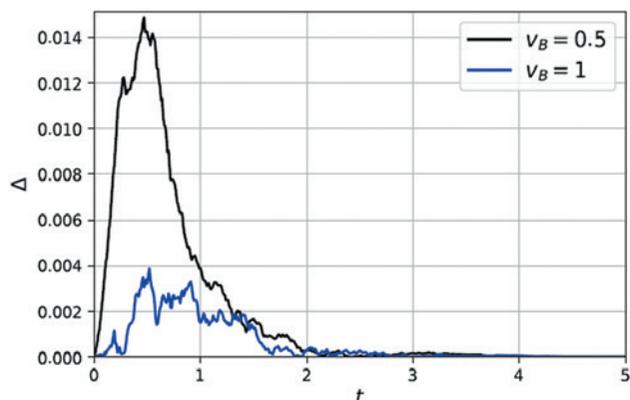


Рис. 2. Δ оценки функции надежности системы $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$

Табл. 2. Среднее время жизни μ_R системы $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$

Параметры	μ_R	
	Аналитически	По алгоритму
$\Gamma, v_B=0,5$	0,65221	0,65276
$\Gamma, v_B=0,5$	—	0,65613
Exp, $v_B=1$	0,70833	0,70872

рис. 2 представлена абсолютная погрешность оценки функции надежности системы $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$ на интервале $t=[0, 5]$ при $v_B=0,5; 1$. Согласно графику, максимальная погрешность для $v_B=0,5$ составляет $\max(\Delta) \approx 0,015$, а при $v_B=1$ $\max(\Delta) \approx 0,004$. При этом средние погрешности равны соответственно $E[\Delta]=0,0021$ для $v_B=0,5$ и $E[\Delta]=0,00061$ для $v_B=1$. Представленные оценки подтверждают высокую точность полученных с помощью алгоритма результатов.

2.2. Численное исследование системы $\langle GI_{5<10} | GI | I \rangle$

Для исследования влияния числа ремонтных устройств на характеристики системы при произвольном распределении в.б.р. ее элементов рассмотрим систему 5-из-10. Пусть среднее в.б.р. $\mu_A=10$, среднее время ремонта $\mu_B=1$, число ремонтных устройств меняется, $l=1, 3$. В.б.р. компонентов имеет распределение Гамма с коэффициентом вариации $v_A=0,1, 0,5, 1, 3$; время ремонта имеет распределение Гамма или Гнеденко-Вейбулла с коэффициентом вариации $v_B=0,1, 0,5, 1, 5$. Исследуем чувствительность характеристик надежности такой системы к виду распределения времени ремонта, а также к значениям коэффициента вариации в.б.р. v_A и ремонта компонентов v_B .

2.2.1. Число ремонтных устройств $l=1$

Сперва рассмотрим систему 5-из-10 с одним ремонтным устройством. Результаты оценки функции

