

Чумаков И.А., Антонов А.В.

ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ НЕПОЛНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Статья описывает современные способы параметрической оценки ведущей функции потока (ВФП) и параметра потока отказов в предположении неполного восстановления с использованием моделей Кижима. Проводится сравнение моделей между собой, а также с моделями, предполагающими полное или минимальное восстановление элемента (однородный и неоднородный пуассоновские процессы соответственно). Для оценки параметров модели используется метод максимизации функции правдоподобия. Для оценки ведущей функции потока, заданной в неявном виде, наиболее популярным методом является моделирование по методу Монте-Карло. В статье рассматривается пример применения разработанной методики для расчета характеристик надежности элементов, входящих в состав штатного оборудования энергоблоков АС.

Ключевые слова: неполное восстановление, модели Кижима, ведущая функция потока, параметр потока отказов.

Введение

Анализ надежности элементов и систем действующих АЭС является актуальной задачей современного этапа развития ядерной энергетики. Для проведения таких исследований применяются вероятностно-статистические методики оценки характеристик надежности. Наиболее употребительными для расчета надежности восстанавливаемых систем являются модели, предполагающие полное либо минимальное восстановление. Функционирование современных технических систем, как правило, представляет собой более сложный процесс, для которого характерно неполное или частичное восстановление. Различные типы восстановления могут быть классифицированы следующим образом:

- полное восстановление. Элемент восстанавливается до состояния, которое было у него на начальный момент времени («как новый», в зарубежной литературе используется термин «as good as new»). Данный тип восстановления можно трактовать как замену отказавшего элемента на новый.
- минимальное восстановление «как было перед отказом» («as bad as old»). Элемент восстанавливается до состояния, которое было у него на момент отказа.
- неполное восстановление «хуже чем новое, но лучше чем было перед отказом» («better than old but worse than new»). После восстановления элемент переходит в некоторое промежуточное состояние между двумя вышеописанными категориями.

- специфический случай «хуже, чем перед отказом» («worse than old»). После восстановления объект находится в состоянии худшем, чем до отказа.

Соответственно однородный процесс восстановления используется для моделирования полного восстановления, неоднородный пуассоновский процесс применяется для моделирования минимального восстановления. Такие процессы хорошо изучены и широко применяются на практике. Однако в наше время становятся все более востребованными модели, позволяющие учитывать неполное восстановление элемента, в том числе модель обобщенного процесса восстановления. Среди основополагающих работ на эту тему можно отметить [1]. Модели Кижима являются предметом исследования настоящей работы.

1. Обобщенный процесс восстановления, модели Кижима

Пусть v_{i-1} – виртуальный возраст элемента на момент $(i-1)$ -го восстановления. X_i – i -ая наработка на отказ. Тогда X_i имеет следующую функцию распределения [2-3]:

$$F_i(x) = \frac{F(x + v_{i-1}) - F(v_{i-1})}{1 - F(v_{i-1})}; \quad (1)$$

отсюда вероятность безотказной работы (ВБР) можно записать в виде:

$$P_i(x) = 1 - F_i(x) = \frac{P(x + v_{i-1})}{P(v_{i-1})}; \quad (2)$$

где $F(x)$ – функция распределения наработки до первого отказа для абсолютно нового элемента. Реальный возраст элемента можно записать в виде:

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i, S_0 = 0;$$

где X_i – i -тая наработка до отказа.

Модель «Kijima I» предполагает, что n -ное восстановление влияет только на повреждения, полученные элементом между $(n-1)$ -ым и n -ым отказом, уменьшив добавленный возраст элемента с X_i до qX_i . Виртуальный возраст элемента после n -ного восстановления можно записать в виде:

$$v_n = v_{n-1} + qX_n = q \sum_{i=1}^n X_i = qS_n; v_0 = 0; \quad (3)$$

где $q \geq 0$ – некоторый параметр модели, характеризующий степень n -ного восстановления. Здесь и на протяжении всей статьи предполагается $q = \text{const}$, хотя в общем случае значение q может различаться для каждого восстановления.

