 Оригинальная статья
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-4-15-24

Инверсионный метод оценки меры согласованности мнений экспертов[1]

Inversion method of consistency measure estimation expert opinions

Жигирев Н.Н.[1], Бочков А.В.[2]*, Кузьминова А.В.[3]
Zhigirev N.N.[1], Bochkov A.V.[2]*, Kuzminova A.V.[3]
[1]KALABI IT, Москва, Российская Федерация, [2]«НИИАС», Москва, Российская Федерация, [3]Институт интеллектуальных кибернетических систем НИЯУ МИФИ, Москва, Российская Федерация
[1]KALABI IT, Moscow, Russian Federation, [2] JSC NIIAS, Moscow, Russian Federation, [3]Institute for Intelligent Cybernetic Systems NRNU MEPhI, Moscow, Russian Federation
**a.bochkov@gmail.com*

Жигирев Н.Н.

Бочков А.В.

Кузьминова А.В.

Резюме. Цель. *Проблема коллективного выбора – это проблема сведения нескольких индивидуальных мнений экспертов о порядке предпочтения сравниваемых объектов (альтернатив) в единое «групповое» предпочтение. Сложность коллективного выбора заключается в необходимости обработки рейтингов сравниваемых альтернатив, заданных разными экспертами в частных собственных шкалах. В статье представлен оригинальный авторский алгоритм обработки экспертных предпочтений в задаче коллективного выбора, основанный на понятии суммарной «ошибки» экспертов и измерения их вклада в коллективную меру их согласованности. Изложение материала включает необходимую теоретическую часть, состоящую из базовых определений и правил, постановку задачи и сам метод, основанный на правиле большинства, но в групповом порядке объектов.*

Abstract. Aim. *The problem of collective choice is the problem of combining several individual experts' opinions about the order of preference of objects (alternatives) being compared into a single "group" preference. The complexity of collective choice consists in the requirement of processing the ratings of the compared alternatives set by different experts in their own private scales. The paper presents an original algorithm for processing expert preferences in respect to the problem of collective choice based on the concept of the overall "error" of the experts and measuring their contribution to the collective measure of their consistency. The presented materials include the necessary theoretical part consisting of basic definitions and rules, the definition of the problem and the method itself that is based on the majority rule, but in the group order of objects.*

Ключевые слова: *коллективный выбор, перестановка, группа, несогласованность, инверсия, граф, рейтинг, метод Шульце, метод скейтинга, Парето-оптимальные решения.*
Keywords: *collective choice, permutation, group, inconsistency, inversion, graph, rating, Schulze method, skating method, Pareto-optimal solutions.*

Для цитирования: *Жигирев Н.Н., Бочков А.В., Кузьминова А.В. Инверсионный метод оценки меры согласованности мнений экспертов // Надежность. 2023. №4. С. 15-24. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-4-15-24*
For citation: *Zhigirev N.N., Bochkov A.V., Kuzminova A.V. Inversion method of consistency measure estimation expert opinions. Dependability 2023;4:15-24. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-4-15-24*

Поступила: *29.03.2023* / **После доработки:** *02.10.2023* / **К печати:** *20.11.2023*
Received on: *29.03.2023*/ **Upon revision:** *02.10.2023* / **For printing:** *20.11.2023*

[1] Оригинальная статья опубликована: A. Bochkov, N. Zhigirev, A. Kuzminova Inversion Method of Consistency Measure Estimation Expert Opinions // RT&A. 2022. №3 (69). doi:10.24412/1932-2321-2022-369-242-252. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/inversion-method-of-consistency-measure-estimation-expert-opinions (дата обращения: 29.03.2023).

1. Введение

В практической деятельности эффективность принятия решений требует разработки и применения специализированного алгоритмического и методологического обеспечения. В случае участия в процессе поддержки принятия решений группы экспертов, возникает так называемая задача коллективного (группового) выбора. Существующие алгоритмы решения задач коллективного выбора [1-3] можно условно разделить на три класса.

Представителем первого класса является метод Шульце [4] (на основе доказательства теоремы Эрроу) с выбором Парето-оптимальных решений (исключением по Шварцу) от первого рейтинга к последнему, причем при отборе пересчитываются вновь критерии для следующего шага. Недостатком метода является довольно сложный алгоритм постоянного пересчета, существенно затрудняющий практическое использование метода.

К типичным представителям второго класса можно отнести хорошо зарекомендовавшую себя при проведении соревнований по спортивным бальным танцам скейтинг-систему [5]. Она проста в вычислительных расчетах и опирается на всем понятный так называемый мажоритарный принцип, принцип большинства. К сожалению, во многом именно эта простота может приводить к неустойчивым решениям, и, как следствие, невозможности распределить окончательные места среди участников соревнования в один тур, или признание ничьи между соперниками [6, 7].

Третий класс состоит из регрессионных моделей, типа нелинейного факторного анализа и других способах сжатия информации [8, 9], в которых искомое решение строится в виде задачи минимизации накопленных ошибок. Отличие методов третьего класса заключается в том, что они не ориентированы на выбор лидера в рейтингах, а определяются оптимумом, на который влияет весь объем данных.

Упомянутым методам решения задач коллективного выбора в целом присуща проблема согласования оценок экспертов при сравнении оцениваемых объектов.

В 1951 г. К. Эрроу сформулировал [10] теорему «О невозможности коллективного выбора в рамках ординалистского метода», математически обобщив парадокс Кондорсе [11]. Теорема утверждает, что в рамках этого подхода не существует метода объединения индивидуальных предпочтений для трех и более альтернатив, который удовлетворял бы некоторым вполне справедливым условиям (аксиомам выбора) и всегда давал бы логически непротиворечивый результат.

Когда на неопределенность самих объектов накладываются неоднозначные мнения экспертов, то предполагается некоторая иерархия в решении задачи выбора. Так, например, происходит в методе анализа иерархий [12], когда каждый из M экспертов имеет свое, отличное от других, мнение относительно весов рассматриваемых N объектов через коэффициенты матрицы предпочтений ($S_{ij}^m = \dfrac{W_j^m}{W_i^m}$ (i=1, …, N; j=1, …, N; $i \neq j$; m=1, …, M)).

