

О функции надежности системы $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$. Часть I.

Аналитические результаты

On the dependability function of the $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ system.

Part I. Analytical results

Рыков В.В.¹, Иванова Н.М.^{2*}

Rykov V.V.¹, Ivanova N.M.^{2*}

¹Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина

²Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

¹National University of Oil and Gas (Gubkin University)

²V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences

*nm_ivanova@bk.ru



Рыков В.В.



Иванова Н.М.

Резюме. Целью статьи является исследование основных характеристик надежности восстанавливаемых систем k -из- n с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта их компонентов, а также общим числом ремонтных единиц. Система k -из- n представляет собой систему, состоящую из n компонентов, которая отказывает при отказе ее k ($k \leq n$) компонентов. Для восстановления отказавших компонентов имеется I ремонтных устройств. Такая система обозначается как $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$. Для исследования привлекаются методы маркированных марковских процессов и теории порядковых статистик. С использованием предложенного подхода построена математическая модель системы, приведены преобразования меток и аналитические выражения для вычисления их распределений. В следующей части статьи на основе предлагаемого метода сформулирован алгоритм имитационного моделирования для оценки основных характеристик надежности. Он не только позволит провести численное исследование таких систем, но и послужит инструментом анализа чувствительности характеристик надежности к исходным параметрам системы.

Abstract. The paper aims to study the primary dependability characteristics of restorable k -out-of- n systems with arbitrary distributions of failure-free time and time to component repair, as well as the total number of repair units. A k -out-of- n system is a system consisting of n components that fails when k out of its ($k \leq n$) components fail. I repair devices are available for restoring failed components. Such a system is denoted as $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$. The research employed marked Markov processes and the theory of order statistics. Using the proposed approach, a mathematical system model was constructed, marks transformations were mapped and analytic expressions for calculating their distributions were given. In the following part of the paper, using the proposed method, a simulation algorithm will be defined for the purpose of assessing the key dependability characteristics. It will not only enable a numerical study of such systems, but will also help analyse the sensitivity of the dependability characteristics to the initial system parameters.

Ключевые слова: Маркированный марковский процесс, система $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$, произвольные распределения времени безотказной работы и восстановления, анализ чувствительности.

Keywords: marked Markov process, $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ system, arbitrary distributions of fault-free operation and repair times, sensitivity analysis.

Для цитирования: Рыков В.В., Иванова Н.М. О функции надежности системы $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$. Часть I. Аналитические результаты // Надежность. 2024. №3. С. 34-43. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-3-34-43>

For citation: Rykov V.V., Ivanova N.M. On the dependability function of a $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ system. Part I. Analytical results. Dependability 2024;3:34-43. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-3-34-43>

Поступила: 07.05.2024 / **После доработки:** 08.07.2024 / **К печати:** 09.09.2024

Received on: 07.05.2024 / **Revised on:** 08.07.2024 / **For printing:** 09.09.2024

Введение

Со времени А.А. Маркова (старшего, 1856 – 1922) основным объектом изучения стохастических процессов как в непрерывном, так и дискретном времени, стали марковские процессы, обобщение и развитие которых продолжается до наших дней. Неоспоримый вклад в развитие теории марковских процессов, как и вообще теории случайных процессов, внес А.Н. Колмогоров (1903 – 1987).

Широкое развитие и применение получили такие обобщения марковских процессов, как полумарковские, регенерирующие, полурегенерирующие и др. процессы (см. в частности [1]). В последующие годы для исследования стохастических процессов с дискретным временем, зависящих от некоторого набора событий, использовалось понятие обобщенного полумарковского процесса. В работе [2] эта модель была использована для исследования стохастических явлений, дискретно изменяющихся во времени и зависящих от дискретных событий. Было показано, что многие модели теории массового обслуживания (ТМО), теории надежности и стохастических сетей могут быть описаны в рамках этих моделей. В последующем для обобщенных полумарковских процессов, опираясь на их регенеративную структуру, были доказаны законы больших чисел и функциональные предельные теоремы [3], [4].

Классические результаты (для процессов с конечным множеством состояний) в этом направлении известны давно, и новые результаты в этом направлении связаны в основном с исследованием условий, допускающих использование регенеративной структуры изучаемых моделей при расширении пространства их состояний. Заметим, однако, что несмотря на многочисленные примеры возможного применения предложенной модели конкретных исследований систем обслуживания или надежности в этих работах не приведено.

В ряде наших работ для исследования сложных стохастических моделей также использовались идеи регенерации, при этом понятие регенерации обобщалось в сторону построения вложенных и разложимых полурегенерирующих процессов, что открывало возможности реального исследования конкретных систем надежности. Так, в работах [5], [6] с помощью разложимых полурегенерирующих процессов была рассмотрена модель системы холодного дублирования с произвольными распределениями времени безотказной работы и ремонта ее компонентов.

Этот метод оказался не применим для исследования аналогичной системы горячего дублирования и других более сложных моделей. Для исследования аналогичной системы горячего дублирования в [7] было введено понятие маркированного марковского процесса (ММП), который оказался весьма плодотворным. В настоящей работе этот метод используется

для исследования системы k -из- n с произвольным числом ремонтирующих устройств и произвольными распределениями времени безотказной работы (в.б.р.) и ремонта ее компонентов. При этом основное внимание уделяется разработке методов и процедур вычисления основных характеристик модели и исследованию ее свойств, таких как чувствительность ее характеристик к виду исходных распределений их параметров.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе представлена постановка задачи и собраны основные обозначения и предположения, а также приведены необходимые предварительные сведения. Затем в разделе 2 приводятся построение математической модели системы в терминах ММП и преобразования меток, а также вычисляются их переходные вероятности. В разделе 3 приводятся аналитические выражения для распределения меток. Наконец, в разделе 4 приводятся выражения для вычисления функции надежности модели в терминах меток. Статья заканчивается заключением, где приведены некоторые идеи возможного дальнейшего развития предложенного подхода.

1. Постановка задачи. ММП

1.1. Описание системы. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим восстанавливаемую систему k -из- n с произвольными распределениями в.б.р. и ремонта ее элементов и произвольным числом ремонтирующих устройств, для которой будем использовать обозначение $\langle GI_{k \leq n} | GI | L \rangle$ ($L < k$). Обозначим через

- $A_i : (i = 1, 2, \dots)$ в.б.р. элементов системы, которые предполагаются независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) случайными величинами (с.в.) и через $A(t) = P\{A_i \leq t\}$ их общую по предположению абсолютно непрерывную функцию распределения (ф.р.) с плотностью распределения (п.р.) $a(t) = A'(t)$ и математическим ожиданием $a = E[A_i]$;
- $B_i : (i = 1, 2, \dots)$ длительности ремонтов элементов системы, которые предполагаются н.о.р. с.в. с общей для них абсолютно непрерывной ф.р. $B(t) = P\{B_i \leq t\}$, п.р. $b(t) = B'(t)$ и математическим ожиданием $b = E[B_i]$.

