Улучшение алгоритма Дейкстры для оценки характеристик и критического пути проекта[1]

Improving Dijkstra’s algorithm for Estimating Project Characteristics and Critical Path

Адилакшми Ширипурапу[1*], Рави Шанкар Наупада[2], К. Шриниваса Рао[3]
Adilakshmi Siripurapu[1], Ravi Shankar Nowpada[2], K. Srinivasa Rao[3]

[1]Кафедра естественных и гуманитарных наук, Институт информатики им. Вигнана, Дуввада, Вишакхапатнам, Андхра-Прадеш, Индия, [2]Кафедра математики, Институт естественных наук, Институт техники и управления им. Ганди, Вишакхапатнам, Андхра-Прадеш, Индия, [3]Кафедра организации, Школа предпринимательства, Институт техники и управления им. Ганди, Вишакхапатнам, Андхра-Прадеш, Индия
[1]Dept. of Basic Science and Humanities, Vignan’s Institute of Information Technology (A), Duvvada, Visakhapatnam, AP, India, [2]Dept. of Mathematics, Institute of Science, GITAM (Deemed to be University), Visakhapatnam, AP, India, [3]Dept. of Operations, GITAM school of Business, GITAM (Deemed to be University), Visakhapatnam, AP, India

[*]laxmimaths2008@gmail.com

Адилакшми Ширипурапу

Рави Шанкар Наупада

К. Шриниваса Рао

Резюме. *В любой отрасли разработка структуры планирования проекта представляет собой сложную техническую задачу, которая включает в себя оценку факторов, ограничивающих выполнение задач по каждому виду работ, и соответствующие инструменты планирования. Любое ограничение влияет на время выполнения работ, эксплуатационные издержки и общую эффективность выполнения проекта. Процессы метода оценки и пересмотра программ (Programme Evaluation Review Technique, PERT) и метода критического пути (Critical Path Method, CPM) побудили многих исследователей изучать возможные способы поиска критических путей и работ в сетевом графике. CPM и PERT пока еще очень далеки от реализации вероятностной среды. Однако подходы на основе искусственного интеллекта, такие как генетический алгоритм, алгоритм Дейкстры и другие, используются для анализа сети в рамках управления проектами. Настоящее исследование призвано помочь менеджеру проекта спланировать график выполнения строительного проекта для определения ожидаемого времени его завершения. В данной исследовательской работе мы описываем метод получения раннего и позднего значений времени критического пути с помощью модифицированного алгоритма Дейкстры с треугольными нечеткими числами. Для поиска оптимального пути для предложенного метода разработаны алгоритмы прохода вперед и назад. Также приведены численные примеры. Результаты моделирования приведены с использованием программы «С». Наконец, проводится сравнение с традиционным методом PERT.*

Abstract. *Developing a project planning structure for all industries is a technological challenge involving evaluating several restrictions for each activity’s respective task and its planning tools. Any restriction affects the completion time, operating costs, and overall project performance. Programme Evaluation Review Technique (PERT) and Critical Path Method (CPM) processes made many researchers study the possible ways of finding the critical paths and activities in the network. The advancement of the CPM and PERT towards a probabilistic environment is still a long way off. However, Artificial intelligence approaches such as the Genetic Algorithm, Dijkstra’s algorithm, and others are utilized for network analysis within the project management framework. This study is to help the project manager plan schedule for a construction project to determine the expected completion time. In this research paper, we describe a method for obtaining the earliest and latest times of a critical path using modified Dijkstra’s algorithm with triangular fuzzy numbers. Forward pass and backward pass algorithms are designed to find the optimal path for the proposed method. Numerical examples are also illustrated for the same. Simulation results are included by the use of the “C” program. Finally, a comparison is made with the traditional method PERT.*

Ключевые слова: *критический путь, алгоритм Дейкстры, раннее и позднее время, модифицированный алгоритм Дейкстры, PERT.*
Keywords: *Critical Path, Dijkstra’s Algorithm, Earliest and latest times, modified Dijkstra’s algorithm, PERT.*

[1] Adilakshmi Siripurapu, Ravi Shankar Nowpada, and K. Srinivasa Rao. Improving Dijkstra’s algorithm for Estimating Project Characteristics and Critical Path Reliability // Theory & Applications. 2022. Vol. 17. No. 4(71). Pp. 65-73. doi:10.24412/1932-2321-2022-471-65-73

