

# Система массового обслуживания без очереди и с детерминированным временем обслуживания\*\* Queuing system without queue and deterministic service time\*\*

Цициашвили Г.Ш.<sup>1\*</sup>, Радченкова Т.В.<sup>1</sup>  
Tsitsiashvili G.Sh.<sup>1\*</sup>, Radchenkova T.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, (ИПМ ДВО РАН), Владивосток, Российская Федерация

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Division, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russian Federation  
\*guram@iam.dvo.ru



Цициашвили Г.Ш.



Радченкова Т.В.

**Резюме.** В настоящее время интенсивно исследуются системы массового обслуживания, описывающие отказы в процессе тестирования программного обеспечения. В этих системах предполагается зависимость между интенсивностью входного пуассоновского потока и интенсивностью экспоненциально распределенного времени обслуживания. С помощью этой зависимости строятся процедуры сглаживания пиковой нагрузки в системе. Однако для систем с детерминированным временем обслуживания такая модель и метод ее исследования непригодны. Поэтому в данной работе исследуется зависимость параметра распределения Пуассона количества заявок в системе от детерминированного времени обслуживания при наличии пика интенсивности входного потока. Эта зависимость исследована аналитически и численно, и показано, как сокращение времени обслуживания сглаживает пик количества клиентов в системе.

**Abstract.** Today, queueing systems that describe failures in the process of software testing are subject to extensive research. Such systems involve a dependence between the rate of an input Poisson stream and the rate of exponentially distributed handling time. Using this dependence, system load levelling procedures are defined. However, such a model and method of research are not suitable for systems with a deterministic handling time. Therefore, this paper examines the dependence of the Poisson distribution parameter of the number of requests in a system from the deterministic handling time in the presence of a peak rate of the input stream. This dependence is examined analytically and numerically. It is shown that a reduction of the handling time levels the peak number of customers in the system.

**Ключевые слова:** пуассоновский поток, детерминированное время обслуживания, система массового обслуживания с бесконечным числом приборов.

**Keywords:** Poisson stream, deterministic processing time, queueing system with an infinite number of devices.

**Для цитирования:** Цициашвили Г.Ш., Радченкова Т.В. Система массового обслуживания без очереди и с детерминированным временем обслуживания // Надежность. 2023. №2. С. 64-67. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-2-64-67>

**For citation:** Tsitsiashvili G.Sh., Radchenkova T.V. Queuing system without queue and deterministic service time. Dependability 2023;2:64-67. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-2-64-67>

**Поступила:** 21.02.2023 / **После доработки:** 24.04.2023 / **К печати:** 15.06.2023  
**Received on:** 21.02.2023 / **Revised on:** 24.04.2023 / **For printing:** 15.06.2023

## Введение

Системы массового обслуживания, описывающие отказы в процессе тестирования программного обеспечения, в настоящее время интенсивно исследуются. Особенностью этих систем является зависимость между интенсивностью входного пуассоновского потока и интенсивностью экспоненциально распределенного времени обслуживания. Эта зависимость позволяет сгладить пик количества клиентов в системе, вызванный пиком интенсивности входного потока. Но существует широкий спектр таких систем массового обслуживания, в которых время обслуживания является детерминированным. В данной работе исследуется зависимость параметра распределения Пуассона количества заявок в системе от детерминированного времени обслуживания при наличии пика интенсивности входного потока. Эта зависимость исследована аналитически и численно, и показано, как сокращение времени обслуживания сглаживает пик количества клиентов в системе.

В [1] данные об ошибках собираются в процессе тестирования при разработке программного обеспечения. Авторы проводят моделирование на основе системы массового обслуживания с бесконечным числом приборов, используя сгенерированные выборочные данные о времени обнаружения неисправностей, чтобы визуализировать эффективность действий по устранению неисправностей. Они применяют метод уточнения, используя функции интенсивности моделей роста надежности программного обеспечения с задержкой S-образной формы и перегибом S-образной формы [2], [3] для генерации выборочных данных о времени обнаружения неисправностей из данных подсчета неисправностей. В результате моделирование, основанное на системе с бесконечным числом приборов, с использованием сгенерированных выборочных данных времени обнаружения неисправностей для визуализации эффективности действий по устранению неисправностей, выполняется в условиях нестационарной интенсивности входного потока. Такой подход позволяет поставить вопрос о поведении системы массового обслуживания в режиме пиковой нагрузки.