В дальнейшем, как правило, с.в. обозначаются главными латинскими буквами $X, Y, \dots$, а их значения – малыми $x, y, \dots$ (исключения составляют упомянутые выше распределения и математические ожидания исходных с.в.), при этом многомерные (векторные) с.в. и их значения обозначаются соответствующими полужирными буквами.

Для исследования этой модели используются понятия ММП и теории порядковых статистик. В следующих разделах приводятся необходимые о них сведения.

1.2. ММП

Под ММП понимается процесс с дискретным параметром $t=0,1,\dots$

$$Z(t) = (J(t), \mathbf{X}(t)), t = 0, 1, \dots,$$

первая компонента которого представляет собой марковскую цепь $J(t)$ с не более, чем счетным пространством состояний $\mathcal{J}$, а вторая – набор случайных меток $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{X}_j(t) : j \in \mathcal{J}\}$, каждая из которых может представлять собой вектор, компоненты которого принимают значения в измеримых пространствах меток $(E_j, \mathcal{E}_j)$. Такой процесс задается:

- переходными вероятностями $p_{ij}(\mathbf{X}_i)$ марковской цепи J , зависящими от содержания метки $\mathbf{X}_i$ в основном состоянии i на шаге (в момент времени) t ;
- операторами преобразования меток $\Phi_{ij}(\mathbf{X}_i)$ при переходе из состояния i в состояние j , зависящими от содержания $\mathbf{X}_i$ метки в состоянии i и значения некоторой с.в. ξ_i в момент времени t из последовательности н.о.р. с.в. ξ_i ($t = 1, 2, \dots$) и их распределениями.

Естественно, для полного описания такого процесса необходимо задать начальное распределение $\alpha = (\alpha_j : j \in \mathcal{J})$ основной марковской цепи $J(t)$, начальное распределение $\mu(0, \cdot) = \{\mu_j(0, \cdot) : j \in \mathcal{J}, \cdot \in \prod_j \mathcal{E}_j\}$ меток $\mathbf{X}$ и распределение $F(\cdot)$ с.в. ξ_i .

На основе такой модели можно исследовать широкий класс прикладных моделей теории надежности, теории массового обслуживания, стохастических сетей и др.

1.3. Вспомогательные сведения и преобразования

Далее нам потребуются некоторые сведения из теории вариационных рядов (порядковых статистик). Обозначим через

$$X^{(1)} \leq X^{(2)} \leq \dots \leq X^{(i)} \leq \dots \leq X^{(n)}$$

вариационный ряд для независимой выборки с.в. X_i ($i = 1, n$). Здесь для сохранения в дальнейшем единства обозначений для членов вариационного ряда вместо традиционных нижних индексов в скобках использованы верхние индексы. Соответствующие значения с.в. также будем обозначать верхними индексами, только без скобок. Известно (см. [8]), что совместная п.р. элементов вариационного ряда $X^{(i)}$ из выборки $\mathbf{X}_i$ независимых с.в. с п.р. $f(x)$ имеет вид

$$f(x^1, \dots, x^n) = n! \prod f(x^i) \text{ в области } x^1 \leq \dots \leq x^i \leq \dots \leq x^n. \quad (1)$$

Определим операции уменьшения и сдвига $Sh[\mathbf{X}_n, X]$ вариационного ряда $\mathbf{X}_n$ на величину $X \leq X^{(1)}$ и пополнения $Ad[\mathbf{X}_n, X]$ вариационного ряда величиной X . Операция уменьшения членов вариационного ряда определяются соотношениями

$$X^{(i)}(Sh[\mathbf{X}_n, X]) = X^{(i)} - X, \text{ при } i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

и для $X = X^{(1)}$ превращается в операцию сдвига, так как при этом первая компонента нового вектора обнуляется и удаляется. Операция пополнения вариационного ряда независимой от его членов величиной X задается для них соотношением

$$X^{(i)}(Ad[\mathbf{X}_n, X]) = \begin{cases} X^{(i)} & \text{для } i < r, \\ X & \text{для } i = r, \\ X^{(i+1)} & \text{для } i > r, \end{cases} \quad (3)$$

где $r = \max\{i : X^{(i)} \leq X\}$. Аналогичными соотношениями распространим действие этих операторов на значения x_n векторов $\mathbf{X}_n$ и с.в. X ,

$$x^i(Sh[\mathbf{x}_n, x]) = x^i - x, \text{ при } i = \overline{1, n},$$

$$x^i(Ad[\mathbf{x}_n, x]) = \begin{cases} x^i & \text{для } i < r, \\ x & \text{для } i = r, \\ x^{i+1} & \text{для } i > r, \end{cases}$$

Для п.р. сдвинутого и пополненного векторов справедлива лемма.

Лемма 1. Предположим, что п.р. $f(x^1, \dots, x^n)$ исходного вектора непрерывна по всем переменным. Тогда п.р. f_{Sh} сдвинутого упорядоченного вектора $\mathbf{X}_n$ на независимую от него с.в. X с ф.р. G и п.р. g , удовлетворяющую условию $P\{X \leq X^{(1)}\} = 1$, определяется соотношением

$$f_{Sh}(x^1, \dots, x^n) = \int_0^{x^1} f(x^1 + u, \dots, x^n + u) g(u) du; \quad (4)$$

в частности, при $X = X^{(1)}$ справедливо соотношение

$$f_{Sh}(x^2, \dots, x^n) = \int_0^{x^2} f(x^1, x^2 + x^1, \dots, x^n + x^1) dx^1; \quad (5)$$

п.р. f_{Ad} дополненного упорядоченного вектора $Ad[\mathbf{X}_n, X]$ независимой от него с.в. X с ф.р. G и п.р. g имеет вид

$$f_{Ad}(x^1, \dots, x^{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n+1} (G(x^i) - G(x^{i-1})) g(x^i) f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}), \quad (6)$$

где $x^0 = 0, x^{n+2} = \infty$.