Для цитирования: *Адилакшми Ширипурапу, Рави Шанкар Наупада, К. Шриниваса Рао Улучшение алгоритма Дейкстры для оценки характеристик и критического пути проекта // Надежность. 2024. №2. С. 16-23. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-2-16-23*
For citation: *Adilakshmi Siripurapu, Ravi Shankar Nowpada, K. Srinivasa Rao. Improving Dijkstra's algorithm for Estimating Project Characteristics and Critical Path. Dependability 2024:2: 16-23. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-2-16-23*

Поступила: *31.03.2023* / **После доработки:** *17.04.2024* / **К печати:** *10.06.2024*
Received on: *31.03.2023* / **Revised on:** *17.04.2024* / **For printing:** *10.06.2024*

1. Введение

В процессе разработки сетевого графика проекта задачей контролера проекта ставится разработка первичного плана. Метод критического пути – один из наиболее известных подходов к подготовке сетевого графика проекта. Концепция критического пути позволяет лицу, принимающему решения, контролировать стоимость и график проекта, а также может повысить качество выполняемых работ. Этот метод широко используется в различных отраслях промышленности для анализа и повышения эффективности проектов. Было рассмотрено много случаев, когда время выполнения работ детерминировано. Метод PERT применим к вероятностным средам. В управлении проектами применяются различные методы и техники. Каждая процедура имеет запас времени, отведенного для выполнения задачи. Для управления проектами, в частности, применяются диаграмма Ганта, сетевая диаграмма, CPM и PERT.

В CPM при оценке самого длинного пути учитывается продолжительность каждой работы. В PERT расчетное время выполнения работы задается. В связи с этим, в PERT применяются трехточечные оценки (наиболее вероятная [m], оптимистическая [a] и пессимистическая [b]) при условии, что распределение работ соответствует бета-распределению. Аппроксимация PERT с использованием бета-распределения была впервые предложена Малкомом в 1959 году [7]. В 1993 году Чаном был предложен эффективный алгоритм анализа методом критического пути (CHAN), основанный на методе автоматической генерации тестовых шаблонов (ATPG) PODEM [1]. Традиционно в PERT использовалось бета-распределение. В 2018 г. Соломон Саки и др. предложили расширить измененную модель PERT и использовать ее для моделирования риска планирования. Предложенная модель PERT была основана на подозрении с 95-процентным уровнем уверенности. В соответствии с крайним сроком и вероятностью отставания вычисляется вероятность завершения проекта в пяти перспективах для обоих подходов. Для оценки частоты ошибок для каждого примера взята выборка. Средняя частота ошибок была рассчитана с использованием традиционного метода PERT и обновленного метода PERT для всех случаев. Обновленная версия PERT улучшила среднюю частоту ошибок на 2,46% против 3,31% для традиционного метода PERT. Такой подход подтвердил, что пересмотренный PERT способен обеспечить более точную оценку вероятности завершения работ лучше, чем традиционный PERT. К слову, поскольку новый PERT был полностью основан на подозрениях, можно с уверенностью сказать, что он намного превосходит традиционную модель PERT [8]. Ли и др. в 2007 с помощью моделирования по методу Монте-Карло была изучена сетевая программа реального проекта. Результат показал, что стохастическая сетевая программа дала значительные данные по планированию лучше, чем обычная сетевая программа [4]. Ли (2005) предложен программный подход Стохастическое имитационное моделирование календарного планирования проекта (Stochastic Project Scheduling Simulation, SPSS), который влияет на возможность завершения проекта в срок, установленный оператором программного обеспечения. Программное обеспечение SPSS обеспечивает моделирование времени осуществления работ, используя ряд распределений вероятностей, а также равномерное, треугольное и нормальное распределения. SPSS также рассчитывает постоянное улучшение (CI) для всех работ по проекту [3]. В целом, моделирование сетевого графика проекта используется для повышения обоснованности и надежности исследования PERT. Чен и др. (2004) объяснили использование имитационного моделирования по методу Монте-Карло в рамках PERT для обеспечения стохастического периода реализации работ [2]. Имитационная модель формирует гистограмму распределения сети завершенных работ. Метод имитационного моделирования CPM/PERT добавляет план имитационного моделирования дискретных событий и процесс определения критического пути. По словам авторов, «в рамках анализа на основе критического пути проекта для каждого вида работ необходимо определить раннее начало ($E\tilde{S}_{ij}$), позднее начало ($L\tilde{S}_{ij}$), раннее завершение ($E\tilde{F}_{ij}$), позднее завершение ($L\tilde{F}_{ij}$) и общий резерв времени ($T\tilde{F}_{ij}$)». $E\tilde{S}_{ij}$ и $E\tilde{F}_{ij}$ сетевого графика проекта вычисляются во время прохода вперед, тогда как $L\tilde{S}_{ij}$, $L\tilde{F}_{ij}$ и $T\tilde{F}_{ij}$ определяются во время прохода назад. Лю и др. (2000) использовали $T\tilde{F}_{ij}$ для оценки важности проекта [5]. Согласно Маккриммону и др. (1964) один из недостатков PERT заключается в том, что хотя для завершения проекта необходимо пройти много путей, время проекта сокращается и не превышает соответствующего среднего показателя [6]. Шанкар и др. (2010) использовали модифицированный алгоритм Дейкстры для оценки продолжительности проекта [9]. Сяокан Хань и др. в 2021 году предложили улучшенный алгоритм муравьиной колонии для определения критического пути, задавая расстояние и время пути отрицательными при неизменной вероятности перехода [10].