Обычно веса усредняют и работают с обобщенной матрицей S_{ij}, что приводит, как правило, к нарушению основных аксиом «правильного» выбора (универсальность, полнота, монотонность, отсутствие диктатора, независимость), предложенных В. Парето [13, 14], Р. Кохом [15], Ч. Плоттом [16] и другими. Отказ от той или иной процедуры усреднения затрудняет задачу выбора и приводит, например, к необходимости решать проблему «слияния многомерных шкал» [17].

Ранее [18] авторами высказано утверждение, что экспертам для получения согласованных решений необходимо достичь консенсуса, по крайней мере с точностью до определения частных рейтингов в полном порядке следования объектов, и затем искать согласие в весовых коэффициентах между оказавшимися соседними ближайшими объектами, задающими, собственно, единую шкалу. В настоящей статье рассматривается метод, относящийся к третьему классу алгоритмов в теории принятия решений, направленный на поиск оптимума меры согласованности, восстановление полного коллективного порядка в предпочтениях на базе частных рейтингов экспертов.

2. Базовые определения и правила

Введем ряд базовых определений.

Определение 1. Произвольное взаимно однозначное отображение g:$X \leftrightarrow g(X)$ множества первых N натуральных чисел X=1, 2, 3, …, N называется перестановкой -го порядка (перестановкой):

$$\begin{array}{llllll} & \text{X}= \{ & X_1=1 & X_2=2 & \dots & x_N=N \ \} \\ \text{g:} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & \text{g(X)}= \{ & g_1=g(x_1) & g_2=g(x_2) & \dots & g_N=g(x_N) \ \} \end{array}$$

Множество G={g} образует группу размерности N!.

Определение 2. Обратная перестановка к g определяется как $\left(g^{-1}(j)=k\right) \Leftrightarrow \left(g(k)=j\right) \quad \forall j,k.$

Пример всех перестановок для N=4 приведен в табл. 1.

В принципе для любого N может быть каждой перестановке приписан индекс в лексикографическом порядке (ЛГ-порядке) значений $g(X)$ (столбцы 1, 2 в табл. 1).

Определение 3. Первую по индексу перестановку, которая равна единичной перестановке в группе ^1g=1234=E, будем называть «истиной» или естественным порядком. Последнюю перестановку с ординатами в обратном порядке: $^{24}g = 4321 = \overline{E}$ – полной инверсией, которая находится на последнем определяемом уровне $N(N–1)/2$.

Определение 4. Для перестановки $g=g_1\, g_2\, g_3 \dots g_N$ пара индексов (g_i, g_j) называется инверсией [19], если ($i<j$)&($g_j>g_i$).

Определение 5. Таблицей инверсий перестановки g называется последовательность чисел $\{b_1\ b_2\ \dots b_N\}$, где b_j – количество элементов больших j и расположенных левее j. Другими словами, b_j – число инверсий, у

Табл. 1. Полная таблица перестановок для N=4

Индекс g	**Цифровой код g в ЛГ-порядке**	**Корневой синоним g**	**Синоним g, исходя из инверсий, [другие синонимы минимальной длины слова]**	**Уровень ошибки, длина слова**	**Обратная перестановка**	**Таблицы инверсий, их сумма, Σ**				
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
1	<1234>	E	E, [-]	**0**	<1234>	0	0	0	0	**0**
2	<1243>	c	c, [-]	**1**	<1243>	0	0	1	0	**1**
3	<1324>	b	b, [-]	**1**	<1324>	0	1	0	0	**1**
4	<1342>	cb	cb, [-]	**2**	<1423>	0	2	0	0	**2**
5	<1423>	bc	bc, [-]	**2**	<1342>	0	1	1	0	**2**
6	<1432>	bcb	cbc, [-]	**3**	<1432>	0	2	1	0	**3**
7	<2134>	a	a, [-]	**1**	<2134>	1	0	0	0	**1**
8	<2143>	ac	ac, [ca]	**2**	<2143>	1	0	1	0	**2**
9	<2314>	ba	ba, [-]	**2**	<3124>	2	0	0	0	**2**
10	<2341>	cba	cba, [-]	**3**	<4123>	3	0	0	0	**3**
11	<2413>	bac	bac, [bca]	**3**	<3142>	2	0	1	0	**3**
12	<2431>	bcba	cbac, [cbca]	**4**	<4132>	3	0	1	0	**4**
13	<3124>	ab	ab, [-]	**2**	<2314>	1	1	0	0	**2**
14	<3142>	acb	acb, [cab]	**3**	<2413>	1	2	0	0	**3**
15	<3214>	aba	bab, [-]	**3**	<3214>	2	1	0	0	**3**
16	<3241>	acba	cbab, [caba]	**4**	<2413>	3	1	0	0	**4**
17	<3412>	bacb	bacb, [bcab]	**4**	<3412>	2	2	0	0	**4**
18	<3421>	bacba	cbacb, [cbcab, bcbab, bcaba]	**5**	<4312>	3	2	0	0	**5**
19	<4123>	abc	abc, [-]	**3**	<2341>	1	1	1	0	**3**
20	<4132>	abcb	acbc, [cabc]	**4**	<2431>	1	2	1	0	**4**
21	<4213>	abac	babc, [abca]	**4**	<3241>	2	1	1	0	**4**
22	<4231>	abcba	cbabc, [acbca, cabca, cabac]	**5**	<4231>	3	1	1	0	**5**
23	<4312>	abacb	bacbc, [babcb, bcabc, abcab]	**5**	<3421>	2	2	1	0	**5**
24	<4321>	abacba	cbacbc, [cbcabc, bcbabc, bcabac, bcabca, bacbac, bacbca, babcba, abcaba, abcbab, acbcab, acbacb, cabcab, cabacb]	**6**	<4321>	3	2	1	0	**6**

Табл. 2. Вершины 1-го уровня ошибок состоят из одного символа алфавита A

По порядку соседние от «истины» E	**Уровень ошибки**	**Алфавит A**	**Вершина 1-го уровня ошибки – слово из одного символа A**
	0		**$E=E\times E$**
1	1	a	$a=E\times a=2, 1, 3, 4, \ldots, N-1, N$
2	1	b	$b=E\times b=1, 3, 2, 4, \ldots, N-1, N$
3	1	C	$c=E\times c=1, 2, 4, 3, \ldots, N-1, N$
…	1	…	…
N–1	1	z	$z=E\times z=1, 2, 4, 3, \ldots, N, N-1$

z – условный символ (N–1) образующей. Для N=4, $E\times AT(E)=\{a, b, c\}$, следовательно: $z=c$.