Доказательство. Действительно, так как преобразование сдвига является невырожденным линейным преобразованием с детерминантом, равным единице, то формулы (4), (5) следуют из общих формул вычисления п.р. преобразованных с.в. Обозначим ф.р. с.в. $\mathbf{X}_{Sh} = \mathbf{X} - X$ через F_{Sh} , и пусть g п.р. с.в. X . Запишем ф.р.

$$F_{Sh}(\mathbf{x}) = P\{\mathbf{X}_n \leq \mathbf{x} + x\} = \int_0^{x_1} P\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x} + u\} g(u) du.$$

Дифференцируя ф.р. F_{Sh} слева n раз по всем переменным и справа под знаком интеграла, получим формулу (4) в виде

$$f_{Sh}(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} f(x+u)g(u)du =$$

$$\int_0^{x^1} f(x^1+u, \dots, x^n+u)g(u)du.$$

Если $X=X^{(1)}$, то с.в. $\mathbf{X}_{Sh}$ превращается в вектор $(X^{(2)}-X^{(1)}, \dots, X^{(n)}-X^{(1)})$, а размерность ее ф.р. убывает на 1. Так как совместная п.р. вектора $\mathbf{X}$ равна $f(x^1, \dots, x^n)$, то представляя ее в терминах вероятностей, имеем

$$f_{Sh}(x^2, \dots, x^n)dx^2, \dots, dx^n =$$

$$\int_0^{x^2} P\{X^{(1)} \in dx^1, X^{(2)}-X^{(1)} \in dx^2, \dots, X^{(n)}-X^{(1)} \in dx^n\} =$$

$$= \int_0^{x^2} f(x^1, x^1+x^2, \dots, x^n+x^1)dx^1 dx^2 \dots dx^n,$$

откуда следует соотношение (5).

Далее, при пополнении упорядоченного вектора $\mathbf{X}_n$ с.в. X (с ф.р. $G(x)$ и п.р. g) эта с.в. может занять любую позицию $X^{(i)}$ между значениями x^{i-1} и x^i с вероятностью $G(x^i)-G(x^{i-1})$ и принять значение x^i с вероятностью $g(x^i)dx^i$. Поэтому представляя плотности распределения с помощью вероятностей, имеем

$$f_{Ad}(x^1, \dots, x^{n+1})dx^1 \dots dx^{n+1} = P\{X^i \in dx^i (i = \overline{1, n+1})\} =$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n+1} P\{x^{i-1} < X \leq x^i\} P\{X \in dx^i\} P\{X^{(j)} \in dx^j j \neq i\} =$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n+1} (G(x^i) - G(x^{i-1}))g(x^i) \cdot$$

$$\cdot f(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1})dx^1 \dots dx^{n+1},$$

что доказывает соотношение (6) и завершает доказательство леммы.

1.4. Постановка задачи

С помощью предложенного подхода можно исследовать различные стационарные и нестационарные характеристики модели, такие как:

- время до первого отказа системы R_0 , его распределение $F_{R_0}(t) = P\{R_0 \leq t\}$ и его среднее значение $\mu_{R_0} = E[R_0]$, или функцию надежности $R_0(t) = P\{R_0 > t\}$;
- для восстанавливаемой системы время между отказами R , его распределение $F_R(t) = P\{R \leq t\}$ и его среднее значение $\mu_R = E[R]$, или функцию надежности между отказами $R(t) = P\{R > t\}$;
- для восстанавливаемой системы – стационарные вероятности состояний системы $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{J(t) = j\}$ и стационарные вероятности безотказной работы – коэффициент готовности $K_{\text{гот}}$.

Однако при исследовании стационарного режима работы системы возможны различные процедуры восстановления системы: частичный или полный ремонт, что потребует дополнительного преобразования меток и,

соответственно, их дополнительного алгоритмического исследования. Поэтому в данной работе мы ограничимся исследованием поведения системы до первого отказа и ее функции надежности.

Далее предлагается построение ММП для рассматриваемой модели $\langle GI_{k \leq n} | GI | L \rangle$.

2. Построение математической модели системы $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ и преобразование меток

2.1. Построение математической модели системы $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ на основе ММП

В качестве математической модели системы $\langle GI_{k \leq n} | GI | I \rangle$ выберем последовательность

$$Z(t) = \{J(t), V(t)\}, t = 0, 1, \dots \quad (7)$$

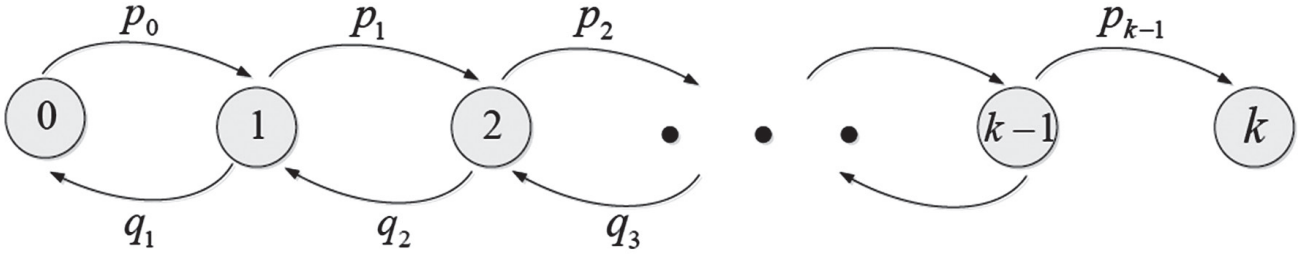
по моментам $S(t) t = 0, 1, \dots$ изменения состояний системы, которая, как будет показано позже, образует ММП. Здесь $J(t)$ – последовательность состояний системы с множеством состояний $\mathcal{J} = (0, 1, 2, \dots, k)$, где состояние j означает число компонентов системы, находящихся в состоянии отказа. В качестве меток $\mathbf{V}_j(t) = (\mathbf{X}_j(t), \mathbf{Y}_j(t))$ процесса в состоянии j на шаге t выберем набор остаточных в.б.р. $\mathbf{X}_j(t) = (X_j^{(1)}(t), \dots, X_j^{(n-j)}(t))$ элементов системы и набор их остаточных длительностей ремонта $\mathbf{Y}_j(t) = (Y_j^{(1)}(t), \dots, Y_j^{(j \wedge l)}(t))$, расположенных в порядке возрастания. Здесь верхний индекс указывает порядковый номер метки, нижний – номер состояния системы, переменная в скобках – это номер шага. Моменты $S(t) t = 0, 1, \dots$ изменения состояний системы определяются соотношениями

$$S(t) = S(t-1) + T_{J(t)}(t), t = 0, 1, \dots, S_0 = 0, \quad (8)$$

где интервал между моментами изменения состояний $T(t)$ для текущего состояния $J(t)$ определяется соотношением

$$T_{J(t)}(t) = \min [X_{J(t)}^{(1)}(t), Y_{J(t)}^{(1)}(t)]. \quad (9)$$

Заметим, что так как на любом шаге t величина $\mathbf{Y}_0(t) = Y_0^{(0)}(t)$ в состоянии $J(t)=0$ не определена, ее следует доопределить, положив $Y_0^{(0)}(t) = \infty$. Если в качестве начального состояния системы на шаге $t=0$ выбрать состояние, при котором все элементы системы исправны, $J(0)=0$, то метки имеют вид $X_0^{(i)}(0) = A^{(i)}$, $(i = \overline{1, n})$, $Y_0^{(0)}(0) = \infty$, где набор с.в. $A^{(i)}$ представляет собой компоненты вариационного ряда для выборки n н.о.р. с.в. $A_i \in A(\cdot)$ – в.б.р. компонентов системы. В последующем процесс оказывается в состоянии $j=0$ с некоторым набором меток, содержание и распределение которых будет вычислено позже.