В 1965 году Заде [11] представлена концепция теории нечетких множеств. Современный высококонкурентный мир породил множество проблем в нечеткой математике. Когда периоды осуществления работ в среде проекта детерминированы, многие реальные события проходят быстрее за счет использования идеи нечеткости.

В данной работе с помощью метода оценки и пересмотра программ (PERT) и метода критического пути (CPM) наряду с алгоритмом Дейкстры рассмотрен пример формирования критического пути и продолжительности проекта. Значения главной цели взяты в нечетких числах. Мы можем ранжировать нечеткие числа с целью нахождения наилучшей альтернативы.

2. Методология

2.1. Алгоритм предложения

Измененный алгоритм Дейкстры определяет максимальное время между начальным узлом (называемым «узлом-источником») и последующими узлами в сети. В этом методе веса ребер используются для определения пути, который оптимизирует общее расстояние (вес) между начальным узлом и последующими узлами. Модифицированный алгоритм Дейкстры подходит только для положительно взвешенных графов, поскольку веса ребер должны быть добавлены во время процедуры определения самого длинного пути.

Основные понятия применительно к измененному алгоритму Дейкстры:

- измененный алгоритм Дейкстры начинается с выбранного вами узла (исходного узла) и анализирует граф с целью определить самый длинный путь внутри этого узла и всех последующих узлов сети;
- при помощи модели рассматривается известный на данный момент самый длинный путь в пределах отдельного узла и исходного узла, и при обнаружении длиннейшего пути изменяются значения;
- при помощи модели находится максимальное расстояние от одного события до другого. Узел помечается как «посещенный» и добавляется к пути;
- процедура продолжается до тех пор, пока все узлы графа не будут включены в путь. В результате мы получаем путь, который добавляет исходный узел ко всем последующим узлам, выбирая самый длинный возможный путь к отдельному узлу;
- исходный узел находится на нулевом расстоянии от самого себя. Изначально всем вершинам присвоена метка «0»;
- используем знак бесконечности, чтобы указать расстояние от исходного узла до всех остальных узлов на текущий момент, поскольку оно еще не оценено;
- мы находим ранние значения времени с использованием модифицированного алгоритма Дейкстры с помощью алгоритма прохода вперед и поздние значения времени с помощью алгоритма прохода назад.

2.2. Вычисления вперед в алгоритме Дейкстры

Шаг 1: В последовательности v_1=1, v_2=2, … v_n=n выделить n вершин.

Шаг 2: Присвоить постоянную метку «0» первичной вершине v_1=1 и временную метку «0» остальным n–1 ребрам.

Шаг 3: Каждая вершина j, не имеющая постоянной метки, получает новую временную метку, т.е.

$$E_j = \max\{oldlabelofj, \left(oldlabelofi + t_{ij}\right)\},$$

где i имеет постоянную метку новой вершиной, а t_{ij} – продолжительность работы между вершинами i и j, если ребро не соединено с i и j, $t_{ij}=\infty$.

Шаг 4: Следующая вершина превращается в фиксированную (посещенную) метку.

Шаг 3 и шаг 4 повторяются до тех пор, пока v_n=n не получит фиксированную метку. Постоянно помеченные значения E_j являются самыми ранними сроками, поскольку E_1=0.

2.3. Вычисления назад в алгоритме Дейкстры

Шаг 1: Задайте n вершины как v_n=n, v_{n-1}=n–1, … v_1=1.

Шаг 2: Присвойте фиксированную метку L_n=E_n вершине v_n=n и временные метки остальным n–1 вершинам.

Шаг 3: Любой узел j, который не получил постоянную метку, получает новую временную метку, т.е

$$L_j = \min\left[oldlabelofi, \left(oldlabelofj + t_{ij}\right)\right],$$

где j имеет фиксированную метку, а новая вершина t_{ij} – это продолжительность работ между вершинами i и j.

