

## Технологические ограничения марковского метода анализа надежности

## Technological limitations of the Markov method for dependability analysis

Шевченко Д.Н.

Dmitriy N. Shevchenko

ЗАО «Струнные технологии», Республика Беларусь, Минск

Unitsky String Technologies Inc., Republic of Belarus, Minsk

shevchenkodn@yandex.ru



Шевченко Д.Н.

**Резюме. Цель.** Обозначить и систематизировать технологические ограничения марковского метода анализа надежности систем, определить их границы с учетом фактической реализуемости метода, показать возможности расширения границ реализуемости марковского метода. Рассмотрены ограничения, связанные с автоматизацией построения графа состояний и математическим решением соответствующих систем алгебраических и дифференциальных уравнений с использованием пакетов компьютерной математики. **Методы.** Предложен подход к автоматическому построению графа состояний технических систем, заданных структурной схемой надежности, а также сетей связи, заданных структурной схемой. Рассматриваются подходы к снижению размерности графа состояний, которые не снижают точность вычисления показателей надежности. Также рассматриваются подходы к снижению размерности графа состояний за счет усечения графа или объединения неработоспособных состояний, которые приводят к смещенным расчетным значениям показателей надежности. **Результаты.** Показаны фактические границы применимости марковского метода, их актуальность с учетом использования современных информационных технологий. Показаны подходы, расширяющие область реализуемости марковского метода анализа надежности больших систем. Исследован существующий подход к усечению графа состояний; предложены и исследованы (на смещенность) подходы к объединению неработоспособных состояний графа. **Заключение.** Рассматриваемые в статье подходы позволяют расширить область фактической реализуемости марковского метода анализа надежности на системы с большим количеством подсистем.

**Abstract. Aim.** To identify and classify the technical limitations of the Markov method of system dependability analysis, to define their boundaries taking into account the actual feasibility of the method, to show the opportunities of expanding the applicability of the Markov method. The paper examined the limitations associated with the automation of state graph construction and the mathematical solution of the corresponding systems of algebraic and differential equations using software. **Methods.** An approach is proposed to automatically constructing state graphs of technical systems defined by a structural diagram of dependability, as well as communication networks defined by a structural diagram. The paper examines approaches to reducing the dimension of a state graph that do not reduce the accuracy of dependability indicator calculation. The author also considers ways of reducing the dimensionality of a state graph by means of truncation or merging inoperative states that cause biased calculated dependability values. **Results.** The actual limits of applicability of the Markov method are shown along with their relevance in the context of modern information technologies. Approaches are shown that expand the applicability of the Markov method for analysing the dependability of large systems. The existing approach to state graph truncation were examined. Approaches to merging inoperative graph states were proposed and investigated (for bias). **Conclusion.** The approaches discussed in the paper allow extending the applicability of the Markov method of system dependability analysis to systems with a larger number of subsystems.

**Ключевые слова:** анализ надежности, марковский метод, автоматизация построения графа состояний, размерность графа.

**Keywords:** dependability analysis, Markov method, state graph construction automation, graph dimensionality.

**Формат цитирования:** Шевченко Д.Н. Технологические ограничения марковского метода анализа надежности // Надежность. 2024. №1. С. 34-40. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-1-34-40>

**For citation:** Shevchenko D.N. Technological limitations of the Markov method for dependability analysis. *Dependability 2024*;1:34-40. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-1-34-40>

**Поступила:** 13.06.2023 / **После доработки:** 15.01.2024 / **К печати:** 15.03.2024

**Received on:** 13.06.2023 / **Revised on:** 15.01.2024 / **For printing:** 15.03.2024

## Введение

Марковский метод является наиболее распространенным методом анализа надежности восстанавливаемых систем (адекватным, при допущении об экспоненциальном распределении времени до отказа и до восстановления компонентов системы). Метод подробно изложен в базовых стандартах по надежности [1] и специализированной литературе [2–5]. Однако применение марковского метода на практике затрудняется следующими особенностями:

1) сложность построения графа состояний (ГС) на основе структурной схемы или структурной схемы надежности (ССН) системы. Сюда можно отнести и отсутствие наглядности ГС с большим количеством состояний;

2) большая размерность ГС даже для систем с небольшим количеством подсистем [2]. В общем случае для системы из  $N$  компонентов, каждый из которых может находиться в 2 технических состояниях (работоспособное или неработоспособное), ГС имеет  $2^N$  состояний. Для системы из 5 компонентов, ССН которой представлена на рис. 1, ГС имеет 32 состояния; а при  $N = 10$  – 1024 состояния.

