Ткачев О.А.

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ СЕТЕЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ИДЕНТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предлагаются аналитические модели, которые позволяют получить выражения для определения показателей надежности сетей, состоящих из идентичных элементов. Для сетей, состоящих из восстанавливаемых элементов, в качестве показателей надежности рассматриваются: среднее время работы до отказа и среднее время восстановления в стационарном режиме работы. При оценке надежности сетей, состоящих из невосстанавливаемых элементов, таким показателем является среднее времени работы до отказа.

Ключевые слова: *Показатели надежности сети, марковские процессы, среднее время работы до отказа, среднее время восстановления.*

Введение

Многие современные технические системы имеют сетевую структуру. В качестве примера можно привести телекоммуникационные, энергетические и транспортные системы. При проектировании подобных систем большое внимание уделяют обеспечению высокого уровня надежности.

Надежность сети зависит от целого ряда факторов: надежности элементов, топологии, используемых алгоритмов управления. В данной работе предлагается методика оценки показателей надежности сети по ее топологии.

При анализе надежности сетей представляет значительный интерес определение значений показателей, характеризующих динамику изменения состояний сети. Для сетей, состоящих из восстанавливаемых элементов, такими показателями являются среднее время работы до отказа и среднее время восстановления в стационарном режиме работы. При оценке надежности сетей, состоящих из невосстанавливаемых элементов, таким показателем является среднее время работы до отказа.

Эти показатели надежности сети могут быть определены, если процесс изменения состояний сети представить в виде марковского процесса, состояния которого характеризуются числом отказавших элементов и состоянием сети.

Простейшим критерием работоспособности сети является связность. Сеть является связной, если между любой парой узлов имеется хотя бы один путь.

В рассматриваемых примерах в качестве критерия работоспособности будет использована связность сети, однако полученные выражения справедливы и при использовании других критериев работоспособности сети.

Модель надежности сети, состоящей из идентичных восстанавливаемых элементов

Сети относятся к классу систем со сложной структурой. Характерным свойством таких систем является то, что при определенном числе отказавших элементов система может находиться как в работоспособном состоянии, так и в состоянии отказа. Например, о сети, представленной на рис.1, нельзя точно сказать, будет ли она связной, если удалить два или три ребра.

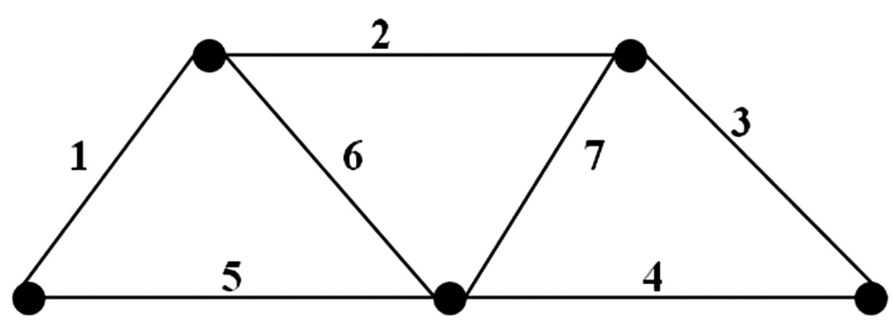

Рис.1. Пример сети

В качестве основного параметра, который позволит нам определить рассматриваемые показатели надежности сети, будем использовать число сечений мощности i. Обозначим этот параметр **Yi**.

Определим значения $\mathbf{Y_i}$ для сети, представленной на рис. 1. Так как рассматриваемая сеть двухсвязная, то удаление одного ребра не может нарушить ее связность, следовательно, $Y_1 = \mathbf{0}$. Для определения значений $\mathbf{Y_2}$ и $\mathbf{Y_3}$ рассмотрим все возможные состояния сети при удалении 2 и 3 ребер соответственно.

В результате анализа сети представленной на рис. 1 можно определить, что в рассматриваемой сети имеется 2 сечения мощности 2 и 14 сечений мощности 3, следовательно, $\mathbf{Y_2}=2$, $\mathbf{Y_3}=14$. Любая комбинация из i ребер при i>3 будет являться сечением.

Зная значения $\mathbf{Y_i}$ можно определить значения вероятности того, что при отказе i ребер окажется несвязной. Обозначим этот показатель $\mathbf{Z_i}$.

Значение $\mathbf{Z_i}$ равно отношению $\mathbf{Y_i}$ к общему числу возможных комбинаций i элементов из n*,* где n— число ребер в сети

$$Z_i = \frac{Y_i}{\binom{n}{i}}. \qquad (1)$$

Рассмотрим марковский процесс, описывающий изменение состояний сети при отказе и восстановлении ее ребер. Каждое состояние процесса характеризуется определенной комбинацией отказавших ребер и состоянием сети (связна, несвязна).