Шаг 4: как и в шаге 1, следующая вершина становится фиксированной или постоянной меткой.

Повторить шаги 3 и 4 до тех пор, пока начальная вершина v_1=1 не получит фиксированную метку.

2.4. Ранжирование предложений в треугольном нечетком числе

Пусть $\tilde{A} = (a, b, c)$ – треугольное нечеткое число. Рассмотрим центроид треугольника как ранжирование в треугольном нечетком числе (ТНЧ). Его диаграмма представлена на рис. 1.

Центроид треугольника равен $(a+b+c)/3$. Обратите внимание, что центроид треугольника является новым рангом в треугольном нечетком числе.

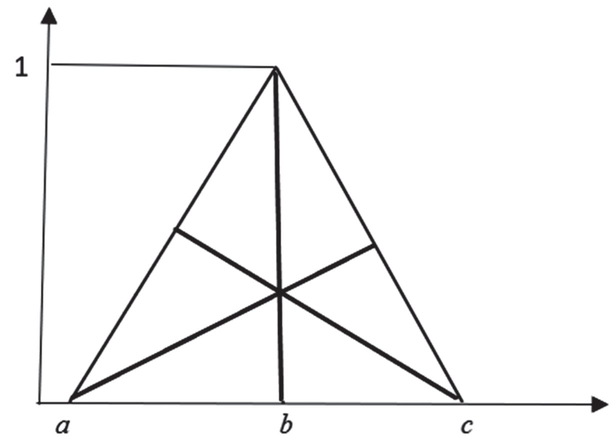

Рис. 1. Схематичное представление центроида ТНЧ

Таким образом, новый ранг в треугольном нечетком числе –

$$\mathcal{R}\left(\tilde{A}\right)=\frac{a+b+c}{3}.$$

3. Численный анализ

Здесь мы собрали практические примеры из сетевых источников, которые представлены в табл. 1. Кроме того, соответствующая сетевая диаграмма представлена на рис. 2.

Табл. 1. Проблема применения

Работы	Код	Предшественник	*a*	*m*	*b*
1→2	P	-	5	6	7
1→3	Q	-	1	3	5
1→4	R	-	1	4	7
2→5	S	P	1	2	3
3→6	T	Q	1	2	9
4→6	U	R	1	5	9
4→7	V	R	2	2	8
6→7	W	T, U	4	4	10
5→8	X	S	2	5	8
7→8	Y	W, V	2	2	8

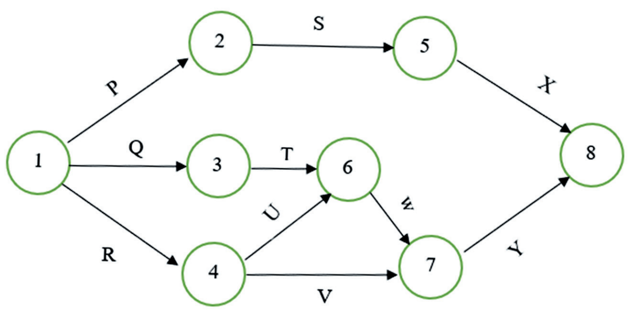

Рис. 2. Проблема применения, представленная в виде диаграммы

3.1. Продолжительность работ, рассчитанная путем принятия треугольных нечетких чисел

Продолжительность работ, принятая в треугольных нечетких числах, представлена в табл. 2. Соответствующая диаграмма представлена на рис. 3.

Табл. 2. Ожидаемое время выполнения работ с ТНЧ

Работы	*a*	*m*	*b*	ТНЧ
1→2	5	6	7	(5,6,7)
1→3	1	3	5	(1,3,5)
1→4	1	4	7	(1,4,7)
2→5	1	2	3	(1,2,3)
3→6	1	2	9	(1,2,9)
4→6	1	5	9	(1,5,9)
4→7	2	2	8	(2,2,8)
6→7	4	4	10	(4,4,10)
5→8	2	5	8	(2,5,8)
7→8	2	2	8	(2,2,8)

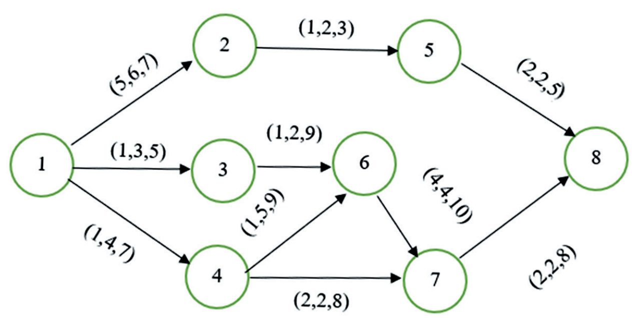

Рис. 3: Пункты сетевого графика работ с ТНЧ

3.2. Самые ранние сроки

Самые ранние сроки для каждого узла сетевого графика проекта, рассчитанные с использованием алгоритма прохода вперед на основе треугольных нечетких чисел, показаны в табл. 3.