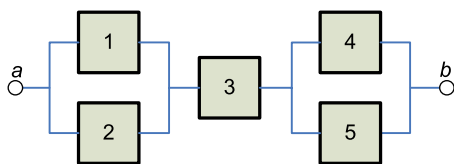


Рис. 1. Пример ССН системы

Вторая особенность влечет следующие математические проблемы:

- сложность решения системы линейных алгебраических уравнений Чепмена-Колмогорова большой размерности для определения стационарных показателей надежности системы (средней наработки между отказами МТBF, среднего времени до восстановления МТTR, стационарного коэффициента готовности системы  $A$ );

- сложность решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Чепмена-Колмогорова с невозвратными неработоспособными состояниями для определения показателей надежности системы, работающей до первого отказа (МТTF, гамма-процентной наработки до отказа, функции отказа  $F(t)$ , вероятности безотказной работы  $R(t)$ );

- сложность решения системы ОДУ Чепмена-Колмогорова для получения нестационарных показателей надежности системы (нестационарного коэффициента готовности  $A(t)$ ).

Для обхода указанных ограничений существующие стандарты [1, 6] и другая специальная литература предусматривают использование приближенных моделей, предоставляющих не точные, но консервативные расчетные значения показателей надежности. Вместе с тем, не все обозначенные проблемы являются существенными и неразрешимыми. Рассмотрим каждую из них в отдельности, укажем ее актуальность и подход к решению.

## Автоматическое построение ГС

При ряде допущений относительно обнаружения отказов и дисциплины восстановления отказавших компонентов, ГС может быть построен автоматически на основе ССН системы [3, с. 142; 7]. Состояния ГС целесообразно именовать бинарным кодом, где состояние «00000» соответствует исправному состоянию системы, «00010» – неработоспособное состояние только элемента 2, состояние «00011» – неработоспособное элементов 1 и 2. Интенсивность перехода системы из состояния «00000» в «00001» равна интенсивности отказа 1-го элемента; интенсивность перехода системы из состояния «00011» в «00001» равна интенсивности восстановления 2-го элемента. Решение о работоспособности каждого состояния ГС определяется проверкой ССН (см. рис. 1) на связность вершин «a» и «b», например, с помощью алгоритма Уоршелла.

ГС, соответствующий ССН на рис. 1, представлен на рис. 2, где заливкой обозначены неработоспособные состояния системы.

Аналогичным способом могут автоматически строиться ГС и марковским методом определяться показатели надежности сетей связи на основе их структурной схемы. Дополнительной особенностью показанного выше подхода является лишь то, что в качестве компонентов системы связи должны рассматриваться как узлы, так и линии связи. А в качестве критериев отказа сети связи необходимо указывать невозможность обмена информацией между двумя конкретными или двумя произвольными узлами сети. Например, сеть связи с 4-мя узлами и 5-ю линиями связи, представленная на рис. 3, имеет ГС с  $2^{4+5}=512$  состояниями. Определение работоспособных состояний зависит от сформулированного критерия отказа сети (например, невозможность передачи сообщений между узлами 1 и 4 (выделены заливкой) или между двумя произвольными узлами).

Автоматическое решение о работоспособности каждого состояния ГС (как и в предыдущем случае) определяется проверкой графа-сети связи (см. рис. 3) на связность рассматриваемых узлов связи (например, «1» и «4»).

