

Простой критерий эффективности смещенных оценок

A simple criterion for the effectiveness of biased estimators

Михайлов В.С.

Viktor S. Mikhailov

Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева», Москва, Российская Федерация

D.I. Mendeleev Central Research and Design Institute of Chemistry and Mechanics, Moscow, Russian Federation

mvs1956@list.ru



Михайлов В.С.

Резюме. Точечное оценивание – это одна из наиболее употребительных форм статистических выводов. В данной работе затрагиваются понятия несмещенность и эффективность смещенных оценок. Привлекательным приближением для истинного (количественного) значения оцениваемого параметра t , чьи величины принадлежат некоторому числовому множеству $t \in T$, является такая оценка $\hat{t}$, для которой минимальна сумма математического ожидания от квадрата разностей между возможной реализацией x_i и оцениваемым параметром t (оценивание по методу наименьших квадратов). Другой подход состоит в том, чтобы найти величину параметра t исходя из суммы математического ожидания от разности между возможной реализацией x_i и оцениваемым параметром t при условии, что эта сумма равна нулю, так что положительные и отрицательные разности сбалансированы $\sum (x_i - t) = 0$. При этом реализации от N независимых случайных величин имеют общее распределение, зависящее от оцениваемого параметра t . Существуют и другие подходы, но в настоящее время не существует единственного убедительного определения оптимальности поиска эффективных оценок. Известный статистик Бокс писал: «Все модели неправильные, но некоторые из них полезны». Не всегда просто установить адекватность модели, поэтому именно полезность определяет наш выбор! Предлагаемый ниже простой критерий эффективности смещенных оценок слишком удобен, однако это не означает, что предположение об эффективности смещенных оценок на основе этого критерия истинно, но полезность этой простой и удобной модели очевидна. **Цель работы.** Целью работы является построение простого критерия эффективности смещенных оценок и получение простых эффективных оценок показателей надежности для биномиального плана испытаний и плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением при использовании построенного простого критерия эффективности смещенных оценок. **Выводы.** Получен простой критерий эффективности смещенных оценок, в котором скомпенсировано влияние неравнозначности величин дисперсии и квадрата смещения. Получены новые эффективные смещенные оценки различных показателей надежности для биномиального плана испытаний и плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий.

Abstract. Point estimation is one of the most common forms of statistical inference. This paper touches upon the concepts of unbiasedness and effectiveness of biased estimates. An attractive approximation for the true (quantitative) value of the estimated parameter t whose values belong to a certain numerical set $t \in T$ is an estimate $\hat{t}$ for which the sum of the mathematical expectation of the square of the differences between the possible realization of x_i and the estimated parameter t is minimal (least squares estimation). Another approach is to find the value of the parameter t based on the sum of the mathematical expectation of the difference between the possible realisation x_i and the estimated parameter t , provided that this sum is zero, so that the positive and negative differences are balanced $\sum (x_i - t) = 0$. Implementations of N independent random values have a general distribution that depends on the estimated parameter t . There are other approaches, but at present there is no single convincing definition of the optimality of finding effective estimates. The well-known statistician Box wrote: "All models are wrong, some are useful." It is not always easy to establish the adequacy of a model, so our choice is defined by its utility! The simple effectiveness criterion of biased estimates given below is too convenient, however this does not mean that the assumption of the effectiveness of biased estimates based on this criterion is true, yet the usefulness of this simple and convenient model is obvious. **The Aim of the paper.** The paper aims to construct a simple effectiveness criterion of biased estimates and obtain simple effective estimates of dependability indicators for a binomial test plan and a test plan with limited time and recovery using the constructed simple effectiveness criterion of biased estimates. **Conclusions.** A simple effectiveness criterion of biased estimates was obtained that compensates for the effect of unequal dispersion values and the square of the bias. New

effective biased estimates of various dependability indicators were obtained for a binomial test plan and a plan with limited test time and recovery of failed items.

Ключевые слова: оценка, эффективная оценка, критерий эффективности, план испытаний, смещенные оценки.

Keywords: estimate, efficient estimate, effectiveness criterion, test plan, biased estimates.

Для цитирования: Михайлов В.С. Простой критерий эффективности смещенных оценок // Надежность. 2024. №1. С. 25-33. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-1-25-33>

For citation: Mikhailov V.S. A simple criterion for the effectiveness of biased estimators. Dependability 2024;1:25-33. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2024-24-1-25-33>

Поступила: 18.05.2023 / **После доработки:** 22.01.2024 / **К печати:** 15.03.2024

Received on: 18.05.2023 / **Revised on:** 22.01.2024 / **For printing:** 15.03.2024

Введение

Точечное оценивание – это одна из наиболее употребительных форм статистических выводов. Для описания качества оценивания неизвестного параметра t , истинную величину которого исследователь никогда не узнает, используются такие общие понятия как несмещенность, состоятельность, достаточность, эффективность. В данной работе затрагиваются понятия несмещенность и эффективность смещенных оценок. Здесь и далее обозначения плана испытаний соответствуют [1]. Ограничимся двумя типами плана испытаний $NB\tau$, NBt , где B , τ – характеристики плана испытаний соответственно с восстановлением отказавших изделий и без восстановления, N – число испытуемых изделий, τ – время испытаний, и будем вести речь только об оценках параметра t функции вероятности распределения $F_R(r; t, N, \tau)$, где F_R – функция распределения случайной величины (с.в.) R , $R = r$ – некоторая реализация с.в. R в процессе испытаний, N, τ – параметры плана испытаний. Привлекательным приближением для истинного (количественного) значения оцениваемого параметра t , чьи величины принадлежат некоторому числовому множеству $t \in T$, является такая оценка θ , для которой минимальна сумма математического ожидания от квадрата разностей между возможной реализацией θ и оцениваемым параметром t (оценивание по методу наименьших квадратов) [2–4].

Другой подход состоит в том, чтобы найти величину параметра t исходя из суммы математического ожидания от разности между возможной реализацией $\theta = x_i$ и оцениваемым параметром t при условии, что эта сумма равна нулю, так что положительные и отрицательные разности сбалансированы $\sum (x_i - t) = 0$ [2]. При этом реализации от N независимых с.в. имеют общее распределение, зависящее от оцениваемого параметра t .