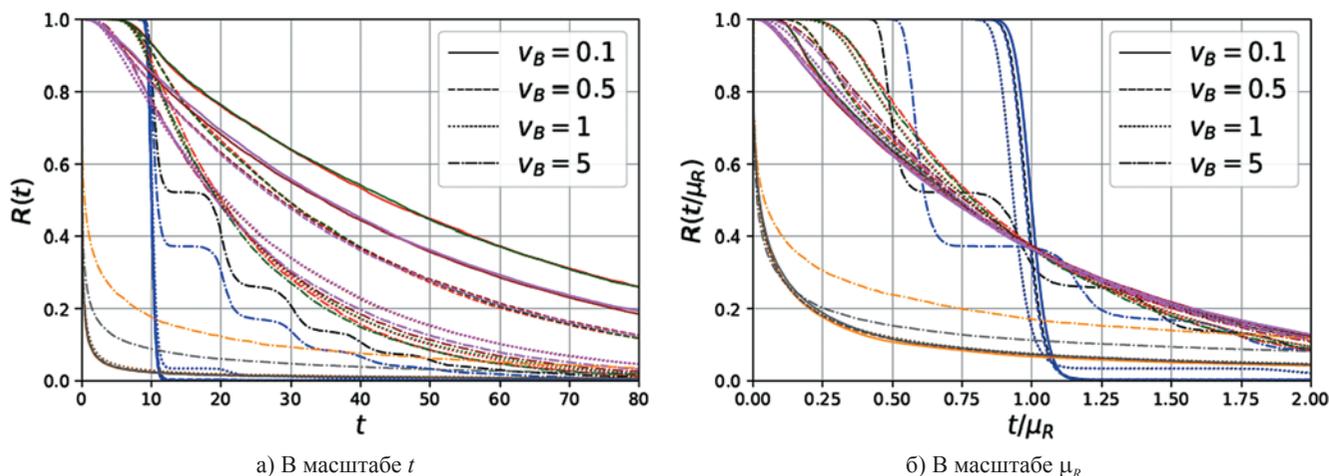


Рис. 3. Функция надежности системы $\langle \Gamma_{5 \leq 10} | GI | 1 \rangle$

надежности при заданных выше исходных параметрах представлены на рис. 3, где:

- тип кривой (сплошная, пунктирная, штриховая, штрихпунктирная) при изменении коэффициента вариации времени ремонта v_B определяется в легенде рисунка;
- цветами отображаются заданные коэффициент вариации в.б.р. компонентов и распределение времени ремонта:
 - $v_A = 0,1$: черный – $B \sim \Gamma$, синий – $B \sim GW$,
 - $v_A = 0,5$: красный – $B \sim \Gamma$, зеленый – $B \sim GW$,
 - $v_A = 1$: коричневый – $B \sim \Gamma$, розовый – $B \sim GW$,
 - $v_A = 3$: оранжевый – $B \sim \Gamma$, серый – $B \sim GW$.

Рассмотрим рис. 3, а). График иллюстрирует чувствительность функции надежности системы к коэффициенту вариации в.б.р. компонентов v_A . Когда $v_A = 3$, надежность системы довольно низкая, так как в течение короткого временного интервала t вероятность работоспособности системы быстро падает до нуля (серые и оранжевые кривые). В этом случае коэффициент вариации времени ремонта v_B влияет на функцию надежности только в случае $v_B = 5$ (штрихпунктирные кривые); при остальных значениях $v_B \leq 1$ кривые сливаются. С уменьшением значения v_A надежность системы повышается, поскольку соответствующие кривые расположены выше относительно больших v_A . При этом наиболее значимое влияние коэффициента вариации v_A сказывается на квантилях надежности, то есть на значениях $q_\gamma: R(q_\gamma) \geq \gamma$, которые будут представлены ниже.

При $v_A = 1, 0,5$ (красные, зеленые, коричневые, розовые) кривые функции надежности с разной «скоростью» стремятся к нулю при увеличении аргумента t . В этих случаях наблюдается, в том числе, зависимость функции надежности от значения v_B . При $v_B \geq 1$ (штриховые

и штрихпунктирные кривые) кривые надежности достаточно близки друг к другу при фиксированном v_A . Однако значения $v_B < 1$ (сплошные и пунктирные кривые) приводят к росту надежности и чувствительности к значению этого коэффициента вариации. Чем меньше v_B , тем выше расположены кривые функции надежности относительно больших значений v_B . Также в этом случае наблюдается нечувствительность функции надежности к виду распределения времени ремонта компонентов при фиксированном v_B . Наконец, при малом значении коэффициента вариации в.б.р. $v_A = 0,1$ (черные и синие кривые) поведение кривых функции надежности заметно отличается от остальных. Надежность системы относительно долго остается в окрестности единицы, после чего резко снижается практически для нуля. При этом «скорость» снижения зависит от значения коэффициента вариации времени ремонта аналогично зависимости кривых в случае $v_A = 3$.

На рис. 3, б) продемонстрирован тот же результат, но в масштабе среднего времени жизни системы μ_R . Из графика видно, что в этом случае функция надежности также чувствительна к коэффициенту вариации в.б.р. компонентов v_A . Кривые при $v_A = 3$ расположены ниже остальных кривых и быстро стремятся к нулю. При $v_A = 1, 0,5$ кривые также находятся относительно близко друг к другу. В этом случае функция надежности чувствительна к значению коэффициента вариации времени ремонта при $v_B \geq 1$. В случае $v_A = 0,1$ поведение кривых также отличается от остальных. Важно отметить, что в окрестности точки $t/\mu_R = 1$ все кривые при $v_A \neq 3$ сходятся в окрестности значения $R(t) \approx e^{-1}$, что говорит о нечувствительности функции надежности в масштабе среднего μ_R .