Однако включение в модель массового обслуживания зависимости между интенсивностями входного потока и обслуживания может быть слишком ограничительным. Действительно, если мы предположим, что время обслуживания клиентов детерминировано, то такое ограничение больше не работает. В то же время аналогичная система массового обслуживания, основанная на модели с бесконечным числом приборов, встречается и в других приложениях, например, в системе допуска посетителей к услугам (например, на спортивное сооружение) [4]. Более того, детерминированное распределение времени обслуживания в сочетании с приемом посетителей в произвольное время оказывается очень удобным инструментом для

привлечения их к обслуживанию. Для этой модели возникает вопрос, какими способами можно уменьшить количество заявок в системе в режиме пиковой нагрузки. В этой статье показано, что изменение детерминированного времени обслуживания является фактором, который может существенно повлиять на поведение системы в режиме пиковой нагрузки.

## 1. Нестационарная пуассоновская модель непрерывно функционирующей системы обслуживания

Расчет нестационарных моделей массового обслуживания обычно намного сложнее, чем расчет стационарных моделей. Однако многие системы бытового обслуживания обычно являются нестационарными. Поэтому необходимо построить нестационарную модель массового обслуживания таким образом, чтобы ее расчет был достаточно простым и удобным.

В данной работе это может быть достигнуто путем допущения детерминированности времени обслуживания и пуассоновости входного нестационарного потока заявок.

Рассмотрим модель системы массового обслуживания, в которой заявки образуют следующий пуассоновский поток. Каждая заявка находится в системе в течение времени  $a$ , затем покидает систему. Моменты поступления заявок в систему образуют пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Особенностью данной модели является ее нестационарность и возможность включения в нее группового приема клиентов с различными параметрами пуассоновского распределения их численности.

Таким образом, данная модель адаптируется к условиям функционирования реальных систем обслуживания: непрерывно действующих плавательных бассейнов, открытых катков, тренажерных залов, залов аэробики и фитнеса, лыжных баз. На языке теории массового обслуживания такая система может быть интерпретирована как система с пуассоновским потоком заявок с меняющейся интенсивностью, бесконечным числом приборов и детерминированным временем обслуживания.

Здесь функция  $\lambda(t)$  предполагается непрерывной при  $0 \leq t \leq T - a$ ,

$$\lambda(t) = 0, \quad t < 0 \text{ или } T - a \leq t.$$

В качестве примера такого потока мы можем предположить, что это посетители непрерывно работающего бассейна, приходящие в произвольное время. Тогда в течение фиксированного времени  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , количество пользователей, пришедших в систему, имеет распределение Пуассона с параметром

$$\Lambda(t) = \int_{t-a}^t \lambda(t) dt, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Эта нестационарная модель массового обслуживания может иметь много обобщений: многофазные системы и ациклические сети обслуживания, системы с несколькими потоками, имеющими разное детерминированное время обслуживания, и т.д. Он также может быть применен для расчета конвейерных систем для обработки деталей.

## 2. Основные свойства нестационарной модели с детерминированным временем обслуживания

Пусть функция  $\lambda(t)$  имеет единственный экстремум (максимум) в момент времени  $t_* > a$ . Следовательно,  $\lambda(t)$  является неубывающей на интервале  $0 \leq t < t_*$  и невозрастающей на полуинтервале  $t_* < t \leq T - a$ . Из формулы (1) следует, что функция  $\Lambda(t)$  имеет максимум в точке  $t^*$ , если выполняется соотношение

$$\Lambda'(t) = \lambda(t^*) - \lambda(t^* - a) = 0. \quad (2)$$

**Свойство 1.** Из условий для функции  $\lambda(t)$  следует, что

$$t_* < t^* < t_* + a. \quad (3)$$

Таким образом, максимум функции  $\Lambda(t)$  сдвинут вправо по отношению к максимуму функции  $\lambda(t)$ .

**Свойство 2.** Из формулы (1) получаем, что

$$\Lambda(t^*) \leq a\lambda(t_*). \quad (4)$$

Таким образом, уменьшение параметра  $a$  позволяет сгладить пик функции  $\Lambda(t)$ .