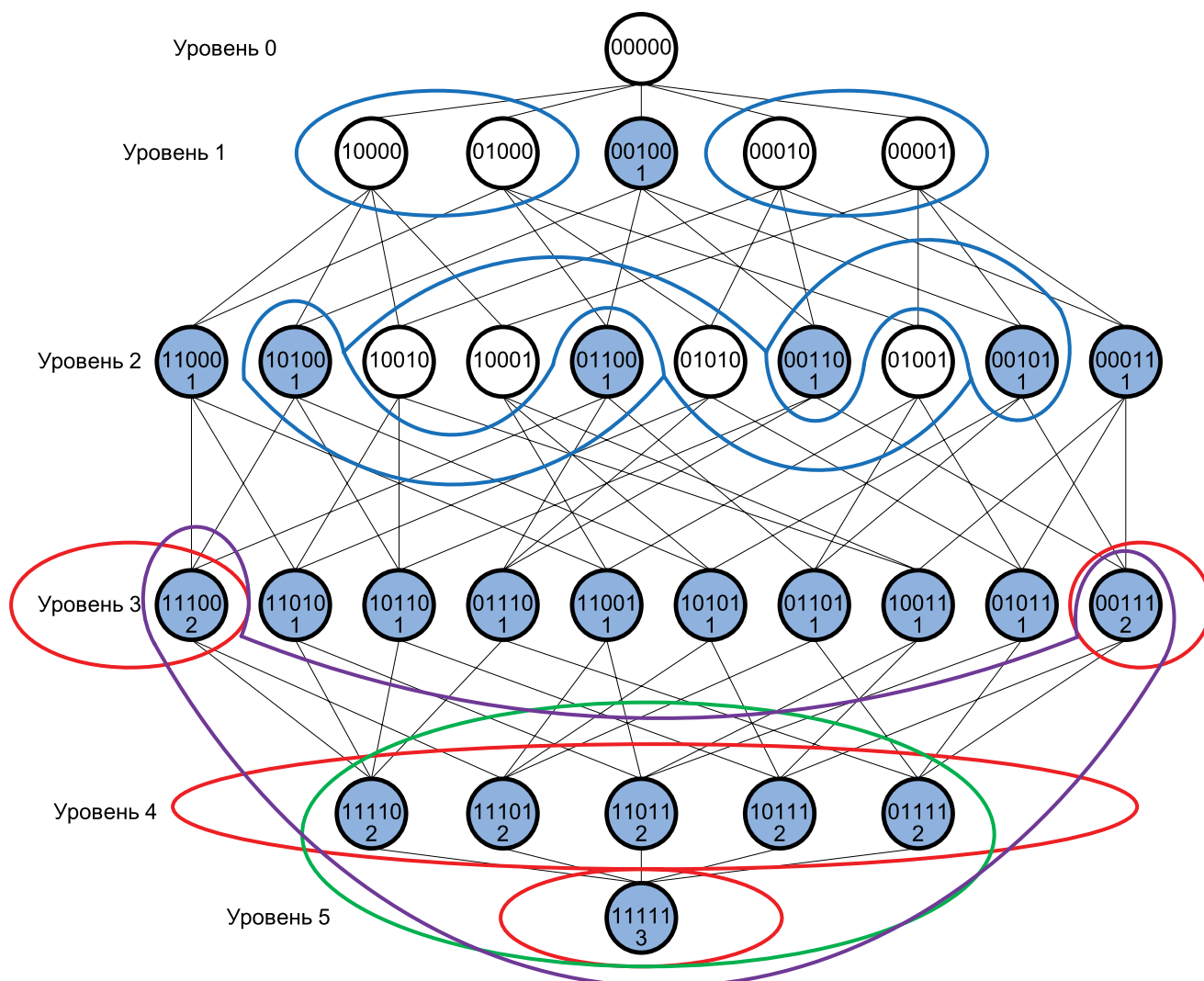


Рис. 2. ГС, соответствующий ССН на рис. 1

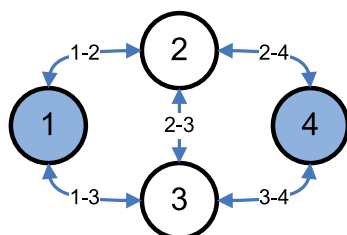


Рис.3. Пример сети связи

В работе [8] рассматриваются специальные подходы к построению ГС энергетических систем, а также подходы к объединению (сокращению количества) состояний ГС, связанные с особенностями функционирования энергетических систем, моделями элементов (источников питания, коммутационного оборудования) и моделями отказов элементов энергетических систем (обрыв, короткое замыкание). В статье [9] рассматривается подход к построению ГС объектов, подверженных явным и скрытым отказам, пребывающих в состоянии ожидания технического обслуживания. Кроме того, в книге [2] рассматриваются вопросы моделирования марковским методом надежности систем с зависимыми

компонентами, неполным контролем и отложенным восстановлением.

## Проблема размерности ГС

Большая размерность ГС действительно ограничивает анализ систем с большим количеством компонентов, но важно понимать реальные технологические границы (возможной реализации) марковского метода. Так, современные пакеты компьютерной математики (например, Maple), справляются с аналитическим (символьным) решением системы порядка 1024 линейных арифметических уравнений (для определения MTBF, MTTR, стационарного коэффициента готовности  $A$ ), а также с аналитическим решением системы примерно 512 ОДУ (для определения нестационарного коэффициента готовности  $A(t)$ ). В пакетах компьютерной математики реализовано несколько математических методов (матричный метод, метод преобразований Лапласа) один из которых может приводить к успешному решению.

Определение показателей безотказности системы, функционирующей до первого отказа (MTTF, функции

отказа  $F(t)$  и вероятности безотказной работы  $R(t)$ ), вовсе не вызывает проблем, поскольку размерность системы ОДУ в данном случае уменьшается, как правило, в несколько раз, за счет объединения всех неработоспособных состояний ГС в единственное невозвратное состояние.