Табл. 3. Среднее время жизни μ_R системы $\langle \Gamma_{5 \leq 10} | GI | 1 \rangle$

$v_A =$	0,1		0,5		1		3	
$B \sim$	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_B = 0,1$	10,065	10,069	61,197	60,623	48,379	49,746	2,024	1,871
$v_B = 0,5$	10,260	10,304	40,059	40,288	39,967	39,487	2,061	2,005
$v_B = 1$	10,865	10,879	25,466	25,752	27,949	28,182	2,270	2,267
$v_B = 5$	21,142	17,600	25,148	24,712	25,451	26,114	10,632	5,582

Табл. 4. Коэффициент вариации v_R времени жизни системы $\langle \Gamma_{5<10}|GI|1 \rangle$

$v_A =$	0,1		0,5		1		3	
$B \sim$	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_B=0,1$	0,222	0,258	0,924	0,900	0,951	0,960	8,648	8,178
$v_B=0,5$	0,458	0,529	0,842	0,853	0,932	0,931	8,509	8,106
$v_B=1$	0,443	0,436	0,724	0,732	0,899	0,897	7,598	7,750
$v_B=5$	0,725	0,731	0,677	0,703	0,821	0,845	3,024	4,527

Табл. 5. Квантили q_γ надежности системы $\langle \Gamma_{5<10}|GI|1 \rangle$

Распределение		$B \sim \Gamma$				$B \sim GW$			
$v_B =$		0,1	0,5	1	5	0,1	0,5	1	5
$v_A=0,1$	$q_{0,9}$	9,458	9,476	9,514	9,881	9,457	9,474	9,524	9,746
	$q_{0,99}$	9,015	9,037	9,066	9,334	9,019	9,044	9,068	9,218
	$q_{0,999}$	8,705	8,733	8,777	8,962	8,714	8,746	8,764	8,879
$v_A=0,5$	$q_{0,9}$	11,416	10,344	9,162	9,642	11,428	10,416	9,164	9,404
	$q_{0,99}$	6,818	6,467	6,375	6,494	6,804	6,488	6,214	6,471
	$q_{0,999}$	4,942	4,871	5,041	5,345	5,132	4,951	5,049	5,103
$v_A=1$	$q_{0,9}$	7,366	6,631	5,563	6,549	7,607	6,490	5,591	6,340
	$q_{0,99}$	2,133	2,084	2,123	2,909	2,198	2,077	2,021	2,627
	$q_{0,999}$	0,941	1,013	1,101	1,478	0,967	1,064	1,064	1,482
$v_A=3$	$q_{0,9}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
	$q_{0,99}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	$q_{0,999}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$

Табл. 6. Квантили q_γ надежности системы $\langle \Gamma_{5<10}|GI|1 \rangle$ в масштабе μ_R

Распределение		$B \sim \Gamma$				$B \sim GW$			
$v_B =$		0,1	0,5	1	5	0,1	0,5	1	5
$v_A=0,1$	$q_{0,9}$	0,939	0,924	0,876	0,467	0,939	0,919	0,875	0,554
	$q_{0,99}$	0,896	0,881	0,834	0,441	0,896	0,878	0,833	0,524
	$q_{0,999}$	0,865	0,851	0,808	0,424	0,865	0,849	0,806	0,504
$v_A=0,5$	$q_{0,9}$	0,186	0,258	0,359	0,383	0,188	0,258	0,356	0,381
	$q_{0,99}$	0,111	0,161	0,250	0,259	0,112	0,161	0,241	0,262
	$q_{0,999}$	0,081	0,122	0,198	0,212	0,085	0,123	0,196	0,206
$v_A=1$	$q_{0,9}$	0,152	0,166	0,199	0,257	0,153	0,164	0,198	0,242
	$q_{0,99}$	0,044	0,052	0,076	0,114	0,044	0,053	0,071	0,101
	$q_{0,999}$	0,019	0,025	0,039	0,058	0,019	0,027	0,037	0,057
$v_A=3$	$q_{0,9}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	$q_{0,99}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$10 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$
	$q_{0,999}$	$7 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-9}$