Существуют и другие подходы, но в настоящее время не существует единственного убедительного определения оптимальности поиска эффективных оценок. Известный статист Бокс писал: «Все модели неправильные, но некоторые из них полезны». Не всегда просто установить адекватность модели, поэтому именно полезность определяет наш выбор! Предлагаемый ниже простой критерий эффективности смещенных оценок слишком удобен, однако это не означает, что предполо-

жение об эффективности смещенных оценок на основе этого критерия истинно, но полезность этой простой и удобной модели очевидна.

В настоящей работе предлагается подход, который является наиболее простым. На практике часто бывает полезным подобрать несколько различных моделей для исследуемой задачи. И затем можно быть удовлетворенным, если будет наблюдаться разумное согласие между выводами, полученными в рамках различных моделей [2]. Именно такой подход и используется в данной работе.

Для нужд построения критерия эффективности смещенных оценок будем произвольную статистическую оценку θ параметра t характеризовать смещением и дисперсией. Обозначим через $b = E(\theta) - t$ – смещение оценки θ от параметра t , где E – математическое ожидание, а через $D = E(\theta - E(\theta))^2$ – дисперсию оценки θ . Тогда уклонение (в среднем квадратичном смысле) некоторой оценки θ от оцениваемого параметра t выражается формулой [1–5]:

$$L(\theta) = E(\theta - t)^2 = D + b^2. \quad (1)$$

Цель работы. Целью работы является построение простого критерия эффективности смещенных оценок и получение простых эффективных оценок показателей надежности для биномиального плана испытаний и плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением при использовании построенного простого критерия эффективности смещенных оценок.

Понятия балансировки и абсолютного суммарного смещения. Под суммарным смещением B понимается суммирование смещений по всем возможным величинам параметра $t \in T$

$$B(\theta(R; N, \tau)) = \int_{t \in T} \{E\theta(R; N, \tau) - t\} dt = \int_{t \in T} b dt,$$

где T – множество всех возможных величин параметра t .

Сформулируем понятие балансировки для оценки параметра t , а именно:

$$A(\theta(R; N, \tau)) = B(\theta(R; N, \tau)) / = \\ = \int_{t \in T} \{E\theta(R; N, \tau) - t\} dt / = \int_{t \in T} b dt /,$$

где $/$ – абсолютная величина, суммирование смещений ведется по всем возможным величинам оцениваемого

параметра, которые принадлежат некоторому числовому множеству $t \in T$.

Балансировка характеризует сбалансированность разностей реализаций оценки θ от оцениваемого параметра t в целом по всевозможным величинам, которые может принимать этот параметр t .

Обозначим через:

$$K_{>0} = \int_{\{t>0\}} \{E\theta(R; N, \tau) - t\} dt = \int_{b(t)>0} b dt = B_{>0} - \text{положи-}$$

тельное суммарное смещение, где суммирование ведется по тем величинам параметра t , для которых выполняется условие $E(\theta) - t > 0$;

$$K_{<0} = \int_{\{t<0\}} \{E\theta(R; N, \tau) - t\} dt = \int_{b(t)<0} b dt = -B_{<0} = /B_{<0}/ -$$

отрицательное суммарное смещение, взятое по абсолютной величине, где суммирование ведется по тем величинам параметра t , для которых выполняется условие $E(\theta) - t < 0$;

$W = \int_{t \in T} /E\theta(R; N, \tau) - t/ dt = \int_{t \in T} /b/ dt$ – абсолютное суммарное смещение (разброс и точность оценки θ относительно параметра t), где суммирование смещений, взятых по абсолютной величине, ведется по всем возможным величинам оцениваемого параметра, которые принадлежат некоторому числовому множеству $t \in T$.

Тогда $A(\theta) = /K_{>0} - K_{<0}/ = /B_{>0} + B_{<0}/$. Заметим, что для оценки θ балансировка, равная нулю $A = 0$ (или сбалансированность оценки θ), не означает симметрию распределения вероятностей реализаций оценки $\theta(R)$.

Так как величины $K_{>0} \geq 0$ и $K_{<0} \geq 0$, то для сбалансированной оценки $A = 0$ выполняется соотношение $K_{>0} = K_{<0}$.

Абсолютное суммарное смещение можно выразить через элементы разности балансировки ($K_{>0}$; $K_{<0}$) следующим образом

$$W = K_{>0} + K_{<0} = B_{>0} - B_{<0}.$$

Одновременно к правой части формулы $W = K_{>0} + K_{<0}$ прибавим и отнимем элемент $\pm K_{<0}$, тогда получим

$$W = K_{>0} - K_{<0} + 2K_{<0} = B + 2K_{<0},$$

где $K_{>0} - K_{<0} = B_{>0} + B_{<0} = B$ – суммарное смещение или величина балансировки, взятая из под знака абсолютной величины. Аналогично предыдущему, одновременно к правой части формулы $W = K_{>0} + K_{<0}$ прибавим и отнимем элемент $\pm K_{>0}$, тогда получим

$$W = K_{<0} - K_{>0} + 2K_{>0} = -B + 2K_{>0},$$

где $K_{>0} - K_{<0} = B_{>0} + B_{<0} = B$ – суммарное смещение или величина балансировки, взятая из под знака абсолютной величины. Окончательно получаем $W = 2K_{<0} + B = 2K_{>0} - B$.

Заметим, что определение суммарного уклонения (аналог классического уклонения в среднеквадратичном смысле) совпадает с определением суммарного смещения, так как

$$\int_{t \in T} E(\theta - t) dt = \int_{t \in T} (E\theta - t) dt = \int_{t \in T} b dt = B(\theta).$$

Обозначим через $E/\theta(R) - t/ = /E\theta(R) - t/ = /b/$ уклонение, а через G – абсолютное суммарное уклонение $G = \int_{t \in T} E/\theta - t/ dt = \int_{b(t)>0} b dt - \int_{b(t)<0} b dt = B_{>0} - B_{<0} = K_{>0} + K_{<0} = W(\theta)$. То есть абсолютное суммарное уклонение G совпадает с абсолютным суммарным смещением W .