Вместе с тем, в настоящее время представляет собой технологическую сложность использование марковского метода для анализа надежности систем с более, чем 10 компонентами (более 1024 технических состояний).

### Сокращение размерности ГС без снижения точности вычислений

Расширение реализуемости марковского метода связано с сокращением количества состояний ГС. В стандарте [1] уже рассмотрена возможность объединения состояний ГС связанных с

- последовательно соединенными компонентами на ССН;
- параллельно соединенными компонентами, которые имеют одинаковые интенсивности отказов и восстановлений.

Первый подход очевиден и не вызывает никаких проблем автоматизации, кроме задания интенсивности восстановления «объединенного» компонента, которая может быть задана по [1, п. А.2.1] или более консервативным (например, минимальным) значением.

Второй подход [1, п. В.3] также может быть автоматизирован. Для системы из двух элементов размерность ГС может быть уменьшена с 4 до 3 состояний, а для ССН на рис. 1 (в случае тождественности показателей надежности компонентов 1 и 2, а также 4 и 5) размерность ГС можно уменьшить с 32 до 18 состояний. На рис. 2 синими контурными линиями показаны некоторые объединения состояний (например, «10000» и «01000»; «10100» и «01100»; а также «10010», «10001», «01010» и «01001»).

В работе [10] предлагается формализованный подход к объединению состояний с тождественными интенсив-

ностями входов и выходов. А в работе [2] – подход к объединению состояний, соответствующих отказу одного из параллельно соединенных (на ССН) неравнонадежных компонентов; приводятся приближенные модели расчета эквивалентной интенсивности отказов и восстановлений для объединенного состояния.

С учетом объединения последовательно соединенных элементов ССН центральной системы управления струнным транспортным комплексом [11], представленная на рис. 4,а была оптимизирована до ССН на рис. 4,б. С учетом эквивалентности резервированных компонентов общее количество состояний ГС уменьшено с 256 до 81.

Дальнейшее сокращение размерности ГС (для возможности реализации марковского метода анализа) приводит к приближенной оценке параметров надежности систем [2, 3].