Используя функцию надежности системы, вычислим среднее время ее жизни, а также коэффициент вариации (табл. 3 и 4). Данные таблиц показывают, что обе характеристики чувствительны к значению коэффициента вариации в.б.р. компонентов v_A . При увеличении v_A обе характеристики растут при $v_B \leq 1$. При $v_B = 5$ среднее время жизни системы сначала растет с увеличением v_A , а затем уменьшается. При $v_A = 3$ среднее μ_R более чем в два раза ниже по сравнению с другими значениями v_A . Кроме того, наблюдается слабая чувствительность среднего времени жизни системы к виду распределения времени ремонта при фиксированных v_B и в случае $v_B \leq 1$.

Коэффициент вариации v_R времени жизни системы также чувствителен к коэффициенту вариации в.б.р.

компонентов v_A , но кроме того чувствителен и к коэффициенту вариации v_B (см. табл. 4). При увеличении v_A также увеличивается и коэффициент вариации v_R при $v_B \leq 1$. Однако при фиксированных значениях v_A увеличение v_B приводит к снижению значений коэффициента вариации времени жизни системы при $v_A > 0,1$. Напротив, при относительно малом значении $v_A = 0,1$ увеличение коэффициента вариации времени ремонта приводит к росту v_R . При этом также наблюдается слабая чувствительность коэффициента вариации времени жизни системы к виду распределения времени ремонта при фиксированных v_B .

Далее рассмотрим квантили надежности $q_\gamma = R^{-1}(\gamma)$ (табл. 5). Эта мера показывает, как долго система будет

функционировать с фиксированной вероятностью. Рассмотрим значения квантилей при $\gamma=0,9, 0,99, 0,999$.

Очевидно, коэффициент вариации в.б.р. компонентов v_A существенно влияет на значения квантилей надежности системы. Кроме того, наблюдается и влияние коэффициента вариации времени ремонта v_B . Наибольшее значение квантиля $q_{0,9}$ достигается при значениях $v_A=0,5$ и $v_B=0,1$, $\max(q_{0,9}) \approx 11,4$. Наибольшие значения квантилей $q_{0,99}$ и $q_{0,999}$ достигаются при наименьшем коэффициенте вариации в.б.р. $v_A=0,1$ и наибольшем $v_B=5$, $\max(q_{0,99}) \approx \max(q_{0,999}) \approx 9$. Более того, их значения достаточно близки друг к другу при изменении распределения и коэффициента вариации времени ремонта v_B . Наибольшее значение $v_A=3$ приводит к тому, что система становится ненадежной. Для всех значений q_γ вид распределения времени ремонта не оказывает влияния на квантили надежности при фиксированных v_B .

Также рассмотрим квантили надежности, вычисленные в масштабе среднего времени жизни системы (табл. 6). Наибольшее значение среди всех рассматриваемых квантилей достигается при наименьшем значении коэффициента вариации в.б.р. компонентов $v_A=0,1$. При этом с увеличением значения v_B квантили надежности уменьшаются при $v_A=0,1$. В других случаях $v_A \neq 0,1$, напротив, с увеличением v_B увеличиваются и значения q_γ .

2.2.2. Число ремонтных устройств $l=3$

Рассмотрим теперь аналогичную систему, но с большим числом ремонтных устройств. Пусть $l=3$, остальные параметры остаются прежними (см. подпункт 2.2.1). Исследуем чувствительность характеристик надежности к виду распределения и коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта. Кроме того, сравним результаты этого подпункта с предыдущим, чтобы понять, как количество ремонтных устройств влияет на характеристики надежности системы и как в этом случае эти характеристики зависят от вида распределения и коэффициента вариации в.б.р. и ремонта компонентов.

На рис. 4 продемонстрирована функция надежности системы $\langle \Gamma_{5<10} | GI | 3 \rangle$: рис. 4, а) представлен в масштабе t , рис. 4, б) – в масштабе среднего времени жизни μ_R системы.