Суммарная дисперсия (аналог классической дисперсии в среднеквадратичном смысле) определяется следующим образом

$$\int_{t \in T} E(\theta - E\theta) dt = \int_{t \in T} (E\theta - EE\theta) dt = \int_{t \in T} (E\theta - E\theta) dt = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{t \in T} E(\theta - E\theta) dt &= \int_{t \in T} (E\theta - EE\theta) dt = \\ &= \int_{t \in T} (E\theta - E\theta) dt = 0 \end{aligned}$$

и поэтому не интересна. Определим абсолютную дисперсию оценки θ как $E/\theta - E\theta/$. Тогда абсолютная суммарная дисперсия имеет вид

$$\begin{aligned} G &= \int_{t \in T} E/\theta - E\theta/ dt = \\ &= \int_{/*/>0} (E\theta - E\theta) dt - \int_{/*/<0} (E\theta - E\theta) dt = 0. \end{aligned}$$

Аналог дисперсии $E/\theta - E\theta/$, как и дисперсия D , является характеристикой поведения оценки θ относительно ее математического ожидания $E\theta$, то есть определяет точность этой оценки. Однако наиболее интересно поведение оценки θ относительно оцениваемого параметра t , поэтому дисперсия как неинформативная характеристика в данной работе не рассматривается и по этой причине. В этом случае понятие точности оценки заменило абсолютное суммарное смещение W .

Класс всех оценок для которых выполнимо условие $W = K_{>0} + K_{<0}$ (именно с такими оценками следует работать испытателю) можно подразделить на подклассы, для которых выполняется условие $W = K_{>0} + K_{<0} = x$, где x – некоторое фиксированное произвольное вещественное число.

Пусть выделен некоторый подкласс оценок $\theta(R)$, на котором абсолютное суммарное смещение постоянно и равно некоторому вещественному числу x , то есть $W = K_{>0} + K_{<0} = x$, тогда характеристика $K_{>0}$ этого подкласса оценок $\theta(R)$ принимает максимальную величину $K_{>0} = x - K_{<0}$, равную x , когда $K_{<0} = 0$, и наоборот. Заметим, что $K_{>0} \geq 0$ и $K_{<0} \geq 0$ по определению. Аналогичное верно и для балансировки $A = /K_{>0} - K_{<0}/$, которая в этом подклассе оценок $\theta(R)$ принимает максимальную величину $A = K_{>0} = x$ при $K_{<0} = 0$. И наоборот, $A = K_{<0} = x$ при $K_{>0} = 0$. Таким образом, условия $K_{>0} = x$ при $K_{<0} = 0$ (и наоборот, $K_{<0} = x$ при $K_{>0} = 0$) определяют подклассы оценок $W = K_{>0} + K_{<0} = x$, в которых величины $A(R)$ и $W(R)$ максимальны и равны $A(R) = W(R) = x$.

Сбалансированные оценки. Если в некотором классе оценок их характеристика A принимает величину, равную нулю $A = 0$, то в этом случае будем говорить, что оценка обладает полной балансировкой или сбалансирована в этом классе оценок и опускать саму величину балансировки. Рассмотрим подкласс сбалансированных оценок $A(\theta(R)) = /K_{>0} - K_{<0}/ = 0$, что эквивалентно $K_{>0} = K_{<0}$. Тогда для этого подкласса оценок $\theta(R)$ абсолютное суммарное смещение $W = K_{>0} + K_{<0} = x$ можно выразить формулой $W = 2K_{>0} = 2K_{<0} = x$. Следовательно, для подкласса сбалансированных оценок $A(\theta(R)) = /K_{>0} - K_{<0}/ = 0$ выполняется равенство $K_{>0} = K_{<0} = x/2$, которое является условием сбалансированности.

Полностью разбалансированные оценки. Оценки $\theta(R)$ называются полностью разбалансированными, если они принадлежат подклассу оценок $\theta(R)$, у которых характеристика $K_{<0}$ (или $K_{>0}$) принимает минимальную величину $K_{<0} = 0$ (или $K_{>0} = 0$) или близкую к ее минимальному количественному значению на этом подклассе оценок $\theta(R)$ $K_{<0} \approx 0$ (или $K_{>0} \approx 0$); или характеристика $K_{>0}$ (или $K_{<0}$) принимает максимальную величину или близкую к ее максимальному количественному значению на этом подклассе оценок $\theta(R)$. Для таких оценок условие полной разбалансировки эквивалентно соизмеримости балансировки и абсолютного суммарного смещения $A = W = x$ ($A \approx W = x$). В этом случае будем говорить о полной разбалансировке оценки ($A = W = x$) или близкой к полной разбалансировке ($A \approx W = x$).

Предпосылки к построению простого критерия эффективности смещенных оценок. Рассмотрим недостатки существующих критериев эффективности смещенных оценок. В классическом случае критерием смещенных оценок является уклонение (в среднем квадратичном смысле) некоторой оценки θ от оцениваемого параметра t (см. формулу (1)). Заметим, что уклонение $L(\theta)$, как характеристика эффективности, при изменении дисперсии тоже изменяется на эту величину, то есть ее изменение происходит без учета зависимости от конкретной величины смещения оценки. В добавок к этому заметим, что величины дисперсии и квадрата смещения не равнозначны по отношению друг к другу, то есть отношение этих характеристик может иметь значительную величину. Например, пусть имеется группа оценок, которые по своим свойствам близки к эффективной несмещенной оценке (именно с такими оценками имеет смысл работать), то есть $b^2 \approx 0$ и $D \gg b^2$, откуда $L(\theta) \approx D$, тогда даже при значительном изменении квадрата смещения b^2 уклонение $L(\theta) \approx D$ не способно выделить эффективную смещенную оценку среди оценок с одинаковой дисперсией D .

В работах [5–7] была попытка построить критерий эффективности смещенных оценок, у которого при выборе эффективной оценки влияние неравнозначности величин дисперсии и квадрата смещения скомпенсировано. Для этого попытались связать дисперсию и квадрат смещения так, чтобы при изменении дисперсии уклонение менялось с учетом смещения. Заметим, что

смещение является первичным фактором при выборе эффективной смещенной оценки. В качестве критерия эффективности в классе смещенных оценок устанавливается характеристика $C(\theta) = D \cdot b^2$ [5–7], то есть в основе сравнения эффективности смещенных оценок θ параметров надежности t лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R)) = b^2(\theta(R)) \cdot D\theta(R)$ на предложенных оценках $\theta(R)$ при условии, что должно выполняться обязательное соотношение $D > 4b^2$.