которых второй член равен j.

Определение 6. Для любой g имеется множество $AT(g)$ (англ., Adjacent Transposition) – «смежных, соседних» перестановок, количество которых ровно (N–1).

Все ребра $E\times AT(E)$ состоят из образующих элементов группы G. Элементы множества образующих $E\times AT(E)$ могут рассматриваться, как символы s некоторого алфавита A (табл. 2).

Определение 7. Взвешенный граф группы $V(G, G\times G)$ состоит из вершин G, а вес ребра $(g_1\times g_2)$ равен s, когда $(g_2\in AT(g_1))\&(g_2=g_1 s)$.

Структура графа $V(G, G□G)$ определяется динамически, по уровням ошибок. На верхнем (нулевом) уровне находится только единичная перестановка E. На втором и последующих уровнях – только вершины, образованные присоединением только одного символа алфавита A.

Примечательно свойство четности перестановок: $aa=bb=cc=\ldots=zz=E$, из-за которого граф группы может быть рассмотрен как неориентированный граф.

Определение 8. Каждый g можно интерпретировать как путь, или некоторую последовательность направленных отрезков графа V, и наоборот.

Путь из $v \in G$ в $v' \in G$ проходит через ребра, соединяющие соседние перестановки, и равен $v' = vs_1 \cdot \ldots \cdot s_T$, где $s_1 \ldots s_T$ – символы алфавита A, T – длина слова.

Определение 9. Множество всех конечных слов S над конечным алфавитом A счетно. Следовательно, каждому ненулевому слову может быть приписан индекс q.

$$S = \bigcup_{q=1}^{\infty} S^q, \; S^q = \prod_{t=1}^{T^q} s_t^q,$$

где T^q – количество символов в слове S^q.

Для каждого слова $S^q = \left\{ S_1^q \cdot \ldots \cdot S_{T^q}^q \right\}$ имеется одно обратное слово S^{q^*}: $S^{q^*} = \left\{ s_1^{q^*} = s_{T^q}^{q^*}; \ldots; s_{T^q}^{q^*} = s_1^q \right\}$.

Определение 10. Слова S^q и S^k – являются синонимами, если $s_1^q \cdot \ldots \cdot s_{T^q}^q \cdot s_1^{k^*} \cdot \ldots \cdot s_{T^{k^*}}^{k^*} = E$.

Определение 11. Среди одинаковых синонимов можно выделить конечное множество минимальных по длине слов T_{min} из вершины $g=v'$ в «истину» $E(v^{-1}=E)$: $g = v^{-1}v' = s_1 \ldots s_T$ – (**synonym**(g)).

Определение 12. Среди слов из (**synonym**(g)) существует «корневой синоним» с минимальной формой ЛГ-порядка на основе порядка элементов в A.

Корневой синоним – это слово, полученное из цифрового кода методом сортировки «всплывающего пузырька» [20] при движениях в сторону «истины» E. Иной способ получения корневых синонимов, представлен в табл. 3. Он исходит из метода последовательного уничтожения инверсий с последующим преобразованием череды синонимов от текущего синонима до корневого синонима с помощью образующих группу уравнений (см. определение 13). У каждой перестановки g имеется ровно один корневой синоним длиной $T(g)$, совпадающей с динамически определяемым уровнем ошибок и суммарным количеством инверсий в таблице инверсий – Σ (табл. 3). В нашем случае для <4321> он равен слову из 6 символов «**abacba**».

При совпадении цифрового кода образуется сетевая структура графа V, когда соседние вершины оказываются на расстоянии единицы по уровню инверсии.

На рис. 1 изображена структура подобного графа V для N=4. Толстыми и тонкими ребрами изображены символы s, послойно участвующие в порождении новых соседних вершин. Содержание наполнения вершин – это изображение индекса перестановки g (столбец 1 в табл. 1), его цифровой код (столбец 2) и содержание корневого символа слова для перестановки g (столбец 3). Толстые линии графа V на рис. 1 соответствуют представлению его в качестве словаря корневых синонимов перестановки в виде остовного дерева графа V. Их направление совпадает с тем, есть ли на указанном месте инверсия (вверх) или нет (вниз). Шесть концевых вершин дерева изображены элементами с желтой заливкой, как, например, {<19>; <4123>; abc}. Подчеркнутая инверсия, для <19> только (a) приближает следующую вершину к «истине» E, снижая количество ошибок ровно на единицу.

Словарь корневых синонимов строится по следующему принципу: в циклах остаются только те связи между перестановками, которые старше по

Табл. 3. Алгоритмы построения синонимов различными методами

Метод последовательного снижения инверсий («первый» оптимальный по длине слова синоним)									Метод всплывающего пузырька (оптимальный по длине слова «корневой» синоним)								
Ошибка, уровень	Код	1	2	3	4		Σ		Ошибка, уровень	Код	1	2	3	4		Σ	
6	4321	**3**	2	1	0	**c**	***6***		6	4321	3	2	**1**	0	**a**	***6***	
5	4312	**2**	2	1	0	**b**	***5***		5	3421	3	**2**	0	0	**b**	***5***	
4	4132	**1**	2	1	0	**a**	***4***		4	3241	**3**	1	0	0	**a**	***4***	
3	1432	0	**2**	1	0	**c**	***3***		3	2341	**3**	0	0	0	**c**	***3***	
2	1423	0	**1**	1	0	**b**	***2***		2	2314	**2**	0	0	0	**b**	***2***	
1	1243	0	0	**1**	0	**c**	***1***		1	2134	**1**	0	0	0	**a**	***1***	
0	1234	0	0	0	0		***0***	**cbacbc**	0	1234	0	0	0	0		***0***	**abacba**