Рассмотрим рис. 4, а). Очевидно, что с большим числом ремонтных устройств система останется работоспособной в течение большого времени, поэтому в этом случае кривые $R(t)$ медленнее стремятся к нулю с ростом t . При этом зависимость функции надежности от коэффициента вариации в.б.р. компонентов сохраняется. При значениях $v_A=3$ (оранжевые и серые кривые) и $v_A=0,1$ (черные и синие кривые) система ненадежна и $R(t) \rightarrow 0$ при малом t в случае $v_B \leq 1$. При $v_B=5$ кривые функции надежности расположены выше относительно $v_B \leq 1$. В случае $v_A=1, 0,5$ и всех заданных значениях v_B кривые функции $R(t)$ расположены относительно близко друг к другу. При этом выявить определенное влияние этих значений на надежность системы графически достаточно сложно, поскольку различие между штрихами и цветами достаточно размыто. Интересно, что функция надежности при $v_A=0,1$ и $v_B=5$ (черная штрихпунктирная кривая) лежит достаточно близко к группе кривых при $v_A=1, 0,5$. Сделать выводы о чувствительности функции надежности к виду распределения времени ремонта не представляется возможным. Однако общее влияние исходных параметров системы на ее надежность очевидна.

Рассмотрим рис. 4, б), где тот же результат представлен в масштабе среднего времени жизни μ_R системы. Поведение кривых функции надежности системы при $l=3$ в масштабе μ_R отличается от аналогичного примера при $l=1$. При $v_A=1, 0,5$ кривые надежности сходятся в окрестности значения $R(t) \approx e^{-1}$. Однако в остальных случаях, при $v_A=0,1, 3$, кривые быстрее стремятся к нулю с ростом t/μ_R так, что к моменту $t/\mu_R=1$ вероятность работоспособности становится очень маленькой, $R(t) < 0,2$. Очевидно, что такое поведение кривых будет иметь сильное влияние на квантили надежности.

С ростом числа ремонтных устройств среднее время жизни системы также возрастает (табл. 7). Значения μ_R при $l=3$ в разы превышает среднее время жизни

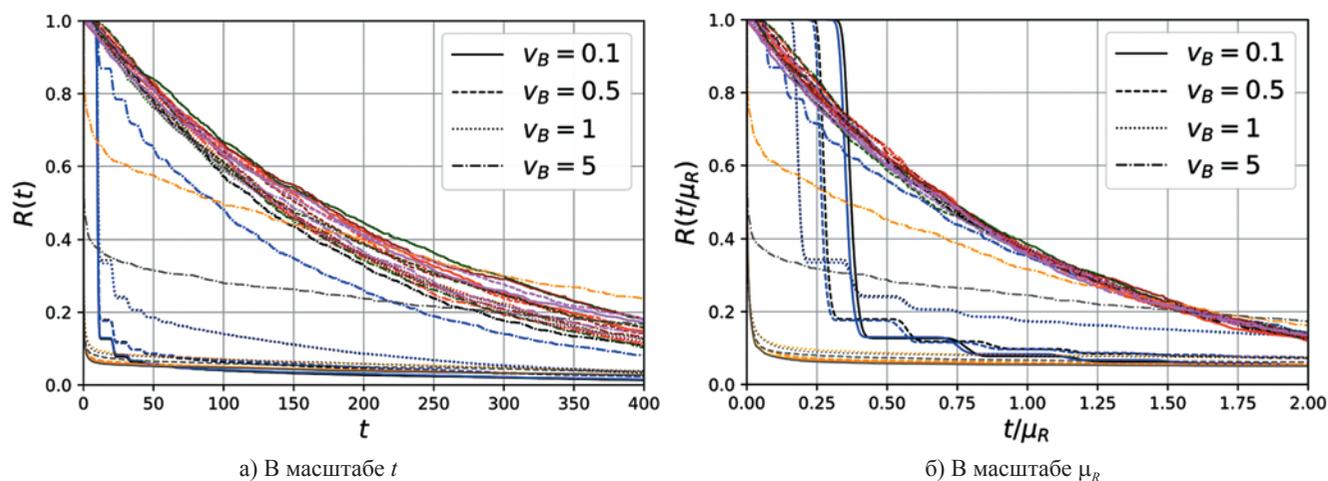


Рис. 4. Функция надежности системы $\langle \Gamma_{5<10} | GI | 3 \rangle$

Табл. 7. Среднее время жизни μ_R системы $\langle \Gamma_{5<10}|GI|3 \rangle$

$v_A =$	0,1		0,5		1		3	
B	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_B=0,1$	27,346	28,515	224,189	236,483	213,703	227,693	32,138	31,289
$v_B=0,5$	36,926	38,464	218,784	214,494	212,219	232,047	33,013	41,233
$v_B=1$	56,533	56,546	195,805	193,731	190,473	191,829	44,670	44,214
$v_B=5$	180,813	148,757	188,397	187,313	193,361	204,229	278,969	188,018