Однако в процессе исследования стало понятным, что выполнение обязательного соотношения $D > 4b^2$ не полностью отражает смысл эффективной оценки, так как дисперсия выражает степень разброса самой оценки относительно математического ожидания этой оценки (от ее среднего). При принятии положительного решения об эффективности смещенной оценки важнее научиться учитывать разброс смещенной оценки от оцениваемого параметра (ошибка оценивания) без влияния дисперсии (см. формулу (1)), которая для смещенных оценок может быть близкой к нулю при конечном смещении, и без обязательного условия выполнения соотношения $D > 4b^2$.

Формулировка простого критерия эффективности смещенных оценок. Выразим через характеристики A и W простой критерий эффективности смещенных оценок как некоторую характеристику $Q = (A + 1) \cdot W$, минимизация которой на предложенных оценках определяет эффективную смещенную оценку. Компоненты построенного критерия легко вычислить через компоненты балансировки $K_{>0}$, $K_{<0}$, а именно: $Q = (/K_{>0} - K_{<0}/ + 1) \cdot (K_{>0} + K_{<0})$. Добавление единицы дает гарантию того, чтобы сбалансированная оценка не стала автоматически абсолютно эффективной, а единица не меняет результат умножения. Таким образом, для сбалансированных оценок или близких к таковым, и даже для оценок примерно равных по сбалансированности $(A + 1) \approx s$, на передний план выходит сравнение абсолютных суммарных смещений $W = x$ этих оценок, что является справедливым шагом при сравнении оценок на эффективность.

Абсолютно эффективная оценка имеет суммарное смещение, равное нулю $W = 0$ (и как следствие $A = 0$), а, следовательно, простой критерий эффективности смещенных оценок $Q = (A + 1) \cdot W = 0$.

В том случае, когда характеристика A в классе, определяемом величиной $W = x$, принимает максимальную величину $A = W = x$ при $K_{<0} = 0$ (или при $K_{>0} = 0$) – случай наихудшей оценки в этом классе, то и простой критерий эффективности смещенных оценок принимает максимальную величину, равную $Q = (A + 1) \cdot W = (x + 1) \cdot x = x^2 + x$ на этой наихудшей оценке из рассматриваемого класса.

В том случае, когда характеристика A в классе, определяемом величиной $W = x$, принимает минимальную величину $A = 0$ при $K_{<0} = x/2$ и $K_{>0} = x/2$ (сбалансированная оценка), то и простой критерий эффективности смещенных оценок принимает минимальную величину, равную $Q = (A + 1) \cdot W = (0 + 1) \cdot x = x$ на этой сбаланси-

рованной оценке, которая в рассматриваемом классе является эффективной.

Из вида абстрактной формулы абсолютного суммарного смещения

$$W = 2K_{<0} + B = 2K_{>0} - B$$

можно сделать вывод, что балансировка $A(\theta) = |B| = |K_{>0} - K_{<0}| = |B_{>0} + B_{<0}|$ уже неявно учтена в формуле для абсолютного суммарного смещения $W = 2K_{<0} + B = 2K_{>0} - B$ и поэтому играет вспомогательную роль при выборе эффективных оценок. Однако она позволяет увидеть через величину баланса, насколько оценка имеет тенденцию к улучшению в своем классе оценок, а множитель $(A + 1)$ в формуле $Q = (A + 1) \cdot W$ не позволяет скрыть несбалансированность оценки, адекватно увеличивая величину характеристики Q критерия эффективности смещенных оценок. Понятно, что смещенная оценка должна быть сбалансирована в своем классе, прежде чем она станет ближе к эффективной.

Сформулированный простой критерий эффективности смещенных оценок оперирует только двумя родственными понятиями (балансировка и смещение), не зависящими от дополнительных условий и является простым с точки зрения вычислений, что дает ему неоспоримое преимущество в сравнении с другими критериями. В силу этих причин именно на простом критерии построено основное изложение данной работы.

Заметим, что сбалансированные оценки $A = 0$ являются эффективными только в подклассе, которому принадлежат, но не являются эффективными в более широком классе. Например, рассмотрим два подкласса, для которых выполняется условие $W = x > W = y$, тогда сбалансированная оценка в классе, для которого выполняется условие $W = x$, является эффективной в этом классе $Q = (A + 1) \cdot W = x$, но не является эффективной в классе, для которого выполняется условие $W = y$, так как $Q = (A + 1) \cdot W = y < x$.

Важно помнить, что существует множество локальных минимумов функционала $Q = (A + 1) \cdot W$ при поиске эффективной смещенной оценки на выделенных классах оценок.

Принцип сбалансированности: оценки $\theta(R)$, близкие по своей эффективности $Q \approx 0$ ($W \approx 0$) к абсолютно эффективной оценке $Q = 0$ ($W = 0$), должны обладать сбалансированностью, близкой к полной сбалансированности $A \approx 0$. Для этого нужно, чтобы выполнялось условие сбалансированности $K_{>0} \approx K_{<0} \approx x/2$ ($x \approx 0$).

Поэтому при построении оценок следует в первую очередь следить за их сбалансированностью $A = 0$. Однако это не гарантирует их эффективность $Q > 0$ ($W > 0$)!