Модель «Kijima II» предполагает, что n -ное восстановление влияет на суммарные повреждения, полученные элементом на протяжении всего времени его функционирования:

$$v_n = q(v_{n-1} + X_n) = q(q^{n-1}X_1 + q^{n-2}X_2 + \dots + X_n). \quad (4)$$

Рассмотрим некоторые частные значения параметра q :

Случай $q=0$ описывает полное восстановление. Случайные процессы (3-4) вырождаются в однородные процессы восстановления.

Случай $q=1$ описывает минимальное восстановление. Случайные процессы (3-4) вырождаются в неоднородные пуассоновские процессы.

Случай $0 < q < 1$ описывает неполное восстановление «хуже чем новое, но лучше чем было перед отказом», являющееся предметом изучения данной статьи.

Наконец, специфический случай $q > 1$ – восстановление «хуже, чем перед отказом», в статье не рассматривается.

Математическое ожидание среднего числа отказов на интервале $(0; t]$ также известно как «функция восстановления», «ведущая функция потока» (в зарубежной литературе – «Cumulative Intensity Function», например [3]). В дальнейшем в тексте статьи используется термин «ведущая функция потока» (ВФП). Для случая неполного восстановления данная величина определяется уравнением [1, 3]:

$$H(t) = \int_0^t (g(\tau | 0) + \int_0^\tau h(x)g(\tau - x | x)dx)d\tau, \quad (5)$$

где:

$$g(t | x) = \frac{f(t + qx)}{1 - F(qx)}; h(t) = \frac{dH(t)}{dt}; f(t) = \frac{dF(t)}{dt}.$$

Решение (5) невозможно аналитическим путем и даже численное решение затруднительно [3]. В 1998 году Каминским и Кривцовым был предложен способ вычисления ведущей функции потока, использующий метод Монте-Карло. В настоящее время именно этот подход широко применяется для исследования обобщенных процессов восстановления. Для моделирования по методу Монте-Карло необходимо предполагать вид функции распределения наработки до первого отказа, параметры функции распределения, а также значения параметра q . Оценка параметров возможна различными способами.

2. Оценка параметров модели в предположении распределения Вейбулла

Каминский и Кривцов в своей работе [3] предлагают использовать метод наименьших квадратов:

$$\min_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, q} \left(\sum_{i=1}^n (H_{эмп}(t_i) - H_{МК}(t_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, q))^2 \right),$$

где $H_{эмп}$ – эмпирическая ведущая функция потока; $H_{МК}$ – оценка функции по методу Монте-Карло; $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ – вектор параметров распределения.

Оценка вектора $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ и параметра модели q подобным образом влечет за собой большие вычислительные расходы.

Рассмотрим подробнее альтернативный подход, заключающийся в использовании метода максимального правдоподобия [2, 4, 5]. Предположим, что наработка до первого отказа имеет распределение Вейбулла. Необходимо заметить, что функция этого распределения имеет различные формы записи. В данной работе будем использовать следующий вид распределения, несколько упрощающий дальнейшие расчеты:

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x^\beta). \quad (6)$$

Перепишем ВБР i -той наработки на отказ (2) с использованием (6):

$$P_i(x) = \frac{P(x + v_{i-1})}{P(v_{i-1})} = \frac{\exp(-\lambda(x + v_{i-1})^\beta)}{\exp(-\lambda v_{i-1}^\beta)} = \exp(\lambda(v_{i-1}^\beta - (x + v_{i-1})^\beta));$$

где $v_{i-1} = v_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, q)$ – виртуальный возраст элемента после $(i-1)$ -го отказа, равный (3) либо (4) в зависимости от используемой модели. Далее находим плотность распределения:

$$f_i(x) = -\frac{\partial P(x)}{\partial x} = \lambda \beta (x + v_{i-1})^{\beta-1} \exp(\lambda(v_{i-1}^\beta - (x + v_{i-1})^\beta)).$$

Функция правдоподобия

$$L(\lambda, \beta, q) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = (\lambda \beta)^n \prod_{i=1}^n (x_i + v_{i-1})^{\beta-1} \exp(\lambda(v_{i-1}^\beta - (x_i + v_{i-1})^\beta)).$$