Табл. 4. Автоматическое построение КОУ на 1-2 уровне ошибок

		Второй аргумент								
		a	**b**	**c**	**d**	**e**	**…**	**x**	**y**	**z**
Первый аргумент	**a**	*E*		**ac***	ad*	ae*	…	ax*	ay*	az*
	b		E		bd*	be*	…	bx*	by*	bz*
	c	**ca**		E		ce*	…	cx*	cy*	cz*
	d	da	db		E		…	dx*	dy*	dz*
	e	ea	eb	ec		E	…	ex*	ey*	ez*
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	x	xa	xb	xc	xd	xe	…	E		xz*
	y	ya	yb	yc	yd	ye	…		E	
	z	za	zb	zc	zd	ze	…	zx		E

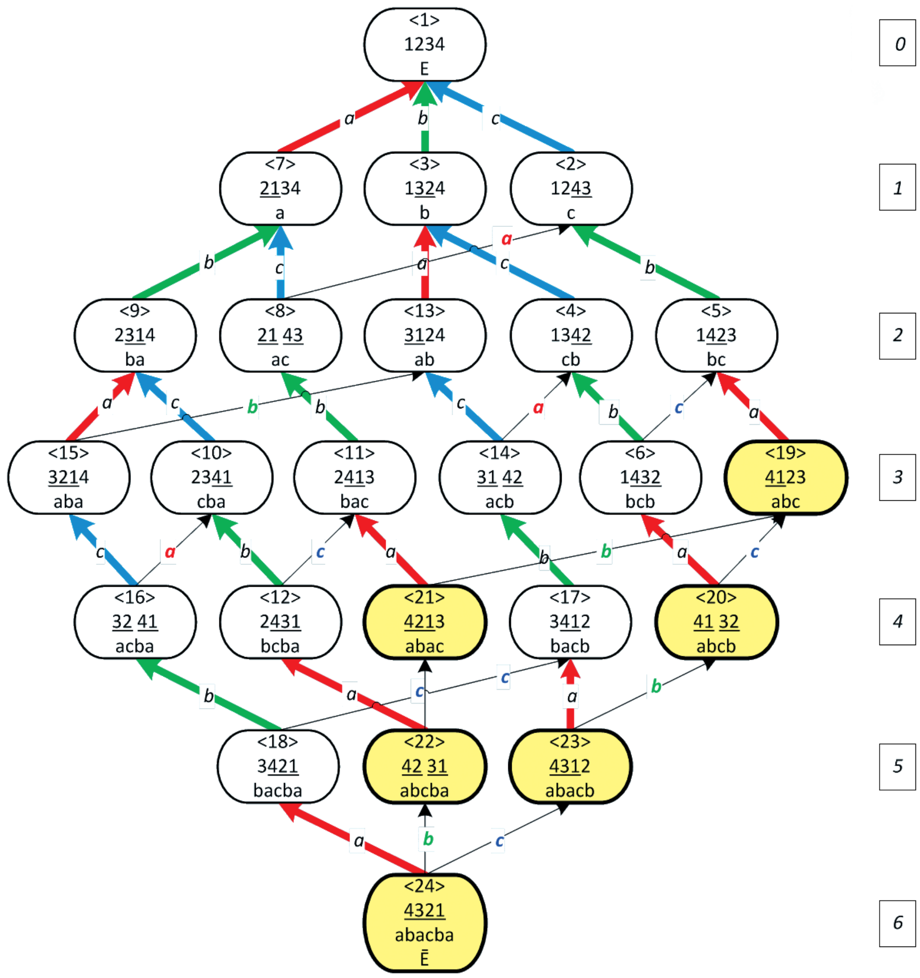

Рис. 1. Структура графа для *N*=4

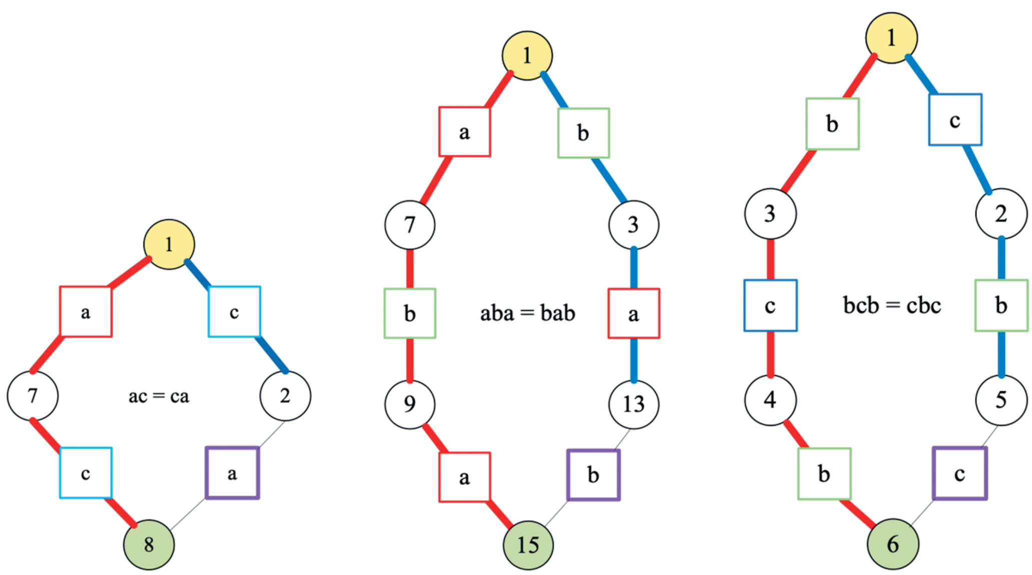

Рис. 2. Иллюстрация разрыва циклов сети

ЛГ-порядку. Например, цикл <1><7><8><2><1> (а) разрываем по связи <2><8>, поскольку связь <1><7> (рис. 2,а) по ЛГ-порядку меньше связи <1><2>(с).