Получение эффективных смещенных оценок для различных типов плана испытаний. Для плана типа NBт достаточной статистикой является число наблюдаемых отказов r [3, 4]. Обозначим случайное число отказов через R , тогда для плана испытаний типа NBт с.в. R имеет пуассоновское распределение $L(r; \Delta)$ с параметром $\Delta = N\tau / t$, где параметр t – средняя наработка до отказа (СНДО) [1, 4]. Тогда, по определению, r – реализация с.в. R . С другой стороны, R – сумма с.в. X_i , каждая из кото-

рых есть случайное число отказов одного из N изделий ($1 < i < N$), поставленных на испытания. С.в. X_i имеют пуассоновское распределение с параметром Δ / N [1, 4]:

$$L(r; \Delta) = \sum_{k=0}^{X_1 + \dots + X_n = r} \exp\{-\Delta\} \cdot \frac{\Delta^k}{k!}. \quad (2)$$

Воспользуемся формулой (2) и изучим свойства оценки параметра Δ , и как следствие параметра t , получаемой из уравнения:

$$L(r; \Delta) = \sum_{k=0}^r \exp\{-\Delta\} \cdot \frac{\Delta^k}{k!} = \alpha$$

или

$$\varepsilon(\Delta) = \ln(2) + \ln\left(\sum_{k=0}^r \frac{\Delta^k}{k!}\right) - \Delta. \quad (3)$$

Минимизируя абсолютную величину $\varepsilon(\Delta)$ в формуле (3) с необходимой точностью, получим искомую точечную оценку $U(R, \alpha)$ параметра Пуассона Δ . Имея оценку $U(R, \alpha)$, легко получить оценку СНДО $T_5 = n\tau / U(R, \alpha)$. При $\alpha = 0,5$ оценка $U(R; \alpha = 0,5)$ приобретает смысл центрированной оценки [7]!

Вид балансировки и абсолютного суммарного смещения на оценках СНДО для плана испытаний типа NBт. Заметим, что в классе всех возможных оценок параметра эффективной оценки не существует [3]! Поэтому с целью получения эффективной смещенной оценки СНДО сузим поисковый класс оценок до линейного для параметров плана испытаний N и τ (далее – линейные оценки), а именно:

$$(1/t) \cdot \theta(R; m) = \theta(R; m/t),$$

где $m = N\tau$, $t > 0$ – параметр экспоненциального закона распределения наработки до отказа (см. формулу (1)).

Балансировка на линейных оценках для плана NBт имеет вид

$$\begin{aligned} A(\theta(m, R)) &= \int_0^\infty \frac{1}{t} \{E\theta(m, R) - t\} d\Delta = \\ &= \int_0^\infty \{E\theta(m/t, R) - 1\} d\Delta = \int_0^\infty \{E\theta(\Delta, R) - 1\} d\Delta, \end{aligned}$$

где $\Delta = N\tau/t = m/t$ – параметр пуассоновского потока отказов. Нормировка $1/t$ потребовалась с целью ограничить величину интеграла ($t = m / \Delta$), что в конечном итоге упростило выражение для балансировки $A(\theta)$ на линейных оценках до одного суммирования по параметру Δ , то есть суммирования (с усреднением) по объединенному параметру m плана испытаний не потребовалось. Аналогично абсолютное суммарное смещение на линейных оценках представимо в виде

$$W(\theta(m, R)) = \int_0^\infty \frac{1}{t} \theta(m, R) - t / d\Delta = \int_0^\infty E\theta(\Delta, R) - 1 / d\Delta.$$

Построение сбалансированной оценки параметра t для плана испытаний NBт. Найдем сбалансированную оценку параметра t для плана испытаний NBт. Для этого рассмотрим класс линейных оценок, представимых в виде $\theta = (N\tau/(R + 1)) + N\tau f(R)$, тогда балансировка для

плана испытаний $NB\tau$ после подстановки в функционал $A(\theta)$ оценок класса $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$ имеет вид

$$A(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \{E\theta - t\} d\Delta / = \\ = \int_0^{\infty} \left\{ \left[e^{-\Delta} \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!} + f(r) \frac{\Delta^{r+1}}{r!} \right] \right] - 1 \right\} \partial \Delta /.$$

Заметим, что первая часть суммы под интегралом для $A(\theta)$ равна $e^{-\Delta} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!} = e^{-\Delta} (e^{\Delta} - 1) = 1 - e^{-\Delta}$. Рассмотрим различные варианты $f(R)$ и воспользуемся известной формулой $\int_0^{\infty} e^{-n\Delta} \Delta^k \partial \Delta = k! / n^{k+1}$ для расчета величины функционала $A(\theta)$, соответствующего варианту $f(R)$.

Для того, чтобы $A(\theta)$ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{r=0}^{\infty} f(r) \frac{\Delta^{r+1}}{r!} = 1$. Необходимость и достаточность этого условия доказывается непосредственно подстановкой в функционал $A(\theta)$ вместо указанной суммы единицы. Действительно, в этом предположении функционал $A(\theta)$ приобретает величину, равную нулю, а именно:

$$A(\theta) = \int_0^{\infty} \left(e^{-\Delta} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta^{r+1}}{(r+1)!} + e^{-\Delta} \sum_{r=0}^{\infty} f(r) \frac{\Delta^{r+1}}{r!} - 1 \right) \partial \Delta / = \\ = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\Delta} + e^{-\Delta} - 1) \partial \Delta / = 0.$$

Сузим множество решений уравнения $\sum_{r=0}^{\infty} f(r) \frac{\Delta^{r+1}}{r!} = 1$ относительно $f(R)$. Пусть $f(r \geq 2) = 0$, тогда $\sum_{r=0}^{\infty} f(r) \frac{\Delta^{r+1}}{r!} = f(r=0)\Delta + f(r=1)\Delta^2$. С целью упрощения вида полученного выражения переобозначим $f(R=0) = a$, $f(R=1) = b$. Тогда из $A(\theta) = 0$ следует $a + 2b = 1$. Решение этого уравнения относительно переменных a и b содержит различные их варианты $a = 1 - 2b$. Расчеты показывают, что вариант $a = 1,3$, $b = -0,15$, что эквивалентно $f(R=0) = 1,3$, $f(R=1) = -0,15$, $f(R > 1) = 0$, является наиболее эффективным. Тогда искомая оценка T_B класса $\theta = (N\tau/(R+1)) + N\tau f(R)$ имеет вид:

$$T_B = N\tau + 1,3N\tau = 2,3N\tau \text{ при } R = 0;$$

$$T_B = 0,5N\tau - 0,15N\tau = 0,375N\tau \text{ при } R = 1;$$

$$T_B = N\tau/(R+1) \text{ при } R > 1.$$

Функционал $A(T_B)$ имеет вид:

$$A(T_B) = /K_{>0} - K_{<0} / = \int_0^{\infty} e^{-\Delta} (1,3\Delta - 1 - 0,15\Delta^2) \partial \Delta /.$$

Остается выделить положительную и отрицательную части балансировки

$$K_{>0} = \int_{0,853}^{7,813} e^{-\Delta} (-0,15\Delta^2 + 1,3\Delta - 1) \partial \Delta = 0,318,$$

$$K_{<0} = \int_0^{0,853} e^{-\Delta} (0,15\Delta^2 - 1,3\Delta + 1) \partial \Delta +$$

$$+ \int_{7,813}^{\infty} e^{-\Delta} (0,15\Delta^2 - 1,3\Delta + 1) \partial \Delta = 0,318.$$

Следовательно, $A = 0$, то есть оценка T_B является сбалансированной. Поэтому $W = K_{<0} + K_{>0} = 0,318 + 0,318 = 0,636$ и $Q = W = 0,636$.