Табл. 8. Коэффициент вариации v_R времени жизни системы $\langle \Gamma_{5<10}|GI|3 \rangle$

$v_A =$	0,1		0,5		1		3	
$B \sim$	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_B=0,1$	3,536	3,487	0,958	0,927	0,952	1,036	5,616	5,789
$v_B=0,5$	3,115	3,138	0,952	1,038	0,979	1,011	5,699	5,143
$v_B=1$	2,202	2,177	0,972	1,015	0,979	0,974	4,596	4,674
$v_B=5$	0,968	1,123	0,914	0,937	0,889	0,957	1,590	2,211

Табл. 9. Квантили q_γ надежности системы $\langle \Gamma_{5<10}|GI|3 \rangle$

Распределение		$B \sim \Gamma$				$B \sim GW$			
$v_B =$		0,1	0,5	1	5	0,1	0,5	1	5
$v_A=0,1$	$q_{0,9}$	9,476	9,550	9,689	15,199	9,464	9,558	9,673	10,936
	$q_{0,99}$	9,022	9,086	9,183	10,333	9,031	9,096	9,202	9,903
	$q_{0,999}$	8,751	8,799	8,778	9,251	8,728	8,720	8,908	9,366
$v_A=0,5$	$q_{0,9}$	31,439	28,263	26,587	33,156	26,036	24,143	22,682	33,116
	$q_{0,99}$	8,948	8,325	8,213	11,605	7,989	8,469	7,279	13,912
	$q_{0,999}$	6,328	6,744	5,959	9,270	5,649	5,627	6,076	8,837
$v_A=1$	$q_{0,9}$	28,582	24,934	20,717	30,105	20,598	25,523	21,159	29,453
	$q_{0,99}$	2,362	2,840	3,547	10,409	2,612	3,489	4,418	6,085
	$q_{0,999}$	0,836	1,242	1,056	6,127	1,445	0,889	1,056	3,449
$v_A=3$	$q_{0,9}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	10^{-1}	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
	$q_{0,99}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	$q_{0,999}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-8}$

Табл. 10. Квантили q_γ надежности системы $\langle \Gamma_{5<10}|GI|3 \rangle$ в масштабе μ_R

Распределение		$B \sim \Gamma$				$B \sim GW$			
$v_B =$		0,1	0,5	1	5	0,1	0,5	1	5
$v_A=0,1$	$q_{0,9}$	0,346	0,259	0,171	0,139	0,332	0,248	0,171	0,074
	$q_{0,99}$	0,329	0,246	0,162	0,057	0,317	0,236	0,163	0,067
	$q_{0,999}$	0,320	0,238	0,155	0,051	0,306	0,227	0,158	0,063
$v_A=0,5$	$q_{0,9}$	0,140	0,129	0,136	0,176	0,110	0,113	0,117	0,177
	$q_{0,99}$	0,039	0,038	0,042	0,061	0,034	0,039	0,038	0,074
	$q_{0,999}$	0,028	0,030	0,030	0,049	0,028	0,026	0,031	0,047
$v_A=1$	$q_{0,9}$	0,123	0,117	0,109	0,156	0,090	0,109	0,110	0,144
	$q_{0,99}$	0,010	0,013	0,019	0,054	0,011	0,015	0,023	0,029
	$q_{0,999}$	0,004	0,006	0,006	0,032	0,006	0,004	0,006	0,017
$v_A=3$	$q_{0,9}$	10^{-5}	10^{-5}	$7 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}	$9 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	$q_{0,99}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-9}$
	$q_{0,999}$	$9 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$5 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-10}$

аналогичной системы при $l=1$. Корреляция между значениями v_A , v_B и μ_R аналогична результатам табл. 3. При этом также наблюдается слабая чувствительность этой характеристики к виду распределения времени ремонта компонентов и сильная чувствительность к

значениям коэффициента вариации в.б.р. v_A и ремонта v_B компонентов.