Подобную операцию необходимо повторить для нижних участков циклов <6>, <14>, <15>, <12>, <16>, <20>, <21>, <18>, <22>, <23> и дважды по <24>, чтобы разрушить еще 12 циклов и сформировать дерево. Для

Табл. 5. Таблица поиска решений $P(g)$ с таблицей инверсий $B(g, P)$

ПРО	Arg E	1	…	n	…	N	ПИО	Arg E	1	…	k	…	N	Критерий несогласованности
ПРО	Func g	g_1	…	g_n	…	g_N	ПИО	Func p	g_1^{-1}	…	g_k^{-1}	…	g_N^{-1}	
ПИО	Arg E	1	…	k	…	N	ПИО	Arg E	1	…	k	…	N	
1	$p_1(g)$	p_{1,g_1}	…	p_{1,g_k}	…	p_{1,g_N}		$B_1(p_1(g))$	$B_{1,1}$	…	$B_{1,k}$	…	$B_{1,N}$	$K_1(g)=\sum_{k=1}^{N} B_{1,k}$
…	…	…	…	…	…	…			…	…	…	…	…	…
m	$p_m(g)$	p_{m,g_1}	…	p_{m,g_k}	…	p_{m,g_N}		$B_m(p_m(g))$	$B_{m,1}$	…	$B_{m,k}$	…	$B_{m,k}$	$K_m(g)=\sum_{k=1}^{N} B_{m,k}$
…	…	…	…	…	…	…			…	…	…	…	…	…
M	$p_M(g)$	p_{m,g_1}	…	p_{M,g_k}	…	p_{M,g_N}		$B_M(p_M(g))$	$B_{M,1}$	…	$B_{M,k}$	…	$B_{M,N}$	$K_M(g)=\sum_{k=1}^{N} B_{M,k}$
														$K(g)=\sum_{m=1}^{M} K_m(g)$

N=4 анализируя равенства, описывающие правую и левую ветви циклов, приходим к необходимости и достаточности шести равенств: *aa*=*E*, *bb*=*E*, *cc*=*E*, *ac*=*ca* (рис. 2 а), *aba*=*bab*, *bcb*=*cbc*, (рис 2,б), которые нужны для построения синонимов слов в перестановках (табл. 1, столбцы 3, 4).

Для $N \geq 5$ подобный перебор связей затруднителен, поэтому разумно ввести понятие канонических образующих уравнений (КОУ).

Определение 13. Канонические образующие уравнения – необходимый и достаточный перечень уравнений, полностью задающий правила построения корневых и прочих синонимов через алфавит A.

Так, в табл. 3 возможно осуществить преобразования с помощью КОУ: «cbacbc» = «cbabcb» = «cabacb» = «acbcab» = «abcbab» = «abcaba» = «abacba».

В табл. 4 приведены закономерности, учитывающие законы четности перестановок и ромбовидные замыкания на 2 уровне ошибок.

Знаком «*» в табл. 4 помечены необходимые обратные перестановки 2-го уровня инверсий. Например, если левая часть уравнений «ас» задает эквивалентную ей правую часть «са» то надо заменить «са» на «ас» и т.д. Добавляя соотношения третьего уровня инверсий: *aba*=*bab*; *bcb*=*cbc*; *cdc*=*dcd*; *ded*=*ede*; …, *xyx*=*yxy*; *yzy*=*zyz*, определяем полный набор КОУ.

3. Постановка задачи

Рассмотрим N объектов сравнения $O_1, \dots, O_k, \dots, O_N$, индексы которых – первые N членов натурального ряда $E_{ПИО}=1, \dots, k, \dots, N$ – соответствуют порядку представления объектов на экспертизу. В экспертизе объектов участвуют M экспертов $Э_1, \dots, Э_m, \dots, Э_M$. Каждый из экспертов $Э_m$ имеет собственное представление о порядке размещения объектов $g_m=g_{m,1}, \dots, g_{m,n}, \dots, g_{m,N}$, индексы которых возрастают по мере убывания некоторого качества объектов с точки зрения эксперта. Значению $g_{m,1}$ соответствует индекс объекта O_{k_1}, участвующего в экспертизе с максимальным качеством по мнению эксперта $Э_m$, а $g_{m,N}$ – наихудший по качеству объект с индексом O_{k_N}:

$$G=\left(g_{m,n}\right)_{\substack{m=\overline{1,M}\\ n=\overline{1,N}}}=\begin{pmatrix} g_{1,1} & \dots & g_{1,N} \\ \dots & \ddots & \dots \\ g_{M,1} & \dots & g_{M,N} \end{pmatrix}.$$

Тем самым g_m – это перестановка рейтингов объектов (ПРО), аргументом которой является порядок $E_{ПРО}=1,\dots,n,\dots,N$.

Места $p_m=p_{m,1},\dots,p_{m,k},\dots,p_{m,N}$ по значениям обратные к ПРО g_m ($p_m=g_m^{-1}$) являются перестановками индексов объектов (ПИО) с аргументом $E_{ПИО}$:

$$P=\left(p_{m,n}\right)_{\substack{m=\overline{1,M}\\ n=\overline{1,N}}}=\begin{pmatrix} p_{1,1}=g_{1,1}^{-1} & \dots & p_{1,N}=g_{1,N}^{-1} \\ \dots & \ddots & \dots \\ p_{M,1}=g_{M,N}^{-1} & \dots & p_{M,N}=g_{M,N}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Необходимо найти сжатие всех частных рейтинговых оценок ПРО $g_m(m=1, \dots, M)$ в виде ПРО $g_m^*=g_1^*,\dots,g_N^*$, которое бы уменьшило суммарную несогласованность экспертных оценок $g_{m,n} \to g_m^*$ (исходя из равноправия всех участников экспертизы), измеренную в инверсиях переходов от $g_{m,n}$ к g_m^*, то есть

$$K^*=\min K(g)=\min_{g_m}\left(\sum_{m=1}^{M} K_m\left(g_1,\dots,g_N\right)\right),$$

где $K_m\left(g_1,\dots,g_N\right)$ – сумма инверсий в оценках -го эксперта, K^* – предельная мера несогласованности мнений экспертов.

Поиск оптимума в перестановках рейтингов объектов эквивалентен поиску перестановки индекса объектов p^*: $p^*=p_1^*,\dots,p_N^*$, поскольку $K\left(g_m^*\right)=K\left(p_m^*\right)$, где $p^*=(g^*)^{-1}$ (длины обратных путей ($E \to g$) совпадают с прямыми путями ($p=g^{-1} \to E$) при любом g) (табл. 5).

4. Описание метода

Эта задача относится к классу задач целочисленного программирования (на структуре в виде графа $V(G, G{\times}G)$ ПРО, расположенного по уровням ошибок).