Заметим, что из абстрактной формулы $W = 2K_{<0} + B = 2K_{<0} - B$ следует, что для сбалансированной оценки $A = 0$ ($B = 0$) для вычисления величины абсолютного суммарного смещения W достаточно вычислить величины $K_{<0}$ или $K_{>0}$.

Полученные результаты эффективности предложенных линейных смещенных оценок согласуются с прямым вычислением их эффективности на ЭВМ.

Получение эффективной смещенной оценки СНДО по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом испытаний типа $NB\tau$, с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок. В соответствии с предыдущим подразделом, балансировка для плана испытаний типа $NB\tau$ на линейных оценках имеет вид $A(\theta(m, R)) = \int_0^{\infty} \{E\theta(\Delta, R) - 1\} d\Delta /$, где $\Delta = m/t$, $m = N\tau$ – параметр пуассоновского потока отказов. Аналогично абсолютное суммарное смещение представимо в виде $W(\theta(m, R)) = \int_0^{\infty} |E\theta(\Delta, R) - 1| d\Delta$.

Эффективная оценка ищется среди предложенных линейных оценок [6, 7] с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок, а именно:

$$Q = (A + 1) \cdot W = (/K_{>0} - K_{<0} / + 1) \cdot (K_{>0} + K_{<0}),$$

$$K_{\{\} > 0} = \int_{\{\} > 0} \{E\theta(\Delta, R) - 1\} d\Delta,$$

Табл. 1. Результаты подстановки откорректированных оценок СНДО в функционалы $A(\theta)$, $W(\theta)$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид функционала	A	W	$Q = (A + 1) \cdot W$
$T_{B2n}(R=0) = 2,7N\tau$, $T_{B2n} = N\tau / (R + 1 + 2,3 - 0,6R)$ при $1 \leq R \leq 5$, $T_{B2n}(R > 5) = N\tau / (R + 1)$	0,0132	0,632	0,641
$T_d(R=0) = 2,4N\tau$, $T_d(R=1) = 0,35N\tau$, $T_d(R=2) = 0,3N\tau$, $T_d(R > 2) = N\tau / (R + 1)$	0	0,624	0,624
$T_B = 2,3N\tau$ при $R = 0$, $T_B = 0,375N\tau$ при $R = 1$ и $T_A = N\tau/(R + 1)$ при $R > 1$	0	0,635	0,635
$T_l(R=0) = 2n\tau$, $T_l(R > 0) = n\tau / (R + 1)$	0	0,736	0,736

$$K_{\{\}}_{>0} = \int_{\{\}} \{E\theta(\Delta, R) - 1\} d\Delta /$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Из табл. 1 следует, что в соответствии с простым критерием эффективности смещенных оценок наиболее эффективной оказалась откорректированная (в сравнении с ранее найденными [6, 7]) в соответствии с принципом сбалансированности смещенная оценка $T_d(R=0) = 2,4N\tau$, $T_d(R=1) = 0,35N\tau$, $T_d(R=2) = 0,3N\tau$, $T_d(R>2) = N\tau / (R+1)$. Остальные сбалансированные оценки приведены для сравнения.

Получение эффективной смещенной оценки вероятности безотказной работы по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом испытаний типа NBт, с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок. Введем обозначения $m = N\tau$, $t = m/\Delta$, $1/t = \Delta/m$, $P = \exp\{-g/t\} = \exp\{-g\Delta/m\}$ – вероятность безотказной работы (ВБР) за временной отрезок g для некоторого параметра t (СНДО). Рассмотрим оценки ВБР вида $\theta(R; m, g) = \exp\{-g/T_i\}$, где T_i – некоторая оценка параметра t (СНДО) из числа предложенных в [6, 7] (см. табл. 1, а также табл. 2). Тогда балансировка и абсолютное суммарное смещение на оценках ВБР за временной отрезок g имеют вид соответственно:

$$A(\theta) = \sum_{m=10^3}^{10^5} \sum_{g=10^3}^{10^5} \int_0^\infty (E\theta - e^{-g\Delta/m}) d\Delta,$$

$$W(\theta) = \sum_{m=10^3}^{10^5} \sum_{g=10^3}^{10^5} \int_0^\infty E\theta - e^{-g\Delta/m} / d\Delta.$$

В основе сравнения эффективности смещенных оценок ВБР лежит минимизация функционала вида $Q(\theta) = (A(\theta)+1) \cdot W(\theta) = (K_{>0} - K_{<0} + 1) \cdot (K_{>0} + K_{<0})$ на предложенных оценках $\theta(R)$, где $\Delta \in \{0; \infty\}$

$$K_{>0}(\theta) = \sum_{m=10^3}^{10^5} \sum_{g=10^3}^{10^5} \int_{\{\}} \{E\theta - e^{-g\Delta/m}\} d\Delta,$$

$$K_{<0}(\theta) = \sum_{m=10^3}^{10^5} \sum_{g=10^3}^{10^5} \int_{\{\}} \{E\theta - e^{-g\Delta/m}\} d\Delta /,$$

где $m = N\tau$, $\Delta = N\tau/t = m/t$, $t = m/\Delta$. Усреднение по сумме с индексом g не производилось с целью получения величины результата вычисления Q близкой к единице. Усреднение по сумме с индексом m производилось в обычном порядке.

Рассмотрим оценки ВБР – за временной отрезок g – вида $\theta(m, g; R) = \exp\{-g/\theta_i\}$, где θ_i – некоторая оценка СНДО, $g = \tau$. Воспользуемся принципом сбалансированности и откорректируем предложенные оценки [6, 7]. Результаты откорректированных оценок ВБР представлены в табл. 2.