3.3. Поздние значения времени

Поздние значения времени каждой вершины сетевого графика, рассчитанные с использование алгоритма прохода назад по формуле упорядочивания с треугольными нечеткими числами, показаны в Табл. 4.

Из двух вышеприведенных таблиц (табл. 3 и табл. 4) следует, что

$$E_1=L_1=(0,0,0), E_4=L_4=(1,4,7), E_6=L_6=(2,9,16),$$
$$E_7=L_7=(6,13,26)E_8=L_8=(8,15,34).$$

Табл. 3. Ранние значения времени каждого узла с ТНЧ

Номер вершины								Раннее время
1	2	3	4	5	6	7	8	
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	E_1=(0,0,0)
(0,0,0)(F)	(5,6,7)	(1,3,5)	(1,4,7)	∞	∞	∞	∞	
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)	(1,4,7)	∞	∞	∞	∞	E_2=(5,6,7)
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)	(1,4,7)	(6,8,10)	∞	∞	∞	
0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)	(6,8,10)	∞	∞	∞	E_3=(1,3,5)
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)	(6,8,10)	(2,5,14)	∞	∞	
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)	(2,5,14)	∞	∞	E_4=(1,4,7)
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)	(2,9,16)	(3,6,15)	∞	
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)(F)	(2,9,16)	(3,6,15)	∞	E_5=(6,8,10)
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)(F)	(2,9,16)	(3,6,15)	(8,10,15)	
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)(F)	(2,9,16)(F)	(3,6,15)	(8,10,15)	E_6=(2,9,16)
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,26)	(8,10,15)	
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,26)(F)	(8,10,15)	E_7=(6,13,26)
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,26)(F)	(8,15,34)	
(0,0,0)(F)	(5,6,7)(F)	(1,3,5)(F)	(1,4,7)(F)	(6,8,10)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,26)(F)	(8,15,34)(F)	E_8=(8,15,34)

В результате критический путь – 1→4→6→7→8, а продолжительность проекта – (8, 15, 34).

Теперь треугольное нечеткое число (8, 15, 34) преобразуется в нормальное время с помощью формулы ранжирования треугольных нечетких чисел $(a+b+c)/3$. Приведенное к четкости значение (8, 15, 34) составляет 19. Таким образом, проект заканчивается через 19 дней.

4. Традиционные методы

4.1. Метод оценки и пересмотра программ (PERT)

Метод оценки и пересмотра программ (PERT) – это метод управления проектами, предназначенный для оценки того, сколько времени потребуется для успешного завершения проекта. В управлении проектами существует подход, согласно которому проект делится на мелкие проекты или работы. Каждая работы имеет свои временные рамки, требования и конечные результаты. Чаще всего эти сроки не детерминированы. В конкретных обстоятельствах традиционный PERT выдает трехточечные оценки: оптимистическую, пессимистическую и наиболее вероятную. Это простая стратегия, использующая механизм бета-распределения.

Оценка продолжительности для каждой работы может быть спрогнозирована с помощью средств бета-распределения следующего средневзвешенного значения:

$$ET = \frac{\begin{pmatrix} \textit{Оптимистическая} + \\ +4 * \textit{Наиболее вероятная} + \\ +\textit{Пессимистическая} \end{pmatrix}}{6}.$$

Здесь мы рассчитываем продолжительности работ, используя среднее значение вероятностных значений