Методы решения таких задач достаточно проработаны [21, 22], но ни один из них не гарантирует, что, начиная с какой-то перестановки, мы непременно попадем в глобальный минимум, который может оказаться не единственным. По крайней мере, что может дать гарантию – полный перебор всех ПРО. Такой вариант возможен для $N{\le}10$. Для каждого g считается $K(P_m,g)$ и сумма $K(g)$, а также производится «запоминание» текущего состояния множества глобальных минимумов.

Подмножество $g{\in}G$, для которых $K(g){=}K^*$, назовем множеством глобальных минимумов – G^k. Поскольку M нечетное, то оно, как и множество локальных минимумов, состоит из изолированных решений (перестановок).

Рассмотрим пару $(l, l{+}1)$ столбцов в $P(g)$. $l{=}1, \ldots, N{-}1$ соответствует символу s_l алфавита A (табл. 6).

Табл. 6. Таблица соседней пары $P(g)$

Эксперт	ПРО g	g_l	g_{l+1}
		l	$l{+}1$
1	$P_1(g)$	$P_{1,g_l}(E)$	$P_{1,g_{l+1}}(E)$
…		…	…
m	$P_m(g)$	$P_{m,g_l}(E)$	$P_{m,g_{l+1}}(E)$
…		…	…
M	$P_M(g)$	$P_{M,g_l}(E)$	$P_{M,g_{l+1}}(E)$

<u>Правило 1.</u> Если $P_m\,g_l(E) < P_m\,g_{l+1}(E)$, то сумма инверсий $K(g_m)$ увеличивается на 1, и если $P_m\,g_l(E) > P_m\,g_{l+1}(E)$, соответственно, уменьшается на 1.

<u>Правило 2</u>. Уменьшение и увеличение суммы зависит от количества строк, в которых второе условие M^2 (Правило1) доминирует над первым условием M^1. Соотношение $M^1{+}M^2{=}M$. Тогда сумма $K(g)$ от воздействия s_l уменьшится ровно на $M^2{-}M^1$ единиц (при $M^2{>}M/2$) или увеличится на $M^1{-}M^2$ единиц (при $M^2{<}M/2$).

<u>Правило 3</u>. «Условие отсечения». ПРО g принадлежит множеству локальных минимумов G^p, если для всех $j{=}1, \ldots, N{-}1$ сумма ошибок только увеличивается при вращении соседних столбцов по символу s_j. То есть $g{\in}G^P$ имеет соседние вершины графа V, превосходящие по сумме найденный локальный оптимум g не менее, чем на единицу.

Поиск G^p имеет смысл при больших N, но при малых N он тоже эффективен, поскольку уменьшение (увеличение) какой-то выделенной пары не зависит от места, на котором стоит пара, а только от содержимого полученных инверсий.

В зависимости от количества сравниваемых объектов (N) возможны 2 варианта дальнейших действий.

<u>Вариант 1</u>. «Прямой расчет». При малых N ($N{\le}6$) возможно создать «справочник» в ЛГ-порядке. Тогда для построения G^P и G^K следует из него исключить ПРО, в которых не выполняется «условие отсечения». Рассчитать для всех $g{\in}G^P$ значение $K(g)$ и выбрать оптимальное.

Поясним сказанное на примере для $N{=}4$ (табл. 7).

Создадим матрицу полных попарных сравнений столбцов для ПИО $P(E)$ для ($i{=}1, N$; $j{=}1, N$; $i{\ne}j$) (табл. 8).

Табл. 8. Результаты подсчета инверсий по паре столбцов

i \ j	1	2	3	4
1	x	3	**4**	1
2	**4**	x	**5**	**4**
3	3	2	x	3
4	**6**	3	**4**	x

Фрагмент расчета для ($i{=}1$; $j{=}2, 3, 4$) приведен в табл. 9.

Из табл. 8 видно, что «условию отсечения» не удовлетворяют 6 пар столбцов: 1→3, 2→1, 2→3, 2→4, 4→1, 4→3.

Как видно, для $N{=}4$ справочник g (табл. 1) будет содержать 24 ПИО. На уровне инверсий (а) из 24 значений индексов будут отброшены (за счет «неправильных пар») 12 элементов с индексами (3-4, 7-12, 19-20, 23-24), на уровне (b) – 7 ПИО с индексами (1, 6, 15-17, 21-22), на уровне (c) – 4 ПИО с индексами (2, 5, 13, 18). В итоге G^P и G^K состоят из одной ПИО с индексом ${}^{14}g = g^* = 3142$, для которой мы далее произведем расчет значения оптимального критерия (табл. 10).

Табл. 7. Исходные данные $P(E)$ и расчет критерия оптимальности $K(E)$

	ПИО E	1	2	3	4	Таблицы инверсии				$K_m(E)$
		O_1	O_2	O_3	O_4	1→1	2→2	3→3	4→4	
$Э_1$	P_1	1	4	2	3	0	1	1	0	2
$Э_2$	P_2	2	3	1	4	2	0	0	0	2
$Э_3$	P_3	3	2	1	4	2	1	0	0	3
$Э_4$	P_4	4	2	3	1	3	1	1	0	4
$Э_5$	P_5	1	4	3	2	0	2	1	0	3
$Э_6$	P_6	2	4	1	3	2	0	1	0	3
$Э_7$	P_7	2	1	4	3	1	0	1	0	2

Критерий оптимальности $K(E)$: 20

Табл. 9. Проверка «условия отсечения» (суммы инверсий по столбцам (*i*=1)

1	**→**	**2**		**1**	**→**	**3**		**1**	**→**	**4**
1		4		1		2		1		3
2		3		2	1	1		2		4
3	1	2		3	1	1		3		4
4	1	2		4	1	3		4	1	1
1		4		1		3		1		2
2		4		2	1	1		2		3
2	1	1		2		4		2		3
	3				4				1	