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей

$$\ln L(\lambda, \beta, q) = n(\ln \lambda + \ln \beta) + \lambda \sum_{i=1}^n [v_{i-1}^\beta - (x_i + v_{i-1})^\beta] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i + v_{i-1}). \quad (7)$$

Далее мы можем продифференцировать полученную логарифмическую функцию правдоподобия (7) по каждому из аргументов λ, β, q , приравнять производные к нулю и решить полученную систему относительно λ, β, q . К сожалению, аналитического решения для такой системы не было найдено, поэтому для решения применяются численные методы [2, 4, 5]. Стоит заметить, что современные программы математического моделирования (Matlab и т.п.) позволяют эффективно вычислять максимум заданной функции от многих переменных, избавляя от зачастую громоздких операций дифференцирования и явного указания системы уравнений.

3. Применение метода Монте-Карло для оценки характеристик процесса восстановления

3.1. Оценка ведущей функции потока

Считая известным вид функции распределения и имея оценки параметров, мы можем моделировать случайные процессы (3-4). Для оценки ВФП в точке T необходимо разыграть последовательность случайных величин – наработок до отказа. N_j – число отказов, произошедших до времени T , есть смоделированное значение функции восстановления, далее моделирование повторяется необходимое число раз S . Итоговая оценка функции $H_{МК}(T)$ вычисляется как среднее из смоделированных значений [5]:

$$H_{МК}(T) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S N_i. \quad (8)$$

Воспользуемся методом обратных функций [6, стр. 371-373] для моделирования наработок на отказ. Функция распределения наработки определяется (1). Обозначим $F_i(x)=U$, запишем полученное выражение

$$U = \frac{F(x + v_{i-1}) - F(v_{i-1})}{1 - F(v_{i-1})}.$$

Откуда находим

$$x = F^{-1}((1 - F(v_{i-1}))U + F(v_{i-1})) - v_{i-1}. \quad (9)$$

Функция, обратная функции распределения Вейбулла в формуле (6), равна

$$F^{-1}(y) = \left[-\frac{\ln(1-y)}{\lambda} \right]^{\frac{1}{\beta}}. \quad (10)$$

Подставив (6) и (10) в (9), получим итоговую формулу для моделирования i -той наработки на отказ:

$$x_i = [(v_{i-1})^\beta - \frac{\ln U}{\lambda}]^{\frac{1}{\beta}} - v_{i-1}.$$

Для моделирования необходимо разыграть $U \sim U[0;1]$.

3.2. Оценка параметра потока отказов

ГОСТ [7] выделяет мгновенный параметр потока отказов (МППО), как предел отношения числа отказов на интервале, к длине интервала, стремящейся к нулю:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E(N(t + \Delta t) - N(t))}{\Delta t} = \frac{dH(t)}{dt};$$

а также средний параметр потока отказов (СППО) – среднее значение МППО на конечном интервале времени

$$\bar{h}(t_1; t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt.$$

В данной работе нас будет интересовать оценка СППО, которая может быть получена методом Монте-Карло аналогично ведущей функции потока (8):

$$h_{МК}(T) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \frac{n_i}{\Delta_i}; \quad (11)$$

где n_i – число отказов на интервале Δ_i , причем T – середина интервала Δ_i .

3.3. Оценка погрешности вычислений

Как известно, при использовании метода Монте-Карло можно получить оценку погрешности не гарантированно, а лишь с некоторой степенью достоверности. Согласно [8, стр.234] и центральной предельной теореме, получаем верхнюю границу ошибки вычислений интеграла по методу Монте-Карло (8) с коэффициентом доверия β :

$$\delta \leq t_\beta \sqrt{\frac{D(H_{МК})}{S}};$$

где: t_β – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \beta/2$ [6, стр. 365], $t_\beta = 3$ для $\beta = 0,997$ (правило трех сигм).