### Усечение ГС

В книге [3, п. 8.3, с. 318] предлагается подход к усечению ГС ниже некоторого уровня. Под уровнем ГС [3] понимается подмножество состояний ГС, характеризующееся определенным количеством отказавших компонентов системы (см. рис. 2). Примечательно, что переходы возможны только для состояний ГС, принадлежащих соседним уровням (см. рис. 2). Усеченный ГС должен содержать хотя бы одно неработоспособное состояние.

Подход базируется на двух предположениях:

1) усечение ГС ниже уровня  $n$  эквивалентно тому, что все компоненты системы, отказы которых переводили бы ГС на следующий уровень  $(n + 1)$ , становятся абсолютно надежными. Поэтому расчетные значения показателей надежности, полученные по усеченному ГС, являются «верхними» (оптимистичными) оценками показателей надежности системы;

2) если все состояния уровня  $n$  усеченного ГС принудительно считать неработоспособными, то расчетные показатели безотказности, полученные по такому усе-

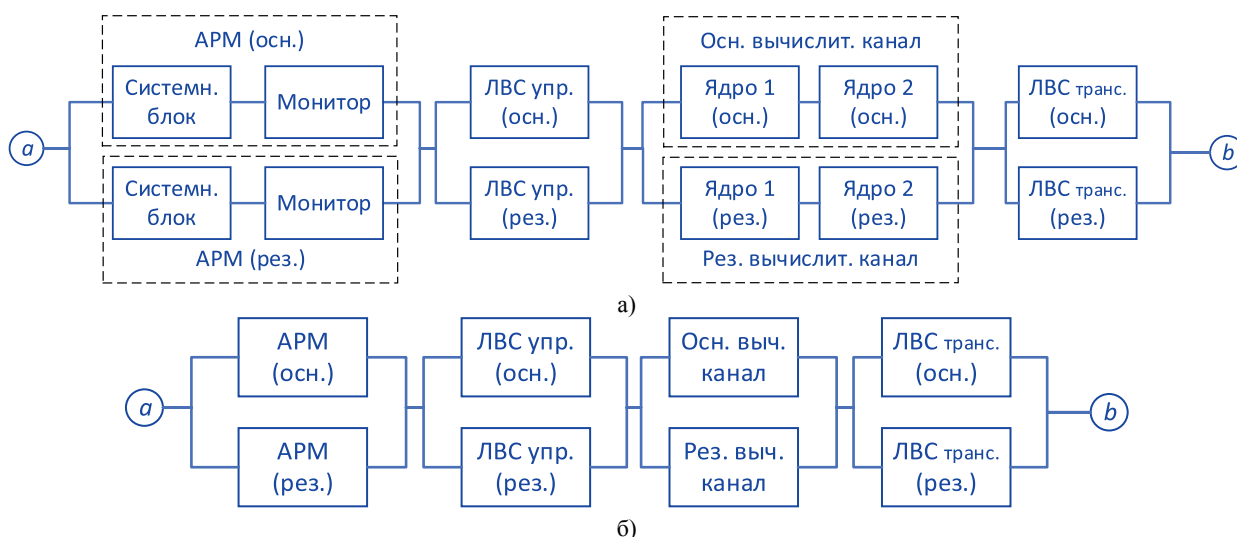


Рис. 4. Структурная схема надежности ЦСУ а – исходная; б – оптимизированная



Табл. 1. Пример усечения ГС, показанного на рис. 2

	Усечение ГС ниже уровня		
	1	2	3
Размерность усеченного ГС	6	16	26
Верхняя оценка МТBF	1040,000000	963,3333334	962,2641467
МТBF	962,2641460		
Нижняя оценка МТBF	200,0000000	896,5517232	–
Верхняя оценка A	0,9904761904	0,9899143675	0,9899049486
A	0,9899049016		
Нижняя оценка A	0,9523809524	0,9895337775	–

ченному ГС, являются «нижними» (консервативными, пессимистичными) оценками.