Обозначим ***(i')*** связные состояния, и ***(i")*** несвязные состояние сети при ***i*** отказавших ребрах.

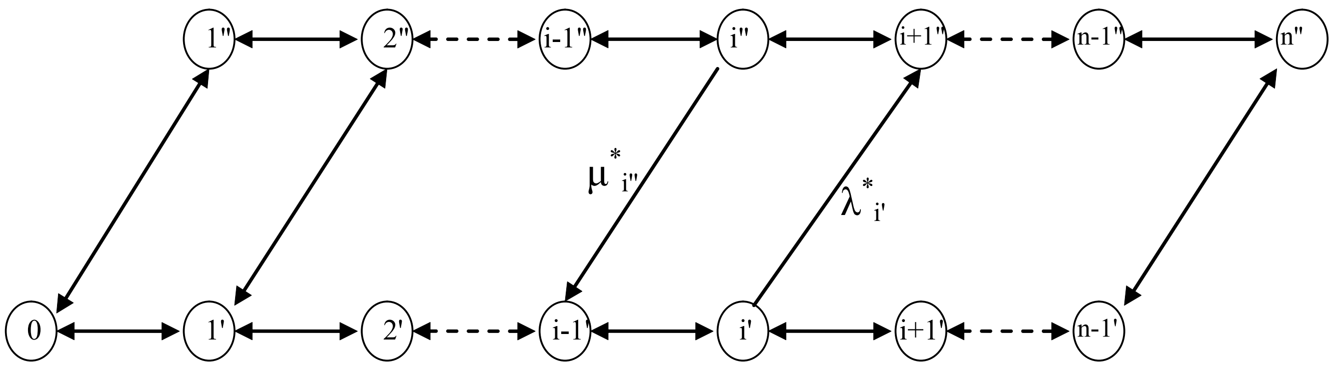

Рис. 2. Марковский процесс изменения состояний сети

Обозначим $\boldsymbol{E_+}$ множество связных состояний сети, $\boldsymbol{E_-}$ множество несвязных состояний сети.

В [1] показано, что среднее время пребывания марковского процесса на множестве состояний $\boldsymbol{E_+}$ до первого перехода в одно из состояний множества $\boldsymbol{E_-}$ может быть определено из выражения (2).

$$T_{E_+} = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_{i'}}{\sum_{i=0}^{n} P_{i'} \lambda^*_{i'}} . \tag{2}$$

Среднее время пребывания процесса на множестве несвязных состояний $\boldsymbol{E_-}$ до первого перехода в одно из состояний множества $\boldsymbol{E_+}$ может быть определено из выражения (3).

$$T_{E_-} = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_{i''}}{\sum_{i=0}^{n} P_{i''} \mu^*_{i''}} , \tag{3}$$

где $P_{i'}$, $P_{i''}$ — вероятности состояний;

$\lambda^*_{i'}$ — интенсивность перехода из состояния (i') в состояние $(i+1)''$;

$\mu^*_{i''}$ — интенсивность перехода из состояния (i'') в состояние $(i-1)'$.

Суммарная интенсивность отказов ребер в состоянии ***i*** равна ***(n -i)λ***, суммарная интенсивность восстановлений – ***iμ;*** следовательно

$$\lambda^*_{i'} = (n-i)\lambda Z^*_i \tag{4}$$

$$\mu^*_{i''} = i\mu Z^{**}_i , \tag{5}$$

где Z^*_i — вероятность того, что при отказе одного ребра сеть из связного состояния (i') перейдет в несвязное состояние $(i+1)''$;

Z^{**}_i — вероятность того, что при восстановлении одного ребра сеть из несвязного состояния (i'') перейдет в связное состояние $(i-1)'$.

Взаимосвязь значений $\mathbf{Z^*_i}$, $\mathbf{Z^{**}_i}$ и $\mathbf{Z_i}$ была установлена в работе [2].

Значения Z^*_i и Z^{**}_i могут быть определены из выражений (6) и (7) соответственно

$$Z_i^* = \frac{Z_{i+1} - Z_i}{1 - Z_i} \tag{6}$$

$$Z_i^{**} = \frac{Z_{i-1}}{Z_i}. \tag{7}$$

Подставив значения $\lambda^*_{i'}$ и $\mu^*_{i''}$ из выражений (4) и (5) в выражения (2) и (3) соответственно, получим:

$$T_{E_+} = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_{i'}}{\lambda \sum_{i=0}^{n} P_{i'} (n-i) Z_i^*} \tag{8}$$

$$T_{E_-} = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_{i''}}{\mu \sum_{i=0}^{n} i P_{i''} (1 - Z_i^{**})}. \tag{9}$$

Значения $P_{i'}$, $P_{i''}$ могут быть определены следующим образом.