 Рис. 1. Граф переходов последовательности $J(t)$

Возможные переходы основной последовательности $J(t)$, описывающей поведение рассматриваемой системы, работающей до первого отказа (с поглощением в состоянии k), представлены на графе переходов (рис. 1), который выглядит как типичный граф переходов процесса гибели и размножения.

Вероятности переходов основной марковской цепи явно не зависят от номера шага, то есть последовательность $J(t)$ является однородной, и вычисляются в зависимости от содержания меток по формулам

$$p_j = P\{J(t+1) = j+1 | J(t) = j\} = P\{X_j^{(l)}(t) \leq Y_j^{(l)}(t)\},$$

$$q_j = P\{J(t+1) = j-1 | J(t) = j\} = P\{X_j^{(l)}(t) > Y_j^{(l)}(t)\}.$$

В дальнейшем обозначим для простоты через Φ_j и Ψ_j операторы преобразования меток процесса Z при переходе из состояния j в состояния $j+1$ и $j-1$ соответственно, при этом так как операторы (как и вероятности переходов) от номера шага явно не зависят, то переменную t в этих обозначениях будем опускать

$$\mathbf{V}_{j+1} = \Phi_{j,j+1}[\mathbf{V}_j] \equiv \Phi_j[\mathbf{V}_j], \quad \mathbf{V}_{j-1} = \Phi_{j,j-1}[\mathbf{V}_j] \equiv \Psi_j[\mathbf{V}_j].$$

При описании работы этих операторов будем пользоваться операторами сдвига Sh и пополнения Ad для с.в. и их значений, определенными ранее соотношениями (2), (3).

При переходе вверх оператор Φ_j работает как сдвиг на величину $X_j^{(l)}$ для обеих компонент метки $\mathbf{V}_j$: $\Phi_j[\mathbf{V}_j] = Sh[\mathbf{V}_j, X_j^{(l)}]$ с последующим пополнением компоненты $\mathbf{Y}_j$ с помощью с.в. B : $\Phi_j[\mathbf{Y}_j] = Ad[Sh[\mathbf{Y}_j, X_j^{(l)}], B]$. При переходе вниз, наоборот, оператор Ψ_j работает как сдвиг на величину $Y_j^{(l)}$ для обеих компонент метки $\mathbf{V}_j$: $\Psi_j[\mathbf{V}_j] = Sh[\mathbf{V}_j, Y_j^{(l)}]$ с последующим пополнением сдвинутой компоненты X_j с помощью с.в. A : $\Psi_j[\mathbf{X}_j] = Ad[Sh[\mathbf{X}_j, Y_j^{(l)}], A]$. Опишем подробнее эти преобразования.

2.2. Преобразование меток

Рассмотрим поведение системы до ее первого отказа, то есть поведение процесса Z до момента первого попадания (поглощения) в состояние k . С помощью операторов сдвига и пополнения преобразования меток для

поглощающего в состоянии k процесса Z в терминах их компонент представлены в следующей теореме.

Теорема 1. При переходе из состояния j в состояние $j+1 \leq k$, то есть при отказе очередного элемента, метка $\mathbf{X}_j$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{j+1}^{(i)}(t+1) &= \Phi_j[\mathbf{X}_j(t)] = Sh[\mathbf{X}_j(t), X_j^{(l)}] = \\ &= X_j^{(i+1)}(t) - X_j^{(l)}(t) \quad (i = \overline{1, n-j-1}); \end{aligned} \quad (10)$$

а преобразование метки $\mathbf{Y}_j$ зависит от состояния системы и при $j < l$ для всех $i = \overline{1, j} \wedge l$ имеет вид

$$\begin{aligned} Y_{j+1}^{(i)}(t+1) &= \Phi_j[\mathbf{Y}_j(t)] = Ad[Sh[\mathbf{Y}_j(t), X_j^{(l)}(t)], B_{t+1}] = \\ &= \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - X_j^{(l)}(t) & \text{при } i < r, \\ B_{t+1} & \text{при } i = r, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - X_j^{(l)}(t) & \text{при } i > r, \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

где $r = \max\{i: Y_j^{(i)}(t) - X_j^{(l)}(t) \leq B_{t+1}\}$; а при $l \leq j \leq k$ равно

$$\begin{aligned} Y_{j+1}^{(i)}(t+1) &= \Phi_j[\mathbf{Y}_j(t)] = Sh[\mathbf{Y}_j(t), X_j^{(l)}(t)] = \\ &= Y_j^{(i+1)}(t) - X_j^{(l)}(t) \quad (i = \overline{1, n-j-1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, при переходе из состояния $j \geq 1$ в состояние $j-1$ при $X_j^{(l)}(t) > Y_j^{(l)}(t)$, то есть при восстановлении одного из элементов системы, компоненты $X_{j-1}^{(i)}$ метки $\mathbf{X}_{j-1}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{j-1}^{(i)}(t+1) &= \Psi_j[\mathbf{X}_j(t)] = Sh[\mathbf{X}_j(t), Y_j^{(l)}] = \\ &= X_j^{(i)}(t) - Y_j^{(l)}(t) \quad (i = \overline{1, n-j}), \end{aligned} \quad (13)$$

преобразование метки $\mathbf{Y}_j$ при переходе из состояния j в состояние $j-1$ зависит от исходного состояния и имеет вид: при $j \leq l$

$$\begin{aligned} Y_{j-1}^{(i)}(t+1) &= \Psi_j[\mathbf{Y}_j(t)] = Sh[\mathbf{Y}_j(t), Y_j^{(l)}(t)] = \\ &= Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(l)}(t) \quad (i = \overline{1, j}); \end{aligned} \quad (14)$$