Расчеты выполняются для ГС, усеченного ниже уровня  $n$ , имеющего хотя бы одно неработоспособное состояние. Если полученная верхняя и нижняя оценка надежности системы не позволяет проверить соответствие требованиям или их различие превышает требуемую точность, то анализ проводят при усечении ГС ниже уровня  $n+1$ .

В табл. 1 демонстрируются результаты усечения ГС для системы, представленной ССН на рис. 1. Интенсивности отказов компонентов  $\lambda_i = 10^{-3}$  1/час; интенсивности восстановления –  $\mu_i = 0,1$  1/час,  $i=1...5$ .

Недостатками описанного усечения ГС является то, что:  
а) в работе [3] не указываются условия справедливости исходных предположений. Вероятно, очевидное требование к монотонности структуры исследуемой системы не является достаточным;

б) если на некотором уровне ГС отсутствуют работоспособные состояния, то по усеченному ГС возможна только верхняя оценка показателей надежности (см. правую графу табл. 1).

Объединение неработоспособных состояний

Рассмотрим альтернативные способы сокращения неработоспособных состояний ГС, которых, как правило, много больше, чем работоспособных. Введем вспомогательное понятие. Порядком некоторого неработоспособного состояния назовем минимальное количество переходов ГС из данного состояния в

одно из работоспособных состояний. На рис. 2 порядок состояний указан под заголовком состояний. Рассмотрим три следующих способа объединения неработоспособных состояний ГС (для примера – порядка 2 и более).

Способ № 1: объединение всех состояний заданного или большего порядка на каждом отдельном уровне. То есть объединяются состояния с одинаковым количеством отказавших компонентов. В данном случае переходы между объединяемыми состояниями исходного ГС отсутствуют. Предлагаемое объединение, показанное на рис. 2 красным цветом, приведет к объединению 8 неработоспособных состояний порядка 2 и порядка 3 в три отдельных состояния. Общее количество состояний результирующего ГС будет равно 27.

Способ № 2: объединение всех состояний порядка 2 и более в одно состояние. При этом переходы между объединяемыми состояниями игнорируются. Предлагаемое объединение на рис. 2 показано фиолетовым цветом. Общее количество состояний результирующего ГС будет равно 25.

Способ № 3: объединение всех состояний порядка 2 (и более) в границах уровней, где отсутствуют состояния порядка ниже 2. При этом переходы между объединяемыми состояниями игнорируются. Предлагаемое объединение на рис. 2 показано зеленым цветом. Общее количество состояний результирующего ГС будет равно 27.

В табл. 2 представлены результаты апробации предлагаемых способов объединения неработоспособных состояний на примере анализа центральной системы управления струнным транспортным комплексом [11] (рис. 4,б).

Табл. 2. Результаты апробации способов объединения неработоспособных состояний

		Размерность	$R(10^5)$	MTTF	MTBF	MTTR	A
Исходный ГС		$2^8=256$	0,7508928434	348990,4121	347608,9962	12,00224069	0,9999654732
Способ №1	1	91	0,7508928449	348990,4128	348108,4535	2,967963168	0,9999914741
	2	195	0,7508928434	348990,4121	347609,0058	12,00241484	0,9999654727
	3	246	0,7508928434	348990,4121	347608,9962	12,00224069	0,9999654732
Способ №2	1	82	0,7508928441	348990,4124	346385,0853	0,110912539	0,9999996798
	2	190	0,7508928434	348990,4121	347608,9893	12,00251856	0,9999654724
	3	244	0,7508928434	348990,4121	347608,9962	12,00224069	0,9999654732
Способ №3	1	164	0,7508928434	348990,4121	347608,9962	12,00224069	0,9999654732
	2	220	0,7508928434	348990,4121	347608,9962	12,00224069	0,9999654732
	3	248	0,7508928434	348990,4121	347608,9962	12,00224069	0,9999654732

Апробация трех предложенных способов объединения неработоспособных состояний ГС показала следующие результаты:

1) рассмотренные объединения позволяют расширить (без дополнительных допущений) реализуемость марковского метода от систем с 8-10 компонентами до систем с 12-15 компонентами на ССН;