**Свойство 3.** Если выполняется следующее условие

$$2a = T \int_0^{T-a} \lambda(t) dt \geq \lambda(t_*), \quad (5)$$

то пик функции  $\Lambda(t)$  может быть выше, чем пик функции  $\lambda(t)$ :

$$\Lambda(t^*) \geq \lambda(t_*). \quad (6)$$

Другим условием для выполнения соотношения (6) является формула

$$\lambda(t) \geq \lambda_*, \quad 0 < t \leq T - a, \quad a\lambda_* \geq \lambda(t_*). \quad (7)$$

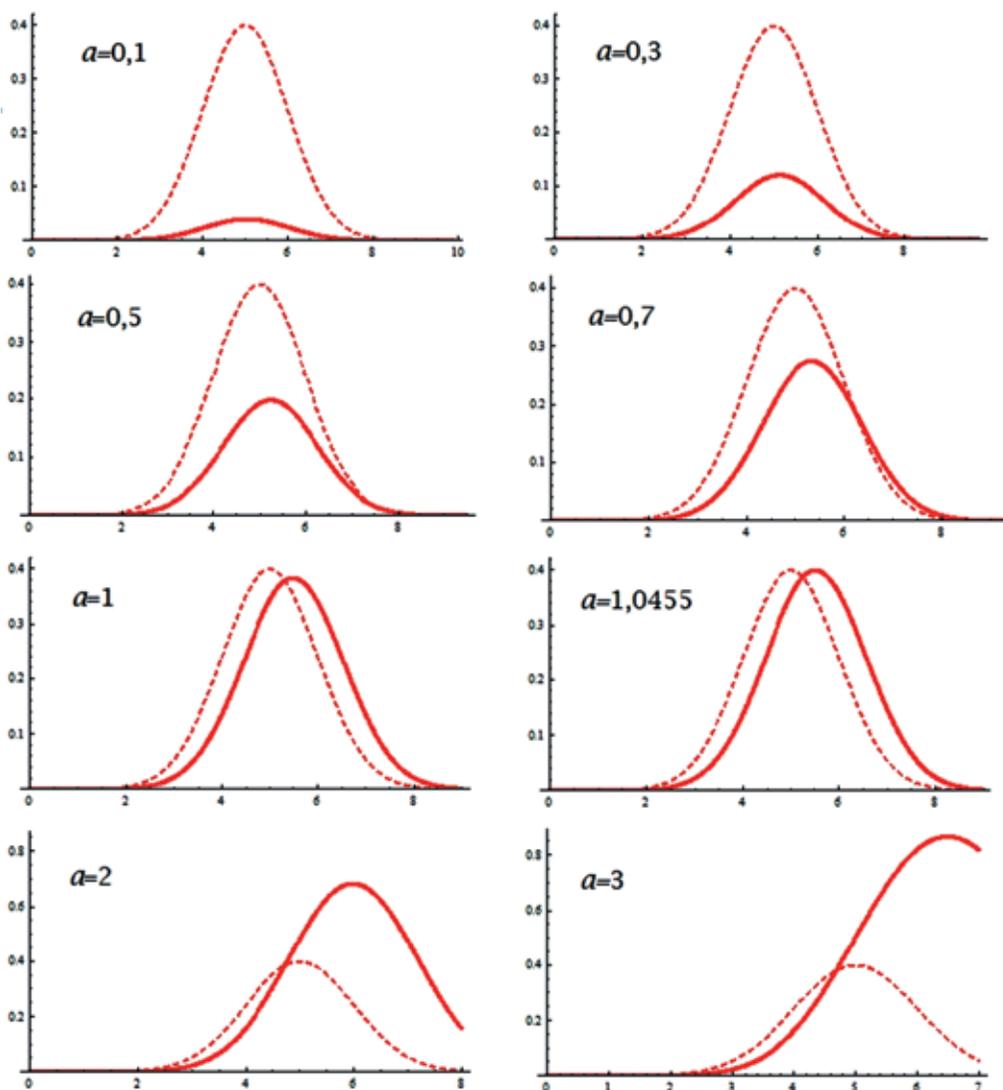


Рис. 1. Графики функций  $\lambda(t)$  (пунктирная линия),  $\Lambda(t)$  (сплошная линия) при  $T = 10, b = 5, c = 1$

### 3. Вычислительные эксперименты

Все эксперименты выполняются для функции

$$\lambda(t) = \frac{\exp\left(-\frac{(t-b)^2}{2c}\right)}{\sqrt{2\pi c}}, 0 < t < T-a, \lambda(t) = 0, t \leq 0$$

или  $T-a \leq t$

с различными значениями параметра  $a$ .