при $l < j \leq k$

$$\begin{aligned}
Y_{j-1}^{(i)}(t+1) &= \Psi_j[Y_j(t)] = \\
&= Ad[Sh[Y_j(t), Y_j^{(i)}], B_{t+1}] = \\
&= \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(i)}(t) & \text{при } i < r, \\ B_{t+1} & \text{при } i = r, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(i)}(t) & \text{при } i > r, \end{cases} \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\exists de r = \max \{i : Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(i)}(t) \leq B_{t+1}\}.$$

Доказательство. Действительно, переход из состояния j в состояние $j+1$ на шаге t происходит при отказе одного из элементов системы с вероятностью p_j . При этом компоненты метки $\mathbf{X}_j$ сдвигаются на величину $X_j^{(i)}$ минимальной остаточной длительности жизни элементов системы в этом состоянии, что доказывает формулу (10). Аналогично остаточные длительности ремонта $Y_j^{(i)}$ уменьшаются на величину $X_j^{(i)}$, то есть метки сдвигаются на эту величину. Кроме того, при наличии свободных ремонтирующих устройств, то есть при $j < l$, в компоненты $Y_j^{(i)}$ метки $\mathbf{Y}_j$ добавляется новая компонента, соответствующая длительности B_{t+1} ремонта вновь отказавшей компоненты, что доказывает формулу (11). Если же все ремонтирующие устройства заняты, то есть при $l \leq j \leq k$, вновь отказавшая компонента становится в очередь и компоненты $Y_j^{(i)}$ метки $\mathbf{Y}_j$ просто сдвигаются на величину $X_j^{(i)}$, что доказывает формулу (12).

Аналогично, переход из состояния j в состояние $j-1$ на шаге t возможен только при $j \geq 1$ и происходит при восстановлении одного из отремонтированных элементов системы с вероятностью q_j . При этом остаточные длительности жизни элементов системы уменьшаются на величину $Y_j^{(i)}$, то есть компоненты метки $\mathbf{X}_j$ сдвигаются на величину $Y_j^{(i)}$. Кроме того, в метку $\mathbf{X}_j$ добавляется новая компонента, соответствующая длительности жизни A_{t+1} вновь отремонтированной компоненты системы, что доказывает формулу (13).

Наконец, преобразование метки $\mathbf{Y}_j$ при переходе из состояния j в состояние $j-1$ зависит от наличия ожидающих ремонта элементов системы, то есть от ее состояния. При $j \leq l$ компоненты вектора $\mathbf{Y}_j$ просто сдвигаются на величину $Y_j^{(i)}$, что доказывает формулу (14). Однако при наличии ожидающих ремонта элементов системы один из них поступает на ремонт и компоненты вектора дополняются в соответствии с формулой (15). Таким образом все формулы (11)–(15) доказаны, что завершает доказательство теоремы.

В этих выражениях с.в. A_{t+1} и B_{t+1} являются независимыми от прошлого $F_t = \sigma\{Z(s) : s \leq t\}$ процесса Z . Таким образом, полученные выражения показывают, что последовательность меток вычисляется рекуррентно с помощью независимых от прошлого процесса $Z(t)$ с.в., то есть набор меток образует в пространстве меток марковскую цепь специального вида.

2.3. Вычисление переходных вероятностей преобразования меток

Опираясь на полученные преобразования меток $\mathbf{V}_j = (\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$, вычислим теперь их переходные вероятности (ядра), распространив действие операторов сдвигов Sh и пополнения Ad на их значения $\mathbf{v}_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$, заменяя в формулах (2, 3) заглавные буквы на прописные

$$x_{Sh}^i[\mathbf{x}_n, x] = x^i - x, \quad \text{при } i = \overline{1, n};$$

$$x_{Ad}^i[\mathbf{x}_n, x] = \begin{cases} x^i & \text{для } i < r, \\ x & \text{для } i = r, \\ x^{i+1} & \text{для } i > r, \end{cases} \quad (16)$$

где $r = \max \{i : x^i \leq x\}$.

Через $P_j(\mathbf{v}_j, C_{j+1})$ и $Q_j(\mathbf{v}_j, C_{j-1})$ обозначим переходные вероятности (ядра) преобразований меток при переходе из состояния основного процесса j в состояния $j+1$ и $j-1$ соответственно,

$$P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) = P\{X_j^{(i)} \leq Y_j^{(i)}, \mathbf{V}_{j+1} \in C_{j+1} \mid \mathbf{V}_j = \mathbf{v}_j\};$$

$$Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) = P\{X_j^{(i)} > Y_j^{(i)}, \mathbf{V}_{j-1} \in C_{j-1} \mid \mathbf{V}_j = \mathbf{v}_j\}.$$

Имея в виду, что при переходе основного процесса из одного состояния в другое значения $\mathbf{v}_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ меток $\mathbf{V}_j = (\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j)$ преобразуются с помощью операторов сдвигов и пополнения в соответствии с формулами (10)–(15), при этом только одна из них приобретает новое значение, определим переходные вероятности (ядра) на специальных множествах. При построении этих множеств будем пользоваться следующими обозначениями:

- для интервалов

$$\Delta_j^i Sh[\mathbf{x}_j, y_j^1] = (x_j^{i-1} - y_j^1, x_j^i - y_j^1],$$

$$\Delta_j^i Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1] = (y_j^{i-1} - y_j^1, y_j^i - y_j^1];$$

- для приращений ф.р. в соответствующих точках

$$\Delta_j^i A(Sh[\mathbf{x}_j, y_j^1]) = A(x_j^i - y_j^1) - A(x_j^{i-1} - y_j^1),$$

$$\Delta_j^i B(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1]) = B(y_j^i - y_j^1) - B(y_j^{i-1} - y_j^1),$$

$$\Delta_j^i A(Sh[\mathbf{x}_j, x_j^1]) = A(x_j^i - x_j^1) - A(x_j^{i-1} - x_j^1),$$

$$\Delta_j^i B(Sh[\mathbf{y}_j, x_j^1]) = B(y_j^i - x_j^1) - B(y_j^{i-1} - x_j^1).$$

Используя эти обозначения, построим специальные множества, в которых возможен переход за один шаг. Если при отказе одной из компонент до отказа всей системы в целом имеются свободные ремонтные устройства, то система переходит из состояния $j < l$ в

состояние $j+1$. При этом определим множество $C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j)$ как множество тех значений $\mathbf{v}_{j+1}$ меток $\mathbf{V}_{j+1}$, для которых компонента $\mathbf{x}_{j+1}$ приобретает значение сдвинутой на величину x_j^1 компоненты $\mathbf{x}_j$, а значение $\mathbf{y}_j$ метки $\mathbf{Y}_j$ после сдвига на величину x_j^1 дополняется новой компонентой на позицию i , формально:

$$C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j+1} : Ad[Sh[\mathbf{v}_j, x_j^1], B_{i+1} \in \Delta_j^i Sh[\mathbf{y}_j, x_j^1]]\}.$$