2) рассмотренные объединения неработоспособных состояний не сказываются на возможности вычисления показателей безотказности системы, функционирующей до первого отказа ( $MTTF$ ,  $F(t)$ ,  $R(t)$ ), поскольку марковский метод предусматривает объединение всех неработоспособных состояний в единственное невозвратное неработоспособное состояние;

3) рассмотренные объединения неработоспособных состояний (фактически, изменения структуры ГС) приводят к смещению расчетных значений показателей  $MTBF$ ,  $MTTR$ ,  $A$ ,  $A(t)$ . Расчетные значения не являются заведомо консервативными; напротив, зачастую являются завышенными (оптимистичными). Смещение особенно велико в случае объединения неработоспособных состояний, непосредственно связанных с работоспособными состояниями (при объединении состояний порядка 1). Однако для типичных значений интенсивностей отказов и восстановлений элементов (отличающихся в 1000 и более раз) при объединении состояний порядка 2 относительные различия расчетных значений  $MTBF$  составляют менее 0,01%, стационарного коэффициента готовности  $A$  – менее 1%;

4) для каждого отдельного способа объединения неработоспособных состояний погрешность расчета показателей надежности обратно пропорциональна размерности ГС. Предлагаемые формальные способы позволяют оперативно регулировать точность вычислений, обеспечивая реализуемость вычислений;

5) аналитическое решение системы ОДУ, построенной по ГС с объединенными неработоспособными состояниями, зачастую характеризуется аномальными расчетными значениями нестационарного коэффициента готовности  $A(t)$  при малых значениях  $t$  (рис. 5). При этом, вычислительные аномалии проявляются при всех рассмотренных способах объединения неработоспособных состояний;

6) объединение состояний ГС целесообразно проводить способом № 2, наиболее эффективно сокращающим размерность ГС.

## Библиографический список

1. ГОСТ Р МЭК 61165-2019 (IEC 61165:2006) Менеджмент риска. Применение марковских методов.
2. Викторова В.С. Модели и методы расчета надежности технических систем: Изд. 2-е, испр. / В.С. Викторова, А.С. Степанянц. М.: ЛЕНАНД, 2016. 256 с.
3. Половко А.М. Основы теории надежности / А. М. Половко, С. В. Гуров. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704 с.
4. Ушаков И.А. Курс теории надежности систем: учеб. пособие для вузов М.: Дрофа, 2008. 239 с.
5. Шубинский И.Б. Структурная надежность информационных систем. Методы анализа М.: «Журнал Надежность», 2012. 216 с.
6. ГОСТ Р МЭК 61508-6-2012 Функциональная безопасность систем электрических, электронных, программируемых электронных, связанных с безопасностью. Ч.6. Руководство по применению ГОСТ Р МЭК 61508-2 и ГОСТ Р МЭК 61508-3 и средства.
7. Шевченко Д.Н. Автоматизированный анализ надежности систем ЖАТС марковским методом // Автоматика, связь, информатика. 2018. № 9. С. 11-13.
8. Обоскалов В.П. Структурная надежность электроэнергетических систем: Учеб. пособие. Екатеринбург: УрФУ, 2012. 194 с.
9. Зеленцов Б.П. Формирование диаграмм состояний-переходов в условиях мониторинга технического состояния. Надежность. 2022. № 2. С. 22-29.
10. Каштанов В.А. Теория надежности сложных систем / В.А. Каштанов, А.И. Медведев. 2-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 608 с.
11. Юницкий А.Э. Струнный транспорт для городских перевозок пассажиров / А.Э. Юницкий, В.А. Гарах, М.И. Цырлин // Наука и техника транспорта. 2021. № 3. С. 19-25.