Табл. 10. Оптимум ПРМ g* и рассчет критерия оптимальности $K(g^*)$

	ПРО g^*	**3**	**1**	**4**	**2**	Таблицы инверсии				$K_m(g^*)$
		O_3	O_1	O_4	O_2	1→**1**	2→**2**	3→**3**	4→**4**	
$Э_1$	P_1	2	1	3	4	1	0	0	0	1
$Э_2$	P_2	1	2	4	3	0	0	1	0	1
$Э_3$	P_3	1	3	4	2	0	2	0	0	2
$Э_4$	P_4	3	4	1	2	2	2	0	0	4
$Э_5$	P_5	3	1	2	4	1	1	0	0	2
$Э_6$	P_6	1	2	3	4	0	0	0	0	**0**
$Э_7$	P_7	4	2	3	1	3	1	1	0	5
				Критерий оптимальности $K(g^*)$:						15

Табл. 11.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	g	${}^0g$=**E**	$K_m({}^0g)$	${}^1g=b$	$K_m({}^1g)$	${}^2g=ba$	$K_m({}^2g)$	${}^3g=bac$	$K_m({}^3g)$
		1234		1324		3124		3142	
$Э_1$	P_1	1423	2	1243	1	2143	2	2134	1
$Э_2$	P_2	2314	2	2134	1	1234	0	1243	1
$Э_3$	P_3	3214	3	3124	2	1324	1	1342	2
$Э_4$	P_4	4231	5	4321	6	3421	5	3412	4
$Э_5$	P_5	1432	3	1342	2	3142	3	3124	2
$Э_6$	P_6	2413	3	2143	2	1243	1	1234	0
$Э_7$	P_7	2143	2	2413	3	4213	4	4231	5
		a=3; **b=5**; c=3	20	**a=4**; b=2; **c=4**	17	a=3; b=3; **c=4**	16	a=3; b=1; c=3	15

Как видно из табл. 10, эксперт Э6 «угадал» оптимальное решение $K_6(g^*)=0$. Эксперты Э1 и Э2 совершили только по 1 ошибке, Э3 и Э5 – по две ошибки, а Э4 и Э7 – слишком много ошибок.

Далее необходимо по ПРО g* восстановить оптимальную ПИО $p^*=(g^*)^{-1}$. Следовательно, искомые места $p^*(E)$=2, 4, 1, 3.

<u>Вариант 2</u>. «Итерации». В общем случае можно использовать правило отсечения непосредственно, начиная с какой-то стартовой ПИО, например с ${}^0g=E_{ПИО}$. Полное отсутствие отсечения гарантирует, что локальный минимум найден в ${}^3g=bac$ (табл. 11).

Наличие в конце итерации (a=4; b=2; c=4) неоднозначности выбора заставляет вернуться к началу этого этапа и рассмотреть другую альтернативу ${}^{2+}$g=bc с K(${}^{2+}$g)=16 и сделать вывод о прекращении поиска, поскольку ${}^{3+}g=bca$ с K(${}^{3+}$g)=15 является копией 3142 по КОУ.

5. Заключительные замечания

За пределами настоящей статьи оставлены вопросы, касающиеся сравнения предлагаемого метода с другими методами сжатия информации (например, с факторным анализом, с методом усреднения или с методом Шульце), которые будут обсуждены позже.

Дальнейшее развитие этого метода предполагает применение его в ранговых определениях, допускающих равенства оценок сравниваемых объектов при определении весовых коэффициентов сравниваемых объектов (аналогично попарным сравнениям в методе анализа иерархий [12] и решении задач слияния разнородных шкал [17, 18]).

Библиографический список

1. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. М.: Советское радио, 1972. 192 с.

2. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: 2-е издание, переработанное и дополненное. М.: Логос, 2002. 382 с.

3. Каплинский А.И., Руссман И.Б., Умывакин В.М. Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. 168 с.

4. Schulze M. The Schulze Method of Voting. Computer Science and Game Theory. Cornell University, 2018. URL: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1804/1804.02973.pdf (дата обращения 29.09.2023).

5. Williams M. «The Skating System Study Guide». 2018. URL: https://dancesport.org.au/scrutineering-tutorial-book-draft-12.3.pdf (дата обращения: 02.10.2023).

6. Кондратенков В. Парадоксы, мифы и ошибки системы Скейтинг. Официальный сайт Московской Федерации Спортивного Танца. URL: http://old.russianmaster.ru/html/skating/skatingparadox.html (дата обращения: 02.10.2023).

7. Xavier Mora, The Skating System. 2nd edition. July 2001. URL: https://mat.uab.cat/~xmora /escrutini/skating2en.pdf (дата обращения 29.09.2023).

8. Лисицин Д.В. Методы построения регрессионных моделей. Новосибирск: НГТУ, 2011. 77 с.

9. Ким О. Дж., Мьюллер Ч.У., Клекка У.Р., и др. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / Под ред. И. С. Енюкова. М.: Финансы и статистика, 1989. 215 с.

10. Arrow K.J. Social Choice and Individual Values: 2nd ed. New York: Wiley, 1963.

11. Кондорсе Ж. Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума. М.: Либроком, 2011. 280 с.

12. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М. Радио и связь. 1993. 278 с.

13. Ногин В.Д. Множество и принцип Парето: 2-е изд., исправл. и доп. СПб: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2022. 111 с.

14. Парето В. Учебник политической экономии. РИОР, 2018. 592 с.

15. Кох Р. Принцип 80/20. Эксмо, 2012. 443 с.

16. Miller R.M, Plott C.R., Smith V.L. Intertemporal Competitive Equilibrium: An Empirical Study of Speculation. Economics // Quarterly Journal of Economics. Vol. 91. Issue 4. 1977. Pp. 599-624. DOI: 10.2307/1885884

17. Bochkov A.V., Lesnykh V.V., Zhigirev N.N., Lavrukhin Yu.N. Some methodical aspects of critical infrastructure protection // Safety Science. 2015. Vol. 79. Pp. 229-242. DOI: 10.1016/j.ssci.2015.06.008

18. Zhigirev N., Bochkov A., Kuzmina N. et al. Introducing a Novel Method for Smart Expansive Systems' Operation Risk Synthesis // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 427. DOI: 10.3390/math10030427

19. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Том 3. Сортировка и поиск. The Art of Computer Programming. Volume 3. Sorting and Searching / под ред. В.Т. Тертышного (гл. 5) и И.В. Красикова (гл. 6): 2-е изд. М.: Вильямс, 2007. Т. 3. 832 с.