Неизвестную дисперсию $D(H_{МК})$ мы можем заменить ее несмещенной оценкой D :

$$D = H_{МК}^2 - (H_{МК})^2 = \frac{S}{S-1} \left(\sum_{i=1}^S N_i^2 - \left(\sum_{i=1}^S N_i \right)^2 \right).$$

Откуда искомая формула погрешности вычисления ВФП методом Монте-Карло в некоторой точке принимает вид:

$$\delta \leq t_{\beta} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^S N_i^2 - (\sum_{i=1}^S N_i)^2}{S-1}}; \quad (12)$$

Заметим, что $\delta \sim \sqrt{1/S}$, где S – количество итераций моделирования значения $H_{MK}(T)$ в точке T . Выбор в качестве S величины порядка 10^6 позволяет добиваться точности, приемлемой для большинства расчетов и не является проблемой при наличии современных вычислительных средств.

4. Пример расчета

Проведем расчет параметров представленной модели на реальных данных. Для этого воспользуемся информацией об отказах устройств накопления и обработки информации, работающих в составе штатного оборудования атомных станций. Для выбранного устройства за время эксплуатации $T \approx 4,5 \cdot 10^4$ ч. было зафиксировано 112 отказов. В качестве распределения наработки до первого отказа выбрано распределение Вейбулла. Используемые модели, соответствующие значения логарифмической функции правдоподобия (7) и оценки параметров приведены в таблице 1:

Таблица 1. Оценки параметров модели

Модель	$\ln L$	λ	β	q
Полное восстановление	-253.1316	0.3588	0.8563	-
Минимальное восстановление	-242.0335	0.0038	1.7130	-
Kijima I	-242.0336	0.0038	1.7131	0.9998
Kijima II	-241.8521	0.0017	1.8863	0.9930