В табл. 8 представлены результаты оценки коэффициента вариации v_R времени жизни системы. Аналогично результатам при $l=1$ значения коэффициента вариации v_R

зависят от v_A и v_B . При $v_A=1, 0,5$ коэффициент вариации системы v_R достаточно близок друг к другу при изменении значений v_B и вида распределения времени ремонта B . Поведение v_R при $v_A=0,1$ противоположно результатам табл. 4. С ростом v_B коэффициент вариации системы становится меньше. При $v_A=3$ он также уменьшается, как и при $l=1$.

Число ремонтных устройств сильно влияет на поведение функции надежности и среднее время жизни системы. Очевидно, что квантили надежности также чувствительны к этому параметру (табл. 9). Согласно представленным результатам квантили надежности чувствительны к значению коэффициента вариации v_B времени ремонта. Однако это влияние имеет нелинейный характер. При $v_A=0,1$ с ростом v_B квантили надежности также растут, но при $v_A \neq 0,1$ значения q_l сначала уменьшаются, а затем при наибольшем значении $v_B=5$ возрастают. Квантили надежности также чувствительны и к значениям коэффициента вариации в.б.р. v_A . При этом наибольшее значение рассматриваемых квантилей $q_{0,9}, q_{0,99}, q_{0,999}$ достигается при $v_A=0,5, v_B=5$.

Из рис. 4, б) также видно, что значения квантилей надежности в масштабе среднего времени жизни системы зависят от параметра l (табл. 10). Здесь значения q_l в разы меньше значений, представленных в табл. 6. При этом корреляция между v_A, v_B и q_l в масштабе μ_R аналогична предыдущему примеру.

Заключение

Во второй части работы на основе результатов ее первой части численными методами проведен анализ чувствительности функции надежности системы к виду распределений в.б.р. и ремонта ее элементов и их параметров. Отмечается незначительная чувствительность к виду соответствующих распределений и значительная чувствительность к их коэффициенту вариации.

Естественно, на основе численного анализа отдельных примеров нельзя делать абсолютных выводов относительно вида и величины чувствительности, но приведенные результаты должны насторожить практиков при выводах о надежности систем только по первым моментам в.б.р. и ремонта ее элементов.

Библиографический список

1. Рыков В.В., Иванова Н.М. О функции надежности системы $\langle GI_{k:n}|GI| \rangle$. Часть I. Аналитические результаты // Надежность. 2024. № 3. С. 34-43. DOI: 10.21683/1729-2646-2024-24-3-34-43

2. Rykov V., Kozyrev D., Filimonov A. et al. On reliability of a k-out-of-n system with general repair time distribution // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2021. Vol. 35. No 4. Pp. 885-902. DOI: 10.1017/S0269964820000285

References

1. Rykov V.V., Ivanova N.M. On the dependability function of the $\langle GI_{k:n}|GI| \rangle$ system. Part I. Analytical results. *Dependability* 2024;24(3):34-43. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-3-34-43>. (in Russ.)

2. Rykov V., Kozyrev D., Filimonov A. et al. On reliability of a k-out-of-n system with general repair time distribution. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 2021;35(4):885-902. DOI: 10.1017/S0269964820000285.

Сведения об авторах

Рыков Владимир Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина, проспект Ленинский, дом 65, корпус 1, Москва, Российская Федерация, e-mail: vladimir_rykov@mail.ru

Иванова Ника Михайловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем управления РАН, ул. Профсоюзная, д. 65, Москва, Российская Федерация, e-mail: nm_ivanova@bk.ru

About the authors

Vladimir V. Rykov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor, Gunkin University, 65, korp. 1 Leninsky prospekt, Moscow, Russian Federation, e-mail: vladimir_rykov@mail.ru

Nika M. Ivanova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya str., Moscow, Russian Federation, e-mail: nm_ivanova@bk.ru

Вклад авторов

Рыков В.В. сформулировал задачу исследования, разработал метод ее решения и получил аналитические результаты.

Иванова Н.М. разработала алгоритм имитационного моделирования и выполнила численный анализ.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.