Аналогично, при $j \geq l$, когда все средства ремонта заняты, определим множество $C_{j+1}(\mathbf{v}_j)$ как множество тех значений $\mathbf{v}_{j+1}$ метки $\mathbf{V}_{j+1}$, которые получаются простым сдвигом значений $\mathbf{v}_j$ на величину x_j^1 , формально:

$$C_{j+1}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j+1} : Sh[\mathbf{v}_j, x_j^1]\}.$$

Соответственно, при окончании ремонта одного из элементов системы он возвращается к работе и в случае отсутствия очереди на ремонт новых элементов, то есть при переходе основного процесса из состояния $j \leq l$ в состояние $j-1$, определим множество $C_{j-1}^{(i)}(\mathbf{v}_j)$ как набор сдвинутых на величину $y_j^{(i)}$ значений меток $\mathbf{v}_j$ и пополнение на величину A_{i+1} вновь начавшего работать элемента на i -ую позицию сдвинутой на величину y_j^1 метки $\mathbf{x}_j$, формально:

$$C_{j-1}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j-1} : Ad[Sh[\mathbf{v}_j, y_j^1], A_{i+1} \in \Delta_j^i Sh[\mathbf{x}_j, y_j^1]]\}.$$

Аналогично, при окончании ремонта одного из элементов системы, когда имеются ожидающие ремонта элементы, то есть при переходе из состояния $j > l$ в состояние $j-1$, дополнительно к предыдущему необходимо учесть постановку на ремонт элемента из очереди. Поэтому дополнительно к предыдущему определим множество $C_{j-1}^{(i_1, i_2)}(\mathbf{v}_j)$ как набор сдвинутых на величину y_j^1 значений $\mathbf{v}_j$ метки $\mathbf{V}_j$, при этом сдвинутое на величину y_j^1 значение $\mathbf{x}_j$ метки $\mathbf{X}_j$ дополняется на некоторую позицию i_1 величиной в.б.р. A_{i+1} вновь отремонтированного элемента, а значение $\mathbf{y}_j$ метки $\mathbf{Y}_j$ дополняется на некоторую i_2 -ую позицию временем ремонта B_{i+1} принятого к ремонту элемента, поступившего из очереди. Формально это запишется как

$$C_{j-1}^{(i_1, i_2)}(\mathbf{v}_j) = \left\{ \mathbf{v}_{j-1} : Ad \left[\begin{array}{c} Sh[\mathbf{v}_j, y_j^1], \\ A_{i+1} \in \Delta_j^{i_1} A(Sh[\mathbf{x}_j, y_j^1]), \\ B_{i+1} \in \Delta_j^{i_2} B(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1]) \end{array} \right] \right\}.$$

В терминах введенных множеств переходные вероятности (ядра) последовательности меток представлены в следующей лемме.

Лемма 2. *Переходные вероятности (ядра) для преобразования меток при переходе основного процесса из состояния j в состояние $j+1$ имеют вид: при $j < l$*

$$P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) = \begin{cases} \Delta_j^i B(Sh[\mathbf{y}_j, x_j^1]) & \text{для } C_{j+1} = C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

при $j \geq l$

$$P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) = \begin{cases} 1_{Ad[\mathbf{v}_j, y_j^1] \in C_{j+1}} & \text{для } C_{j+1} = C_{j+1}(\mathbf{v}_j) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (17)$$

Аналогично при переходе из состояния j в состояние $j-1$ переходные вероятности имеют вид: при $j \leq l$

$$Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) = \begin{cases} \Delta_j^i A(Sh[\mathbf{x}_j, y_j^1]) & \text{для } C_{j-1} = C_{j-1}^{(i)}(\mathbf{v}_j) \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

при $j > l$

$$Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) = \begin{cases} \Delta_j^{i_1} A(Sh[\mathbf{x}_j, y_j^1]) \cdot \Delta_j^{i_2} B(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1]) & \text{для } C_{j-1} = C_{j-1}^{(i_1, i_2)}(\mathbf{v}_j) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (18)$$

Доказательство. Доказательство вытекает непосредственно из определения множеств $C_{j-1}(\mathbf{v}_j)$, $C_{j-1}^{(i)}(\mathbf{v}_j)$ и $C_{j+1}(\mathbf{v}_j)$, $C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j)$.

На основе полученных выражений рассмотрим распределения меток.

3. Распределения меток

3.1. Распределения меток в терминах мер

Рассмотрим сначала распределения меток в терминах их мер. Обозначим через $\mu_j(t, \cdot)$ меры меток $\mathbf{V}_j(t) = (\mathbf{X}_j(t), \mathbf{Y}_j(t))$ на шаге t ,

$$\mu_j(t, \cdot) = P\{\mathbf{V}_j(t) \in \cdot\}.$$

Вспоминая, что переходные ядра преобразований меток P_j и Q_j выражаются в терминах распределений с.в. A и B и опираясь на преобразования меток, выпишем соответствующие соотношения для преобразования мер

$$\begin{aligned} \mu_j(t+1, \cdot) &= \int \mu_{j-1}(t, d\mathbf{v}_{j-1}) P_{j-1}(\mathbf{v}_{j-1}, \cdot) + \\ &+ \int \mu_{j+1}(t, d\mathbf{v}_{j+1}) Q_{j+1}(\mathbf{v}_{j+1}, \cdot), \end{aligned}$$

которые в операторных обозначениях можно переписать в виде

$$\mu_j(t+1, \cdot) = \mu_{j-1} P_{j-1}(t, \cdot) + \mu_{j+1} Q_{j+1}(t, \cdot).$$

Заметим, что за счет сдвигов и пополнений мера меток распространяется на всю σ -алгебру измеримых множеств состояний меток.

3.2. Распределения меток в терминах плотностей

В частном случае в предположении об абсолютной непрерывности распределений с.в. A и B меры меток процесса Z также абсолютно непрерывны,

$$\mu_j(t; C) = \int_C \dots \int f_j(t; x^1, \dots, x^{n-j}, y^1, \dots, y^{j \wedge l}) \prod_{1 \leq i \leq n-j} dx^i \prod_{1 \leq i \leq j \wedge l} dy^i,$$

где функции $f_j(t; \mathbf{v}_j)$ представляют собой плотности распределений меток процесса Z . Доказательство можно провести по индукции, отправляясь от начального состояния $j=0$ в момент $t=0$, в котором метка имеет плотность $a(\cdot)$. На следующем шаге при $t=1$ состояние $j=1$ меток имеет плотность $a(\cdot)b(\cdot)$. Далее, так как операторы сдвига и пополнения меток абсолютно непрерывными с.в. не нарушают их абсолютной непрерывности, то это завершает доказательство.