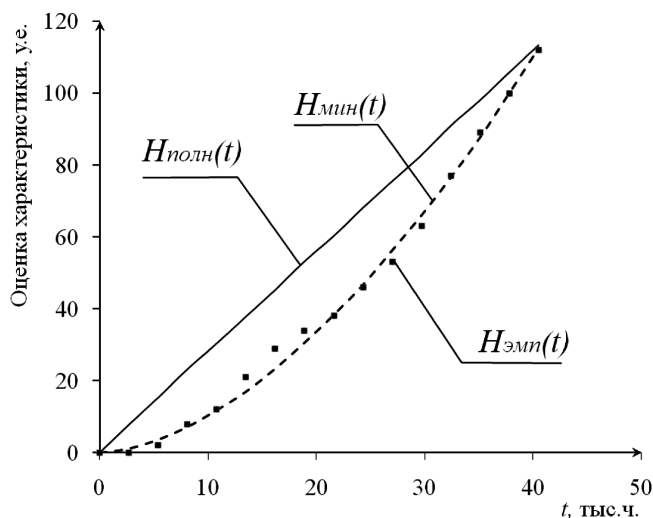


Рис. 1. Оценки ВФП для моделей полного и минимального восстановления

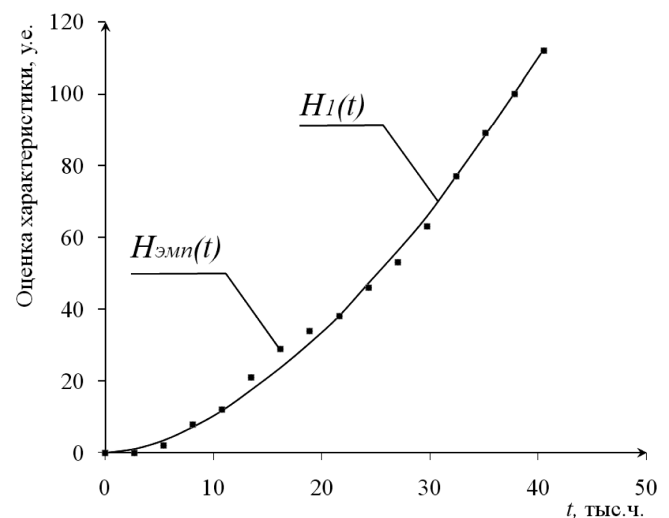


Рис. 2. Оценка ВФП для модели Kijima I

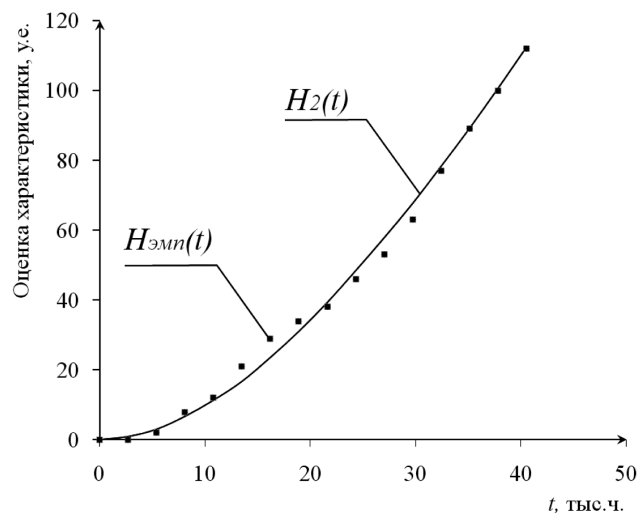


Рис. 3. Оценка ВФП для модели Kijima II

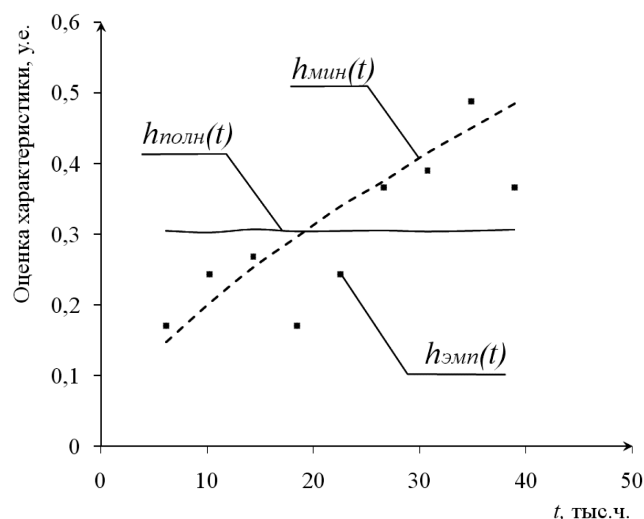


Рис. 4. Оценки СППО для моделей полного и минимального восстановления

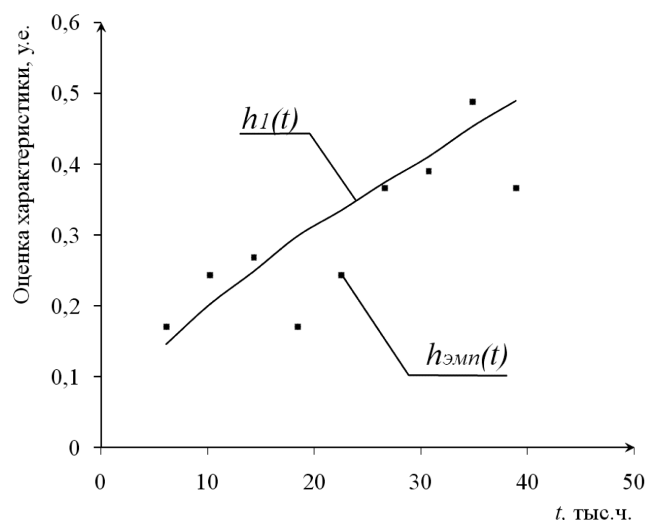


Рис. 5. Оценка СППО для модели Kijima I

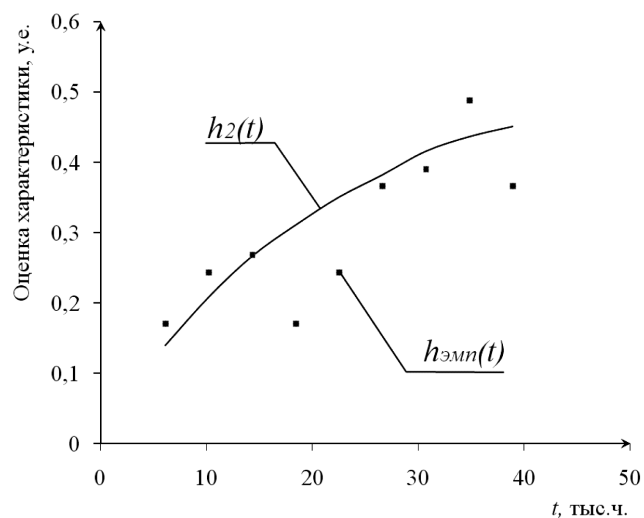


Рис. 6. Оценка СППО для модели Kijima II

Точечные оценки значений ВФП (8) и СППО (11) приведены на рисунках 1-6 соответственно. На данных рисунках приняты следующие обозначения:

$H_{эмн}(t)$ и $h_{эмн}(t)$ — эмпирические ВФП и СППО;

$H_{полн}(t)$ и $h_{полн}(t)$ — оценки ВФП и СППО в предположении полного восстановления;

$H_{мин}(t)$ и $h_{мин}(t)$ — оценки ВФП и СППО в предположении минимального восстановления;

$H_1(t)$ и $h_1(t)$ — оценки ВФП и СППО для модели Kijima I;

$H_2(t)$ и $h_2(t)$ — оценки ВФП и СППО для модели Kijima II.

Стоит заметить, что при выборе для S — количества итераций моделирования значения функции — величины порядка 10^6 , погрешность (12) вычисления функции по методу Монте-Карло составляет, как правило, не более 1% с уровнем доверительной вероятности 0,997.

Согласно приведенным в таблице 1 значениям функции правдоподобия, наилучшей моделью (минимум значения функции правдоподобия) для конкретного обработанного набора данных является модель «Kijima II». Основываясь на небольшой разнице в значениях функции правдоподобия (в пределах 0,5%), можно заключить, что для обработанных данных разница между моделями

Кижима и моделью неоднородного пуассоновского процесса в предположении минимального восстановления невелика и не позволяет с большой достоверностью указать наилучшую модель из исследуемых. Подобный вывод также подкрепляют представленные в таблице 1 схожие оценки параметров распределения Вейбулла и параметра q , характеризующего степень восстановления.