Табл. 4. Поздние значения времени каждого узла с ТНЧ

Номер вершины								Позднее значение времени
8	7	6	5	4	3	2	1	
(8,15,34)(F)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	L_8=E_8=(8,15,34)
(8,15,34)(F)	(6,13,26)	(8,15,34)	(6,13,29)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(8,15,34)	(6,13,29)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	L_7=(6,13,26)
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)	(6,13,29)	(4,11,18)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)	(4,11,18)	(8,15,34)	(8,15,34)	(8,15,34)	L_6=(2,9,16)
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)	(1,4,7)	(1,7,7)	(8,15,34)	(8,15,34)	
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)	(1,7,7)	(8,15,34)	(8,15,34)	L_5=(6,13,29)
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)	(1,7,7)	(5,11,26)	(8,15,34)	
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)(F)	(1,7,7)	(5,11,26)	(8,15,34)	L_4=(1,4,7)
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)(F)	(1,7,7)	(5,11,12)	(0,0,0)	
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)(F)	(1,7,7)(F)	(5,11,12)	(0,0,0)	L_3=(1,7,7)
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)(F)	(1,7,7)(F)	(5,11,12)	(0,0,0)	
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)(F)	(1,7,7)(F)	(5,11,12)(F)	(0,0,0)	L_2=(5,11,12)
(8,15,34)(F)	(6,13,26)(F)	(2,9,16)(F)	(6,13,29)(F)	(1,4,7)(F)	(1,7,7)(F)	(5,11,12)(F)	(0,0,0)(F)	L_1=(0,0,0)

времен, и представляем их в табл. 5. Соответствующая сетевая диаграмма представлена на рис. 4.

Табл. 5. Продолжительность работ со средним вероятностным значением

Работы	*a*	*m*	*b*	*ET*=(*a*+4*m*+*b*)/6
1→2	5	6	7	6
1→3	1	3	5	3
1→4	1	4	7	4
2→5	1	2	3	2
3→6	1	2	9	3
4→6	1	5	9	5
4→7	2	2	8	3
6→7	4	4	10	5
5→8	2	5	8	5
7→8	2	2	8	3

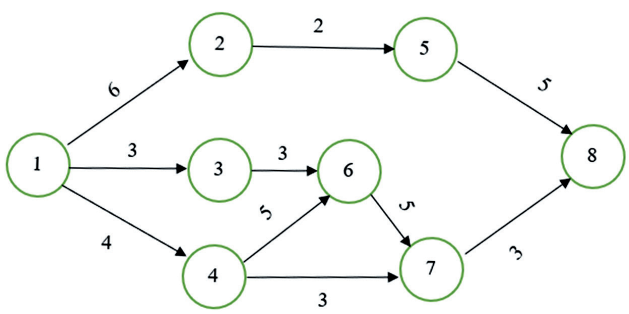

Рис. 4. Продолжительность работ с сетевой диаграммой вероятностных значений времени

4.2. Процедура нахождения критического пути:

Шаг 1: Создайте сетевой график проекта *G (V, E)*.

Шаг 2: Выразите время каждой работы как вероятностное время.

Шаг 3: Определите самое раннее время начала работы, используя расчет вперед. Пусть ранее время начального события равно нулю, $\tilde{E}_1 = 0$. Тогда $\tilde{E}_j = max\left\{\tilde{E}_i + \tilde{t}_{ij}\right\}$, где i – число предшествующих событий.

Шаг 4: Вычислите раннее время окончания работы

$$(E\tilde{F}_{ij}) = \text{Раннее время окончания} + \text{длительность работ},$$

$$i.e.\ E\tilde{F}_{ij} = E\tilde{S}_{ij} + \tilde{t}_{ij} = \tilde{E}_i + \tilde{t}_{ij}.$$

Шаг 5: Оцените позднее время окончания работы, используя расчет назад: $\tilde{E}_n = \tilde{L}_n$.

Таким образом, чтобы $\tilde{L}_i = L\tilde{F}_{ij} = min\left\{\tilde{L}_j - \tilde{t}_{ij}\right\}$, $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$.

Шаг 6: Рассчитайте позднее время начала работы $(L\tilde{S}_{ij}) = L\tilde{F}_{ij} - \tilde{t}_{ij}$.

Шаг 7: Общий резерв времени $(T\tilde{F}_{ij}) = L\tilde{F}_{ij} - E\tilde{F}_{ij}$ или $L\tilde{S}_{ij} - E\tilde{S}_{ij}$.

Результаты представлены в табл. 6.

Табл. 6. Ранние и поздние значения времени выполнения проектных работ с вероятностным средним значением

Работы	Вершина	Длительность работ	$E\tilde{S}_{ij}$	$E\tilde{F}_{ij}$	$L\tilde{S}_{ij}$	$L\tilde{F}_{ij}$	$T\tilde{F}_{ij}$
1→2	P	6	0	6	4	10	4
1→3	Q	3	0	3	3	6	3
1→4	R	4	0	4	0	4	0*
2→5	S	2	6	8	10	12	4
3→6	T	3	3	6	6	9	3
4→6	U	5	4	9	4	9	0*
4→7	V	3	4	7	11	14	7
6→7	W	5	8	13	12	17	4
5→8	X	5	9	14	9	14	0*
7→8	Y	3	14	17	14	17	0*

Критические работы: 1→4, 4→6, 5→8, 7→8. Соответственно, критический путь – 1→4→6→7→8, а время завершения проекта – 17.