## References

1. GOST R IEC 61165 2019 (IEC 61165:2006) Risk management. Application of Markov methods. (in Russ.)

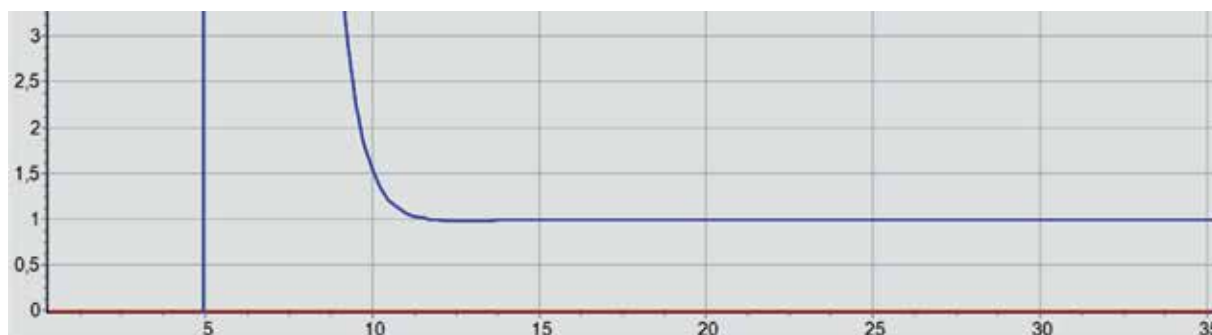


Рис. 5. Пример вычисления нестационарного коэффициента готовности  $A(t)$

2. Viktorova V.S., Stepanyants A.S. [Models and methods for calculating the dependability of technical systems: 2nd edition, revised]. Moscow: LENAND; 2016. (in Russ.)

3. Polovko A.M., Gurov S.V. [Fundamentals of the dependability theory. 2nd ed., revised and enlarged]. St. Petersburg: BHV-Peterburg; 2006. (in Russ.)

4. Ushakov I.A. [Course of systems dependability theory: a study guide for superior education establishments]. Moscow: Drofa; 2008. (in Russ.)

5. Shubinsky I.B. [Structural dependability of information systems. Analysis methods]. Moscow: "Dependability Journal"; 2012. (in Russ.)

6. GOST R IEC 61508-6-2012. Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic safety-related systems. Part 6. Guidelines on the application of GOST R IEC 61508-2 and GOST R IEC 61508-3. (in Russ.)

7. Shevchenko D.N. Software for analysis of reliability of SCB-systems by the Markov method. *Automation, Communications, Informatics* 2018;9:11-13. (in Russ.)

8. Oboskalov V.P. [Structural dependability of electric power systems: a study guide]. Yekaterinburg: UrFU; 2012. (in Russ.)

9. Zelentsov B.P. Defining state-transition diagrams as part of technical state monitoring. *Dependability* 2022;2:22-29.

10. Kashtanov V.A., Medvedev A.I. [Dependability theory of complex systems. 2nd edition, revised]. Moscow: FIZMATLIT; 2010. (in Russ.)

11. Yunitskiy A.E., Garakh V.A., Tsyrlin M.I. SkyWay string transport for urban passenger transportation. *Science and Technology in Transport* 2021;3:19-25. (in Russ.)

## Сведения об авторе

**Шевченко Дмитрий Николаевич** – кандидат технических наук, доцент, главный специалист ЗАО «Струнные технологии», ул. Железнодорожная, д. 33, г. Минск, Республика Беларусь, 220089, e-mail: shevchenkodn@yandex.ru

## About the author

**Shevchenko Dmitriy Nikolaevich**, Candidate of Engineering, Associate Professor, Chief Specialist, Unitsky String Technologies Inc., 33 Zheleznodorozhnaya St., Minsk, 220089, Republic of Belarus, e-mail: shevchenkodn@yandex.ru

## Вклад автора в статью

Выполнен анализ литературы по теме исследования; усовершенствован подход к автоматическому построению графа состояний по заданной структурной схеме надежности технической системы или по структурной схеме сети связи; автоматизированы способы сокращения размерности графа состояний, которые не снижают точность марковского метода; проведено исследование известного подхода к усечению ГС; предложены и исследованы (на точность) некоторые способы объединения неработоспособных состояний графа состояний для возможности реализации марковского метода анализа надежности больших систем.

## Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.