Заключение

В отличие от однородного и неоднородного процессов восстановления, модели обобщенного процесса восстановления, в т.ч. модели Кижима, позволяют учитывать случай неполного восстановления «хуже чем новое, но лучше чем было перед отказом». В статье описан метод оценки ведущей функции потока и среднего параметра потока отказов с использованием моделей «Kijima I» и «Kijima II», показывающий соответствие реальным данным. Проведены расчеты параметров модели по данным эксплуатации устройств накопления и обработки информации, работающих в составе штатного оборудования атомных станций.

Список литературы

1. Kijima M., Sumita N. A Useful Generalization of Renewal Theory: Counting Process Governed by Non-negative Markovian Increment. *Journal of Applied Probability* №23, 71-88, 1986.
2. Wibowo W. On approaches for repairable system analysis : Renewal Process, Nonhomogenous Poisson Process, General Renewal Process. Indonesia, *Jurnal Industri*, Volume IX, №1, 60-66, 2010.
3. Каминский М., Кривцов В. Применение метода Монте-Карло к оценке обобщенного процесса восстановления при анализе данных об отказах в период действия гарантийных обязательств. *Reliability: Theory & Applications* №1, January 2006 С. 32-34.
4. Kaminsky M. Krivtsov V. G1-Renewal Process as Repairable System Model, *Reliability and Risk Analysis: Theory & Applications*, #3, Vol.1, pp. 7-14, 2010.
5. Guo H., Liao H., Pulido J. Failure Process Modeling For Systems With General Repairs. MMR 2011. International Conference on Mathematical Methods in Reliability. "Methodology, Practice and Interference". Beijing, 2011
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.
7. ГОСТ 53480-2009. Надежность в технике. Термины и определения.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. –М.: Наука, 2003. – 635 с.