5. Результаты работы

В табл. 7 представлены критический путь и продолжительность проекта с вероятностным и треугольным нечетким значениями временем работ соответственно.

Табл. 7. Результаты

Продолжительности работ	Критический путь	Время окончания проекта
Вероятностные значения времени	1→4→6→7→8	17
Треугольное нечеткое число	1→4→6→7→8	19

На графике на рис. 5 представлены результаты корреляции между математическим ожиданием и треугольным нечетким средним.

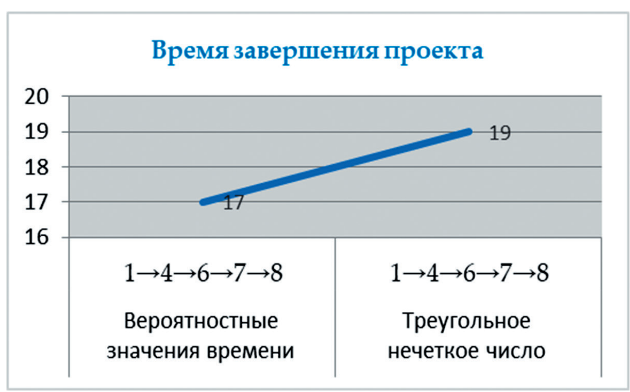

Рис. 5. Корреляция времени завершения проекта и математического ожидания и треугольного нечеткого среднего значения

6. Обсуждение

В настоящей статье определяется ранний и поздний сроки осуществления проекта с применением модифицированного алгоритма Дейкстры с треугольным нечетким числом и вероятностными значениями времени. Критический путь сети определяется с помощью раннего и позднего значений времени осуществления работ проекта. Кроме того, рассчитывается время всего проекта. Критический путь проекта идентичен в обоих случаях, но время завершения проекта различается. Вероятностное среднее обеспечивает более короткие сроки в сравнении с нечетким треугольным средним. Однако в ненаучном примере на это число влияют различные обстоятельства, такие как наличие аналитиков и тип работ.

Библиографический список

1. Chang H., Abraham J.A. CHAN: An efficient critical path analysis algorithm // 1993 European Conference on Design Automation with the European Event in ASIC Design, Paris, France, 22-25 February 1993. Pp. 444-448. DOI: 10.1109/EDAC.1993.386435

2. Cheng X.L., Zhang Y.L., Cui X.S. Applied in Resource Constrained Project Scheduling Problem // Industrial Engineering Journal. 2004. Vol. 7(3). Pp. 51-54.

3. Lee D. Probability of project completion using stochastic project scheduling simulation // Journal of Construction Engineering and Management. 2005. Vol. 131(3). Pp. 310-318.

4. Li Q, Zhang J., Zhang R.T. Application of Monte Carlo Simulation in Project Schedule // Journal of Yangtze University (Natural Science Edition). 2007. Vol. 4(2). Pp. 62-66.

5. Lu M., AbouRizk S.M. Simplified CPM/PERT simulation model // Journal of Construction Engineering and Management. 2000. Vol. 126(3). Pp. 219-226.

6. MacCrimmon K.R., Ryavec C.A. An Analytical Study of the PERT Assumptions // Operation Research. 1964. Vol. 12. No. 1. Pp. 16-37.

7. Malcon D.G., Roseboom J.H., Clark C.E. et al. Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation // Operation Research. 1959. Vol. 7. Issue 5. Pp.646-669.

8. Sackey Solomon, Kim Byung-Soo. Schedule Risk Analysis using a proposed Modified Variance and Mean of the Original Program Evaluation and Review Technique Model // KSCE Journal of Civil Engineering. 2018. Vol. 23(4). Pp. 1484-1492.

9. Ravi Shankar N., Sireesha V. Using modified Dijkstra's algorithm for critical path method in a project network // International Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 5. No. 2. Pp. 217-225.

10. Xiaokang Han, Wenzhou Yan, Mei Lu. Intelligent Critical Path Computation Algorithm Utilising Ant Colony Optimisation for Complex Project Scheduling // *Complexity*. 2021. Vol. 2021. Article ID 9930113. 8 p. DOI: 10.1155/2021/9930113

11. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. Issue 3. Pp 338-353.