Так как все ребра идентичны по надежности, то все состояния с i отказавшими ребрами равновероятны. Вероятность того, что в сети в состоянии отказа будет находиться $\boldsymbol{i}$ ребер, равна

$$P_i = \frac{(\lambda / \mu)^i \binom{n}{i}}{(1 + \lambda / \mu)^n} \tag{10}$$

из определения $\boldsymbol{Z_i}$ следует:

$$P_{i'} = (1 - Z_i) P_i \tag{11}$$

$$P_{i''} = Z_i P_i. \tag{12}$$

Вероятность пребывания сети в связном состоянии в произвольный момент времени:

$$R = \sum_{i=0}^{n} P_{i'}. \tag{13}$$

Значение R может быть так же определено из выражения:

$$R = \frac{T_{E_+}}{T_{E_+} + T_{E_-}} \tag{14}$$

Таблица 1. Значения $Y_i, Z_i, Z_i^*, Z_i^{**}$ для сети на рис. 1

i		Yi	Zi	Z*i	Z**i
0	1	0	0	0	0
1	7	0	0	0,095238	0
2	1	2	0,095238	0,336842	0
3	5	4	0,4	1	0,238095
4	5	5	1	0	0,4
5	1	1	1	0	1
6	7	7	1	0	1
7	1	1	1	0	1

Подставляя значения $Y_i, Z_i, Z_i^*, Z_i^{**}$ из табл.1 в выражения (8), (9), (14) при λ=0,1 (1/час) и μ= 1(1/час) получим следующие значения рассматриваемых показателей надежности.

$T_{E_+} = 23{,}769$ час.

$T_{E_-} = 0{,}469$ час.

$R = 0{,}980645$

Приближенные оценки показателей надежности

Исследуя пределы полученных выражений при ***λ/μ →0,*** [3], можно получить приближенные оценки рассматриваемых показателей надежности

$$T_{E_+} = \frac{1}{\lambda(\lambda/\mu)^{s-1} * S * Y_s} \tag{15}$$

$$T_{E_-} = \frac{1}{s * \mu}. \tag{16}$$

Для сети на рис. 1 s=2, Y_s=2

Подставляя эти значения в выражения 14,15,16 при λ=0,1 (1/час) и μ= 1(1/час) получим

$T_{E_+} = 25$ час.

$T_{E_-} = 0{,}5$ час.

$R = 0{,}980392$

Сравнение с известными результатами

В целях проверки полученных выражений определим значения рассматриваемых показателей надежности системы на рис. 3, для которой известны аналитические оценки.

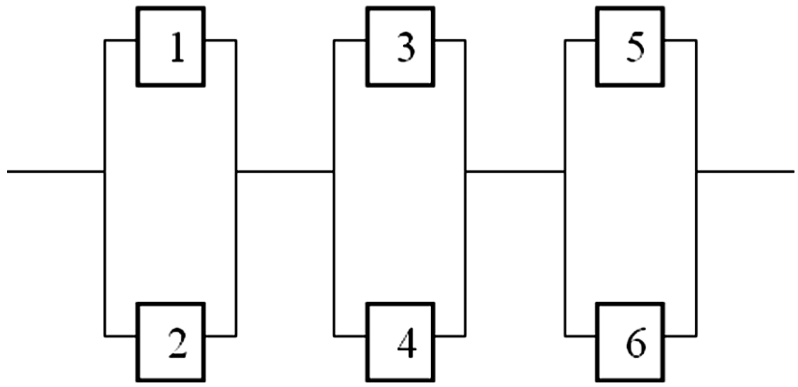

Рис. 3. Последовательно–параллельная система

В [4] можно найти следующие выражения.

Для s параллельно соединенных идентичных элементов с параметрами λ, μ

$$t_{E_+} = \frac{1}{s*\mu}\left[\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^S - 1\right]$$

$$t_{E_-} = \frac{1}{s*\mu}$$

$$r = \frac{t_{E_+}}{t_{E_+} + t_{E_-}}.$$

Для k одинаковых, последовательно соединенных восстанавливаемых подсистем

$$T_{E_+} = \frac{1}{k*(1/t_{E_+})}$$

$$R = r^k$$

$$T_{E_-} = T_{E_+}\frac{1-R}{R}.$$

Подставляя в эти выражения s=2, k=3, λ=0,1(1/час.), μ=1 (1/час.), получим

$T_{E_+} = 20{,}000$ час.
$R = 0{,}975411$
$T_{E_-} = 0{,}504$ час.