Табл. 2. Результаты подстановки откорректированных оценок ВБР в функционалы $A(\theta)$, $W(\theta)$ для плана испытаний типа NBт

Вид оценки ВБР, $g = \tau$	A	W	$Q=(A+1) \cdot W$
$P_9(T_9) = \exp\{-g/T_9\}$, где $T_9(R=0) = 4N\tau/U(R, \alpha=0,99)$, $T_9(R>0) = N\tau/U(R, \alpha=0,5)$	0,095	0,295	0,324
$P_{\text{вн}}(g; T_{\text{вн}}(R)) = \exp\{-g/T_{\text{вн}}\}$, где $T_{\text{вн}}(R=0) = 110 \cdot N\tau$, $T_{\text{вн}}(R>0) = N\tau/(R+0,6)$	0,072	0,284	0,305

Как следует из табл. 2, наиболее эффективной в соответствии с простым критерием эффективности является составная оценка $P_{\text{вн}}(g; T_{\text{вн}}(R)) = \exp\{-g/T_{\text{вн}}\}$, где $T_{\text{вн}}(R=0) = 110 \cdot N\tau$, $T_{\text{вн}}(R>0) = N\tau/(R+0,6)$. При прогнозировании эта же оценка также является эффективной ($\tau < g$).

Полученные новые оценки параметра t (СНДО) экспоненциального закона распределения вероятностей и ВБР по результатам испытаний, проводимых в соответствии с планом испытаний типа NBт, по сути своей – это откорректированные в соответствии с принципом сбалансированности эффективные смещенные оценки, предложенные в [6, 7], то есть наблюдается разумное согласование между эффективными смещенными оценками в рамках различных критериев. Так как наиболее простое и непротиворечивое решение по поиску эффективных смещенных оценок предлагает простой критерий смещенных оценок, то именно его следует использовать в качестве основного при поиске эффективных смещенных оценок параметра t (СНДО) экспоненциального закона распределения вероятностей и ВБР для различных планов испытаний. Как тут не вспомнить известный тезис «критерий истины есть практика».

Биномиальный план испытаний. Вероятность безотказной работы

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний P_Σ монотонно убывает с ростом p [5], а, следовательно, уравнения $P_\Sigma(R=r) = \sum_{k=0}^r P_N(k, p) = \alpha = 0,5 + x$ и $P_\Sigma(R=r) = \sum_{k=0}^r P_N(k, p) = \alpha = 0,5$ имеют единственное решение, где $P_N(k, p) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$. Решения этих уравнений относительно параметра p будем обозначать через буквы $v(R; N, \alpha = 0,5)$ и $w(R; N, \alpha)$. Заметим, что традиционная оценка параметра p биномиального закона распределения $\approx p = R/N$ является несмещенной и эффективной оценкой [2, пример 2.4.20]. Оценка $\approx p$ также является и оценкой максимального правдоподобия [2, пример 2.10.7].

Здесь и далее воспользуемся результатами работ [7]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний

N изделий. Балансировка для биномиального плана имеет вид

$$A(\theta(R; N)) = \sum_{n=1}^N \int_0^1 (E\theta(R; n) - p) dp,$$

где $p \in [0; 1]$ – параметр биномиального плана испытаний – вероятность отказа. Абсолютное суммарное смещение представимо в виде

$$W(\theta(R; N)) = \sum_{n=1}^N \int_0^1 |E\theta(R; n) - p| dp.$$

Эффективная оценка ищется среди предложенных [6, 7] с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок, а именно:

$$Q = (A + 1) \cdot W = (K_{>0} - K_{<0} + 1) \cdot (K_{>0} + K_{<0}),$$

$$K_{>0}(\theta) = \sum_{n=1}^N \int_{\{\theta>0\}} \{E\theta(R; n) - p\} dp,$$

$$K_{<0}(\theta) = \sum_{n=1}^N \int_{\{\theta<0\}} \{E\theta(R; n) - p\} dp, \text{ где } p \in [0; 1].$$

Усреднение в сумме по N не производилось с целью получения величины результата вычисления Q близкой к единице. Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Как следует из табл. 3, наиболее эффективной является оценка $\tilde{p}_{20}(R = 0) = w(\beta = 0,993; N, R)$, $\tilde{p}_{20}(R > 0) = R/N$. Оценка p_7 является байесовской оценкой, полученной для случая полной неопределенности [7, 8] и приведена для сравнения с целью подтверждения их плохих свойств, так как ее характеристика $Q = 0,801285$ является наихудшей. Оценка $\tilde{\theta}_Q(R)$ также является байесовской оценкой, которая обладает еще более худшей эффективностью.

Биномиальный план испытаний. Средняя наработка на отказ. Будем считать, что наработка на отказ изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей с параметром t , где последний совпадает со средней наработкой на отказ (СНДО). Время испытаний каждого из $N = n$ изделий обозначим через τ . Здесь и далее ограничим объем испытаний $0 < n \leq 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат.

Здесь и далее воспользуемся результатами работ [6, 7]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний N изделий. Эффективная оценка ищется среди предложенных [6, 7] с использованием простого критерия эффективности смещенных оценок, а именно:

$$Q = (A + 1) \cdot W = (K_{>0} - K_{<0} + 1) \cdot (K_{>0} + K_{<0}),$$

Табл. 3. Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta)$ и $W(\theta)$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки	A	W	$Q = (A + 1) \cdot W$
$\tilde{w}(R=0) = w(\beta = 0,993; N, R)$, $\tilde{w}(R>0) = w(\beta = 0,75; N, R)$	0,209622	0,210012	0,254035
$\tilde{p}_\tau(g; T_p(R, \tau, N)) = 1 - \exp(-g/T_p)$, где $g = \tau$, $T_p(R = 0) = 110N\tau$, $T_p(R > 0) = (N\tau - R\tau/2)/(R + 0,35)$	0,096340	0,332740	0,364796
$\tilde{p}_{20}(R = 0) = w(\beta = 0,993; N, R)$, $\tilde{p}_{20}(R > 0) = R/N$	0,006370	0,006370	0,006410
$\tilde{p}_{30}(g; T_p(R = 0, \tau, N)) = 1 - \exp(-g/T_p)$, где $g = \tau$, $T_p(R = 0) = 110N\tau$, $\tilde{p}_{30}(R > 0) = R/N$	0,008238	0,008238	0,008305
$p_0 = R/N$ – классическая оценка	0	0	0
Байесовская оценка при $\alpha = 1$, $\beta = 1$ $p_7 = (R + 1)/(N + 2)$ [7, 8]	0,001601	0,800003	0,801285
Байесовская оценка при $\alpha = 2$, $\beta = 94$ $\tilde{\theta}_Q(R) = (R + \alpha)/(N + \alpha + \beta)$ [7, 8]	4,526639	4,530498	25,037302