References

1. Chang H., Abraham J.A. CHAN: An efficient critical path analysis algorithm. In: proceedings of the 1993 European Conference on Design Automation with the European Event in ASIC Design. Paris (France), 22-25 February 1993. Pp. 444-448. DOI: 10.1109/EDAC.1993.386435

2. Cheng X.L., Zhang Y.L., Cui X.S. Applied in Resource Constrained Project Scheduling Problem. *Industrial Engineering Journal* 2004;7(3):51-54.

3. Lee D. Probability of project completion using stochastic project scheduling simulation. *Journal of Construction Engineering and Management* 2005;131(3):310-318.

4. Li Q, Zhang J., Zhang R.T. Application of Monte Carlo Simulation in Project Schedule. *Journal of Yangtze University (Natural Science Edition)* 2007;4(2):62-66.

5. Lu M., AbouRizk S.M. Simplified CPM/PERT simulation model. *Journal of Construction Engineering and Management* 2000;126(3):219-226.

6. MacCrimmon K.R., Ryavec C.A. An Analytical Study of the PERT Assumptions. *Operation Research* 1964;12(1):16-37.

7. Malcon D.G., Roseboom J.H., Clark C.E. et al. Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation. *Operation Research* 1959;7(5):646-669.

8. Sackey Solomon, Kim Byung-Soo. Schedule Risk Analysis using a proposed Modified Variance and Mean of the Original Program Evaluation and Review Technique Model. *KSCE Journal of Civil Engineering* 2018;23(4):1484-1492.

9. Ravi Shankar N., Sireesha V. Using modified Dijkstra's algorithm for critical path method in a project network. *International Journal of Computational and Applied Mathematics* 2010;5(2):217-225.

10. Xiaokang Han, Wenzhou Yan, Mei Lu. Intelligent Critical Path Computation Algorithm Utilising Ant Colony Optimisation for Complex Project Scheduling. *Complexity* 2021; 2021. Article ID 9930113. 8 p. DOI: 10.1155/2021/9930113.

11. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control* 1965;8(3):338-353.

Сведения об авторах

Адилакшми Ширипурапу, PhD, ассистент профессора, Кафедра естественных и гуманитарных наук, Институт информатики им. Вигнана, Дуввада, Вишакхапатнам, Андхра-Прадеш, Индия, e-mail: laxmimaths2008@gmail.com

Рави Шанкар Наупада, профессор, Кафедра математики, Институт естественных наук, Институт техники и управления им. Ганди, Вишакхапатнам, Андхра-Прадеш, Индия, научные интересы включают прикладную теорию групп, исследование операций (в частности, управление проектами, транспортные проблемы, сети цепей поставок), теорию нечетких множеств, включая нечеткое принятие решений, и криптографию, e-mail: Drravi68@gmail.com

К. Шриниваса Рао, PhD, кафедра организации, Школа предпринимательства, Институт техники и управления им. Ганди, Вишакхапатнам, Андхра-Прадеш, Индия, Темы исследований: квантовая теория углового момента, специальные функции и ортогональные полиномы, вычислительные методые, e-mail: skolli2@gitam.edu

About the authors

Adilakshmi Siripurapu, PhD, Assistant Professor, Dept. of Basic Science and Humanities, Vignan's Institute of Information Technology (A), Duvvada, Visakhapatnam, AP, India, e-mail: laxmimaths2008@gmail.com.

Ravi Shankar Nowpada, Professor, Dept. of Mathematics, Institute of Science, GITAM (Deemed to be University), Visakhapatnam, AP, India, the academic interests include the applied group theory, operations research (including project management, transportation, supply chain management), fuzzy set theory, including fuzzy decision-making, and cryptography, e-mail: Drravi68@gmail.com.

K. Srinivasa Rao, PhD, Dept. of Operations, GITAM school of Business, GITAM (Deemed to be University), Visakhapatnam, AP, India, research topics: quantum theory of angular momentum, special functions and orthogonal polynomials, computational methods, e-mail: skolli2@gitam.edu.

Вклад авторов в статью

Рави Шанкар Наупада выполнил постановку задачи раннего и позднего сроков осуществления проекта с применением модифицированного алгоритма Дейкстры с треугольным нечетким числом и вероятностными значениями времени.

Адилакшми Ширипурапу выполнен обзор традиционных работ по теме статьи и сравнение предлагаемого подхода к с традиционным методом PERT.

К. Шриниваса Рао осуществил программную реализацию поиска оптимального пути для предложенного метода. Разработаны алгоритмы прохода вперед и назад и выполнены численные расчеты на языке C.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.