20. Левитин А.В. Метод грубой силы: Пузырьковая сортировка / В кн.: Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс, 2006. С. 144-146.

21. Кофман А., Анри-Лабордер А. Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование: Учебник. М.: Мир, 1977. 432 с.

22. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: Монография в 2-х томах: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. Т 1. 360 с.

References

1. Kemeny J., Snell J. Mathematical models in the social sciences. Moscow: Sovietskoie radio; 1972.

2. Larichev O.I. [Theory and methods of decision-making and Chronicle of events in magic lands: 2nd edition, revised and enlarged]. Moscow: Logos; 2002. (in Russ.)

3. Kaplinsky A.I., Russman I.B., Umyvakin V.M. [Simulation and algorithmisation of ill-defined problems of best system variants selection]. Voronezh: VSU Publishing; 1991. (in Russ.)

4. Schulze M. The Schulze method of voting. Computer science and game theory. Cornell University; 2018. (accessed 29.09.2023). Available at: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1804/1804.02973.pdf.

5. Williams M. The Skating system study guide; 2018. (accessed 02.10.2023). Available at: https://dancesport.org.au/scrutineering-tutorial-book-draft-12.3.pdf.

6. Kondratenkov V. [Paradoxes, myths and errors of the Skating system]. Official website of the Moscow Federation of Sport Dance. (accessed 02.10.2023). Available at: http://old.russianmaster.ru/html/skating/skatingparadox.html.

7. Mora X. The Skating system. 2nd edition; 2001. (accessed 29.09.2023). Available at: https://mat.uab.cat/~xmora / escrutini/skating2en.pdf.

8. Lisitsyn D.V. [Methods of regression model construction]. Novosibirsk: NSTU; 2011. (in Russ.)

9. Kim O.J., Mueller C.U., Klekka U.R. et al. Yeniukov I.S., editor. [Factorial, discriminatory, and cluster analysis]. Moscow: Finansy i statistika; 1989.

10. Arrow K.J. Social choice and individual values: 2nd ed. New York: Wiley; 1963.

11. Condorcet J. Esquisse d'un tableau historique des progres de l'esprit humain. Moscow: Librokom; 2011.

12. Saaty T. Decision making – the analytic hierarchy and network. Moscow: Radio i sviaz; 1993.

13. Nogin V.D. [A set and the Pareto principle: 2nd edition, corrected and enlarged]. Saint Petersburg: [Publishing and Polygraphic Association of Higher Education Establishments]; 2022. (in Russ.)

14. Pareto V. Manual of political economy. RIOR; 2018.

15. Koch R. The 80/20 principle. Eksmo; 2012.

16. Miller R.M., Plott C.R., Smith V.L. Intertemporal competitive equilibrium: An empirical study of speculation. Economics. *Quarterly Journal of Economics* 1977;91(4):599-624. DOI: 10.2307/1885884.

17. Bochkov A.V., Lesnykh V.V., Zhigirev N.N., Lavrukhin Yu.N. Some methodical aspects of critical infrastructure protection. *Safety Science* 79;2015:229-242. DOI: 10.1016/j.ssci.2015.06.008.

18. Zhigirev N., Bochkov A., Kuzmina N. et al. A Novel method for smart expansive systems' operation risk synthesis. *Mathematics* 2022;10:427. DOI: 10.3390/math10030427.

19. Knuth D.E. The art of computer programming. Volume 3. Sorting and searching. Moscow: Viliams; 2007.

20. Levitin A.V. [The brute force method: Bubble sorting]. In: [Algorithms. Introduction into development and analysis]. Moscow: Viliams; 2006. (in Russ.)

21. Kaufmann A., Henry-Labodere A. Integer and mixed programming: Theory and applications. Moscow: Mir; 1977.

22. Schrijver A. Theory of linear and integer programming: a monograph in 2 volumes. Moscow: Mir; 1991.

Сведения об авторах

Жигирев Николай Николаевич – кандидат технических наук, главный научный сотрудник, KALABI IT, Москва, Российская Федерация, тел. +7 (985) 782-47-16, e-mail: nnzhigirev@mail.ru

Бочков Александр Владимирович – доктор технических наук, Ученый секретарь НТС АО «НИИАС», ул. Нижегородская, д. 27, стр. 1, Москва, Российская Федерация, 109029, e-mail: a.bochkov@gmail.com

Кузьминова Алла Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерных систем и технологий (№12), Институт интеллектуальных кибернетических систем НИЯУ МИФИ, Каширское ш., 31, Москва, Российская Федерация, 115409, тел. +7 (916) 494-08-77, e-mail: avkuzminova@mephi.ru

About the authors

Nikolai N. Zhigirev, Candidate of Engineering, Chief Researcher, KALABI IT, Moscow, Russian Federation, tel. +7 (985) 782-47-16, e-mail: nnzhigirev@mail.ru.

Alexander V. Bochkov, Doctor of Engineering, Academic Secretary of the Science and Technology Council, JSC NIIAS, 27, bldg 1 Nizhegorodskaya str., Moscow, 109029, e-mail: a.bochkov@gmail.com.

Alla V. Kuzminova, Candidate of Engineering, Senior Lecturer, Department of Computer Systems and Technologies (no. 12), Institute for Intelligent Cybernetic Systems NRNU MEPhI, 31 Kashirskoye sh., Moscow, 115409, Russian Federation, tel. +7 (916) 494 08 77, e-mail: avkuzminova@mephi.ru.

Вклад авторов в статью

Бочков А.В. выполнил постановку задачи, принял участие в разработке алгоритма инверсионного метода оценки меры согласованности мнений экспертов, провел модельные расчеты и сравнение разработанного алгоритма с традиционными, используемыми в настоящее время при решении задач группового выбора.

Жигирев Н.Н. является автором и основным разработчиком алгоритма инверсионного метода оценки меры согласованности мнений экспертов, направленного на поиск оптимума меры согласованности, восстановление полного коллективного порядка в предпочтениях на базе частных рейтингов экспертов.

Кузьминова А.В. выполнила анализ и обзор публикаций в рассматриваемой области исследования, включая задачи разработки эвристических алгоритмов «теории расписаний» и других задачах целочисленного линейного программирования, а также провела модельные расчеты контрольных примеров.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.