Рис. 1 показывает, что увеличение параметра  $a$  приводит к увеличению функции  $\Lambda(t)$  и к сдвигу вправо ее максимума по отношению к функции  $\lambda(t)$ .

### 4. Обсуждение

Результаты аналитического исследования функции  $\Lambda(t)$  показали, что параметр  $a$ , который характеризует детерминированное время обслуживания клиентов в этой системе без очереди, является удобным инструментом для сглаживания пиковой нагрузки, характеризуемой интенсивностью входного потока. Свойства модели массового обслуживания с бесконечным числом приборов и детерминированным временем обслуживания, установленные аналитически и в вычислительных экспериментах, позволяют нам увидеть, как время обслуживания влияет на параметр пуассоновского распределения количества клиентов в системе. Уменьшение этого параметра приводит к сглаживанию пика интенсивности входного потока, а увеличение приводит к увеличению этого пика. Таким образом, данное исследование позволяет нам определить, как выбрать время обслуживания, чтобы ослабить пиковые нагрузки в системе.

### 5. Заключение

Свойства модели массового обслуживания с бесконечным числом приборов и детерминированным временем обслуживания, установленные в работе аналитически и в вычислительных экспериментах, позволяют нам увидеть, как время обслуживания влияет на параметр пуассоновского распределения количества заявок в системе. Уменьшение этого параметра приводит к сглаживанию пика интенсивности входного потока, а увеличение приводит к увеличению этого пика. Таким образом, данное исследование позволяет нам определить, как выбрать время обслуживания, чтобы ослабить пиковые нагрузки в системе.

### Библиографический список

1. Minamino Y., Makita Y., Inoue Sh. et al. Efficiency Evaluation of Software Faults Correction Based on Queuing Simulation // *Mathematics*. 2022. No. 10 (9). P. 1438.
2. Pham H. *Software Reliability*. Springer-Verlag, Singapore, 2000.
3. Yamada S. *Software Reliability Modelling, Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag, 132, Tokyo/Heidelberg, 2014.

4. Tsitsiashvili G. Sh. Non-stationary Poisson model of a continuously functioning queuing system. *Journal of Physics: Conference Series // The XIII International Conference Computer-Aided Technologies in Applied Mathematics (ICAM 2020)*. 2020. 1680 (1): 01205013.

### References

1. Minamino Y., Makita Y., Inoue Sh. et al. Efficiency Evaluation of Software Faults Correction Based on Queuing Simulation. *Mathematics* 2022;10 (9):1438.
2. Pham H. *Software Reliability*. Springer-Verlag: Singapore; 2000.
3. Yamada S. *Software Reliability Modelling, Fundamentals and Applications*. Springer-Verlag, 132, Tokyo/Heidelberg; 2014.
4. Tsitsiashvili G.Sh. Non-stationary Poisson model of a continuously functioning queuing system. *Journal of Physics: Conference Series. The XIII International Conference Computer-Aided Technologies in Applied Mathematics (ICAM 2020)* 2020;1680(1):01205013.

### Сведения об авторах

**Цициашвили Гурами Шалвович** – главный научный сотрудник, доктор физмат наук, Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, ул. Радио, 7, Владивосток, Российская Федерация, 690041, e-mail: guram@iam.dvo.ru

**Радченкова Татьяна Вадимовна** – инженер-исследователь, Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, ул. Радио, 7, Владивосток, Российская Федерация, 690041, e-mail: tarad@yandex.ru

### About the authors

**Gurami Sh. Tsitsiashvili**, Chief Researcher, Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Division, Russian Academy of Sciences, 7 Radio st., 690041, Vladivostok, Russian Federation, e-mail: guram@iam.dvo.ru

**Tatiana V. Radchenkova**, Research Engineer, Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Division, Russian Academy of Sciences, 7 Radio st., 690041, Vladivostok, Russian Federation, e-mail: tarad@yandex.ru.

### Вклад авторов в статью

**Цициашвили Г.Ш.** – разработка модели объекта в реальных условиях эксплуатации и проведено аналитическое исследование модели

**Радченкова Т.В.** – проведение исследования модели в вычислительном эксперименте

### Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.