Уравнения для п.р. меток процесса Z в соседних состояниях на двух последующих шагах с использованием обозначений

$$\mathbf{x}_j^i = (x_j^1, \dots, x_j^{i-1}, x_j^{i+1}, \dots, x_j^{n-j}), \quad \mathbf{y}_j^i = (y_j^1, \dots, y_j^{i-1}, y_j^{i+1}, \dots, y_j^{n-j}),$$

$$\mathbf{x}_j^i + u = (x_j^1 + u, \dots, x_j^{i-1} + u, x_j^{i+1} + u, \dots, x_j^{n-j} + u),$$

$$\mathbf{y}_j^i + u = (y_j^1 + u, \dots, y_j^{i-1} + u, y_j^{i+1} + u, \dots, y_j^{n-j} + u),$$

$$\Delta A(x_j^i) = A(x_j^i) - A(x_j^{i-1}), \Delta B(y_j^i) = B(y_j^i) - B(y_j^{i-1})$$

представлены в теореме. При формулировке и доказательстве теоремы напомним, что размерности меток в состояниях j процесса Z равны: $k-j$ для метки $\mathbf{x}_j$ и $j \wedge l$ для метки $\mathbf{y}_j$.

Теорема 2. *П.р. меток процесса Z в соседних состояниях $j-1, j, j+1$ на двух последующих шагах t и $t+1$ связаны соотношениями: при $j \leq l$*

$$\begin{aligned} f_j(t+1; \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) = & \sum_{1 \leq i \leq j \wedge l} b(y_j^i) \Delta B(y_j^i) \cdot \\ & \cdot \int_{u \leq y_j^i} f_{j-1}(t; u, \mathbf{x}_j + u, \mathbf{y}_j^i + u) du + \\ & + \sum_{1 \leq i \leq k-j} a(x_j^i) \Delta A(x_j^i) \int_{u \leq x_j^i} f_{j+1}(t; x_j^i + u, u, \mathbf{y}_j + u) du; \end{aligned} \quad (19)$$

при $j > l$

$$\begin{aligned} f_j(t+1; \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) = & \int_{u \leq y_j^l} f_{j-1}(t; u, \mathbf{x}_j + u, \mathbf{y}_j^l + u) du + \\ & + \sum_{1 \leq i \leq j \wedge l} b(y_j^i) \Delta B(y_j^i) \int_{u \leq x_j^i} f_{j+1}(t; x_j^i + u, u, \mathbf{y}_j + u) du. \end{aligned} \quad (20)$$

Доказательство. Чтобы на шаге $t+1$ процесс Z оказался в состоянии $j \leq l$ в окрестности точки $\mathbf{v}_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$, вероятность чего равна $f_j(t+1; \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) d\mathbf{x}_j d\mathbf{y}_j$, необходимо и достаточно чтобы:

а) либо на шаге t процесс Z находился в состоянии $j-1$ в окрестности точки $(u, \mathbf{x}_j + u, \mathbf{y}_j^l + u)$ с минимальным остаточным в.б.р. $u \leq y_j^l$, и свободной одной из позиций вектора $\mathbf{y}_j$, вероятность чего равна $f_{j-1}(t; u, \mathbf{x}_j + u, \mathbf{y}_j^l + u) du d\mathbf{x}_j d\mathbf{y}_j^l$, произошел отказ этого элемента, что привело к сдвигу компонентов вектора $\mathbf{v}_j$ на величину u и поступлению отказавшего элемента на ремонт, то есть в компоненты сдвинутого вектора $\mathbf{y}_j$ на i -ую позицию добавилась координата y_j^i с вероятностью $\Delta B(y_j^i) b(y_j^i) dy_j^i$, что объясняет первое слагаемое справа в формуле (19);

б) либо на шаге t процесс Z находился в состоянии $j+1$ в окрестности точки $(\mathbf{x}_j^i + u, u, \mathbf{y}_j + u)$ с минимальным остаточным временем ремонта u и свободной одной из позиций, скажем i -ой, вектора $\mathbf{x}_j$, вероятность чего равна $f_{j+1}(t; \mathbf{x}_j^i + u, u, \mathbf{y}_j + u) d\mathbf{x}_j^i du d\mathbf{y}_j$, и закончился ремонт этого элемента, что привело к сдвигу компонентов вектора $\mathbf{v}_j$ на величину u , при этом отремонтированный элемент приступил к работе, и его в.б.р. заняло i -ую позицию с вероятностью $\Delta A(x_j^i) a(x_j^i) dx_j^i$, что объясняет второе слагаемое справа в формуле (19).

Аналогично, чтобы на шаге $t+1$ при наличии ожидающих ремонта элементов, процесс оказался в состоянии $j > l$ со значением меток $f_j(t+1; \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$, вероятность чего равна $f_j(t+1; \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) d\mathbf{x}_j d\mathbf{y}_j$, необходимо и достаточно, чтобы на предыдущем шаге

а) либо он находился в состоянии $j-1$ с минимальным остаточным в.б.р. u и произошел отказ этого элемента, что привело к сдвигу компонентов меток $\mathbf{v}_j$ на величину u , и отказавший элемент поступил в очередь на ремонт или был потерян в зависимости от состояния системы, что объясняет первое слагаемое уравнения (20);

б) либо он находился в состоянии $j+1$ с минимальным остаточным временем ремонта u , вероятность чего равна $f_{j+1}(t; \mathbf{x}_j^i + u, u, \mathbf{y}_j + u) d\mathbf{x}_j^i du d\mathbf{y}_j$, закончился его ремонт, что привело к сдвигу компонентов меток $\mathbf{v}_j$ на величину u , отремонтированный элемент приступил к работе и его метка заняла i -ую позицию с вероятностью $\Delta A(x_j^i) a(y_j^i) dx_j^i$, что объясняет второе слагаемое в формуле (20) и завершает доказательство теоремы.

Полученные в последнем разделе соотношения вряд ли могут быть использованы для реального анализа функции надежности системы и ее свойств. Поэтому в следующем разделе обратимся к непосредственному вычислению функции надежности с помощью преобразования меток. Ее вычисление опирается на методы имитационного моделирования. При этом предложенный метод не требует специальной разработки алгоритмов, они непосредственно используются для реализации предложенных процедур. Таким образом, предложенный подход открывает новые возможности метода имитационного моделирования.

4. Вычисление функции надежности модели

Основой применения метода имитационного моделирования (для вычисления в данном случае функции надежности) является достижимость состояния k из любого начального состояния с вероятностью 1 и, более того, конечность среднего времени достижения этого состояния для любого начального состояния $E[R] < \infty$ (аналог положительной возвратности процесса Z при исследовании стационарного режима).