Табл. 4. Результаты подстановки откорректированных оценок СНДО в функционалы $A(\theta)$ и $W(\theta)$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра СНДО	A	W	$Q = (A + 1) \cdot W$
$T_{\tau}(R = 0) = 400 + 0,01 \cdot \tau -$ $- \tau \cdot 0,75/\ln(1 - ((R = 0) + 0,3)/(n + 0,3)),$ $T_{\tau}(R > 0) = 400 + 0,015 \cdot \tau - \tau \cdot 0,8/\ln(1 -$ $- ((R > 0) + 2)/(n + 2))$	4,102	7,868	40,146
$T_{\tau 2}(R = 0) = 400 + 0,7\tau -$ $- \tau \cdot 0,6/\ln(1 - ((R = 0) + 0,3)/(n + 0,3)),$ $T_{\tau 2}(R > 0) = 400 + 0,01 \cdot \tau - \tau \cdot 0,2/\ln(1 - ((R > 0) + 2)/(n + 2)) -$ $- \tau^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}/\ln(1 - ((R > 0) + 2)/(n + 2))$	3,733	5,630	26,651

$$K_{>0}(\theta) = \frac{1}{x} \sum_{\tau=10^3}^{10^5} \sum_{N=1}^{10} \int_{\{\theta>0\}} \frac{1}{t} \{E\theta - t\} dt,$$

$$K_{<0}(\theta) = \frac{1}{x} \sum_{\tau=10^3}^{10^5} \sum_{N=1}^{10} \int_{\{\theta<0\}} \frac{1}{t} \{E\theta - t\} dt / ,$$

где $t \in \{1; \infty\}$, x – количество слагаемых в суммах.

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра (СНДО) t из $[1; \infty]$. В табл. 4 приведены результаты подстановки предложенных в [6, 7] (и откорректированных в соответствии с принципом сбалансированности) оценок СНДО в функционалы $A(\theta)$ и $W(\theta)$ для биномиального плана испытаний.

Выводы

Получен простой критерий эффективности смещенных оценок, в котором скомпенсировано влияние неравнозначности величин дисперсии и квадрата смещения.

Получены новые эффективные смещенные оценки различных показателей надежности для биномиального плана испытаний и плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий. Полученные оценки показателей надежности имеют направленность практического применения при испытаниях и эксплуатации однородной продукции различного назначения, в процессе которых отказы не возникали.

Полученные новые оценки по сути своей – это откорректированные в соответствии с принципом сбалансированности старые эффективные смещенные оценки.

Библиографический список

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ: Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 584 с.
2. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991. 448 с.
3. Ясногородский Р.М. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. Санкт-Петербург: Научное издание, 2019. 320 с.
4. Шуленин В.П. Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика. Томск: Издательство НТЛ, 2012. 540 с.
5. Михайлов В.С. Критерий эффективности смещенных оценок. Новый взгляд на старые проблемы // Надежность. 2022. № 1. С. 30-37.
6. Михайлов В.С. Улучшение эффективности оценок вероятности безотказной работы различных планов испытаний однородной продукции // Надежность. 2022. № 2. С. 30-37.
7. Михайлов В.С. Смещенные оценки в теории надежности. Киров: МЦИТО, 2022. 184 с.
8. Храмов С.М., Рудковский Д.М., Михайлов В.С. Анализ применимости байесовских оценок при решении практических задач надежности, использующих модели,

предназначенные для групп однородной продукции // Надежность. 2022. № 3. С. 29-34.

References

1. Gnedenko B.V., Beliaev Yu.K., Soloviev A.D. [Mathematical methods in the dependability theory. Primary dependability characteristics and their statistical analysis: Second edition, corrected and extended]. Moscow: Knizhny dom LIBROKOM; 2013. (in Russ.)
2. Lehmann E. Theory of Point Estimation. Moscow: Nauka; 1991.
3. Yasnogorodsky R.M. [Probability theory and mathematical statistics. Textbook]. Saint Petersburg: Naukoymkiye tekhnologii; 2019. (in Russ.)
4. Shulenin V.P. [Mathematical statistics. Part 1. Parametric statistics]. Tomsk: Izdatelstvo NTL; 2012. (in Russ.)
5. Mikhailov V.S. Efficiency criterion of biased estimates. A new take on old problems. *Dependability* 2022;1:30-37.
6. Mikhailov V.S. Improving the efficiency of estimation of the probability of no-failure of various test plans of homogeneous product. *Dependability* 2022;2: 30-37.
7. Mikhailov V.S. [Biased estimates in the dependability theory]. Kirov: MtSITO; 2022. (in Russ.)
8. Khranov S.M., Rudkovsky D.M., Mikhailov V.M. Analysis of the application of Bayesian estimates as part of practical problems in dependability that involve models intended for groups of homogeneous products. *Dependability* 2022;22(3):29-34. (In Russ.) <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-3-29-34>.

Сведения об авторе

Михайлов Виктор Сергеевич – ведущий инженер, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» (ФГУП «ЦНИИХМ»), ул. Нагатинская, д. 16а, Москва, Российская Федерация, 115487, e-mail: Mvs1956@list.ru

About the author

Viktor S. Mikhailov Lead Engineer, Federal State Unitary Enterprise Central Scientific Research Institute of Chemistry and Mechanics (TsNIIKhM). Address: 16a Nagatinskaya St., Moscow, 115487, Russian Federation, e-mail: Mvs1956@list.ru

Вклад автора в статью

Построен простой критерий эффективности смещенных оценок и получены эффективные смещенные оценки показателей надежности для биномиального плана испытаний и плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.