Следуя методике мажорирования процесса Z , предложенной в [10], можно показать, что для этого достаточно выполнения условия

$$P\{A < B\} > 0.$$

Предполагая это условие выполненным, в следующей части статьи предлагаются процедура и алгоритм вычисления функции надежности системы и ее моментов.

Для вычисления времени до первого отказа R можно воспользоваться моментами изменения состояний системы или интервалами между ними до момента первого посещения поглощающего состояния k ,

$$R = S(M) = \sum_{t \geq 1} T_{j(t)}(t) 1_{j(t) \leq k} = \sum_{t \geq 1} \min [X_{j(t)}^{(t)}, Y_{j(t)}^{(t)}] 1_{j(t) \leq k},$$

где величины $S(\cdot)$ и $T_{j(t)}(t)$ были введены соотношениями (8), (9). Для получения соответствующих оценок эти величины следует вычислять для достаточно большого числа M траекторий.

Заключение

В работе вводится понятие маркированного марковского процесса, которое применяется для исследования системы $\langle GI_{k,n} | GI \rangle$. Приведены преобразования меток, которые используются для вычисления основных характеристик модели. Получены уравнения для мер меток в переходном и стационарном режимах. Представлены основные характеристики надежности этой системы в терминах мер для меток.

Следующая часть статьи будет посвящена численному анализу и исследованию чувствительности характеристик надежности системы к виду распределений в.б.р. и ремонта, а также к соответствующим значениям коэффициента вариации.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-49-02023 (получатель Иванова Н.М.).

Библиографический список

1. Rykov V. Decomposable semi-regenerative processes and their applications. LAMBERT Academic Publishing, 2010. 75 p.

2. Glynn P.W. A GSMP formalism for discrete event systems // *Proceedings of the IEEE*. 1989. No. 1. Vol. 77. Pp. 14-23. DOI: 10.1109/5.21067

3. Glynn P.W., Haas P.J. Laws of large numbers and functional central limit theorems for generalized semi-markov processes, // *Stochastic Models*. 2006. Vol 22. Is. 2. Pp. 201-231. DOI: 10.1080/15326340600648997

4. Glynn P.W., Haas P.J. On transience and recurrence in irreducible finite-state stochastic systems // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 2015. No. 4. Vol. 25. Pp. 1-19. DOI: 10.1145/2699721

5. Rykov V. On Reliability of a double redundant renewable system // In: Gribaudo, M., Sopin, E., Kochetkova, I. (eds) *Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications*. ASMTA 2019. Lecture Notes in Computer Science() / 2020. Vol 12023. DOI: 10.1007/978-3-030-62885-7_3

6. Rykov V., Efrosinin D., Stepanova N. et al. On Reliability of a Double Redundant Renewable System with a Generally Distributed Life and Repair Times // *Mathematics*. 2020. Vol. 8. Is. 2. DOI: 10.3390/math8020278

7. Рыков В., Иванова Н. О надежности восстанавливаемой дублированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и восстановления ее элементов // *Материалы XXII-й Международной конференции имени А. Ф. Терпугова*. Томск: Томский государственный университет. 2023. С. 335-340.

8. David H.A., Nagaraja H.N. Order statistics, 3rd ed. John Wiley & Sons: New York, NY, USA. 2003. DOI: 10.1002/0471722162

9. Rykov V., Kozyrev D., Filimonov A. et al. On reliability of a k-out-of-n system with general repair time distribution // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2020. Vol. 35. No 4. Pp. 885 – 902. DOI: 10.1017/S0269964820000285

10. Morozov E., Steyaert B. Stability analysis of regenerative queueing models. Springer, Cham, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-82438-9

References

1. Rykov V. Decomposable semi-regenerative processes and their applications. LAMBERT Academic Publishing; 2010.

2. Glynn P.W. A GSMP formalism for discrete event systems. *Proceedings of the IEEE* 1989;1(77):14-23. DOI: 10.1109/5.21067.

3. Glynn P.W., Haas P.J. Laws of large numbers and functional central limit theorems for generalized semi-Markov processes. *Stochastic Models* 2006;22(2):201-231. DOI: 10.1080/15326340600648997.

4. Glynn P.W., Haas P.J. On transience and recurrence in irreducible finite-state stochastic systems. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 2015;4(25):1-19. DOI: 10.1145/2699721.

5. Rykov V. On reliability of a double redundant renewable system. In: Gribaudo M., Sopin E., Kochetkova I., editors. Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications. ASMTA 2019. Lecture Notes in Computer Science 2020, Vol. 12023. DOI: 10.1007/978-3-030-62885-7_3.
6. Rykov V., Efrosinin D., Stepanova N. et al. On Reliability of a Double Redundant Renewable System with a Generally Distributed Life and Repair Times. *Mathematics* 2020;8(2). DOI: 10.3390/math8020278.
7. Rykov V., Ivanova N. [On the dependability of a restorable redundant system with general distributions of fault-free operation and restoration times of its elements]. In: [Proceedings of the XXII International A.F. Terpugov Conference]. Tomsk: Tomsk State University; 2023. Pp. 335-340. (in Russ.)
8. David H.A., Nagaraja H.N. Order statistics. 3rd ed. John Wiley & Sons: New York (USA); 2003. DOI: 10.1002/0471722162.
9. Rykov V., Kozyrev D., Filimonov A. et al. On reliability of a k-out-of-n system with general repair time distribution. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 2020;35(4):885-902. DOI: 10.1017/S0269964820000285.
10. Morozov E., Steyaert B. Stability analysis of regenerative queueing models. Springer, Cham; 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-82438-9.

Сведения об авторах

Рыков Владимир Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Российский

государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина, проспект Ленинский, дом 65, корпус 1, Москва, Российская Федерация, e-mail: vladimir_rykov@mail.ru

Иванова Ника Михайловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем управления РАН, ул. Профсоюзная, д. 65, Москва, Российская Федерация, e-mail: nm_ivanova@bk.ru

About the authors

Vladimir V. Rykov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor, Gubkin University, 65, korp. 1 Leninsky prospekt, Moscow, Russian Federation, e-mail: vladimir_rykov@mail.ru.

Nika M. Ivanova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya st., Moscow, Russian Federation, e-mail: nm_ivanova@bk.ru.

Вклад авторов

Рыков В.В. сформулировал задачу исследования, разработал метод ее решения и получил аналитические результаты.

Ивановой Н.М. разработала алгоритм имитационного моделирования и выполнила численный анализ.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.