Для определения этих показателей надежности с использованием выражений (8), (9), (14), необходимо определить значения Yi и Zi.

Очевидно, что Y_1=0 и Z_1=0,0. При отказе 2 элементов существуют три комбинации, приводящие к несвязности (неработоспособности) системы (1,2), (3,4), (5,6). Всего возможных комбинаций 15, следовательно, Y_2=3 и Z_2=3/15. Для определения Y_3 и Z_3, рассмотрим все возможные комбинации из 3 элементов, табл. 2. Из результатов, приведенных в табл.1 следует, что Y_3=12 и Z_3=12/20. При отказе 4 и более элементов система будет несвязна, следовательно, $Z_4 = Z_5 = Z_6$=1

Таблица 2. Состояния системы на рис. 3 при отказе 3 элементов

1	23	-	1	34	-
2	24	-	2	35	+
3	25	-	3	36	+
4	26	-	4	45	+
5	34	-	5	46	+
6	35	+	6	56	-
7	36	+	7	45	-
8	45	+	8	46	-
9	46	+	9	56	-
0	56	-	0	56	-

Таблица 3. Результаты расчета характеристик системы на рис. 3

i		Pi	Yi	Zi	*i	Z**i	Qi	Ri
0	1	0,5644739301	0	0	0	0	0,0000000000	0,5644739301
1	6	0,3386843580	0	0	0,2	0	0,0000000000	0,3386843580
2	15	0,0846710895	3	0,2	0,5	0	0,0169342179	0,0677368716
3	20	0,0112894786	12	0,6	1	0,33333	0,0067736872	0,0045157914
4	15	0,0008467109	15	1	0	0,6	0,0008467109	0,0000000000
5	6	0,0000338684	6	1	0	1	0,0000338684	0,0000000000
6	1	0,0000005645	1	1	0	1	0,0000005645	0,0000000000

Результаты остальных расчетов приведены в табл. 3. Подставляя данные из табл. 3 в выражения (26), (27), (37), получим:

$T_{E_+} = 20{,}000$ час.

$R = 0{,}975411$

$T_{E_-} = 0{,}504$ час.

Пример анализа надежности сети состоящей из идентичных восстанавливаемых элементов.

Обозначим **m** число узлов, **n** – число ребер. Следует обратить внимание на то, что для каждой пары значений **n**, **m** существует топология, обеспечивающая максимальный уровень надежности.

Для определения таких топологий были использованы алгоритмы, предложенные Г.Т. Артамоновым в работе [5].

Сеть с параметрами m=20, n=24.

Для достижения максимальной надежности нужно найти сеть минимального диаметра с количеством узлов 2*(n-m) имеющих степень 3, и равномерно распределить узлы степени 2 по ребрам этой сети. В результате будет получена сеть, представленная на рис. 4. Значения Y_i этой сети могут быть определены путем полного перебора всех возможных состояний. Результаты расчетов представлены в табл. 4а и табл. 4б.

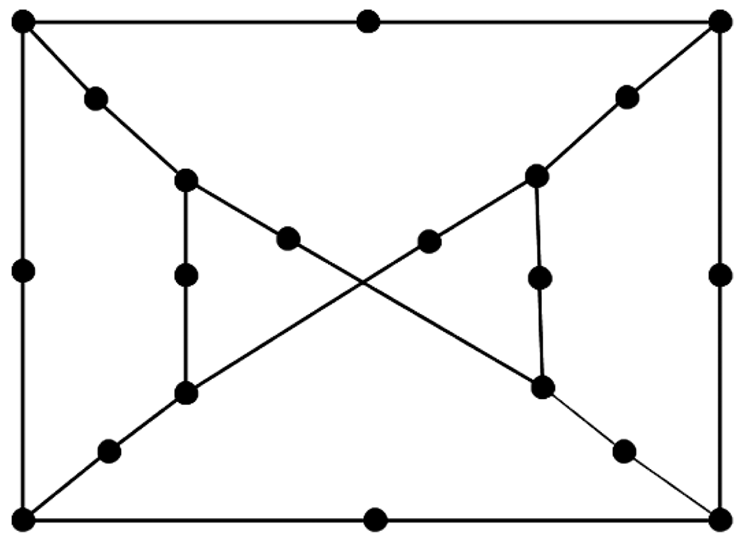

Рис. 4. Сеть с параметрами m=20, n=24

Таблица 4а. Значения Y_i и Z_i для сети на рис. 4

i	1	2	3	4	5	i>=6
Y_i	0	12	328	4082	29960	
Z_i	0	0,043478	0,162055	0,384252	0,704875	1

Таблица 4б. Значения T_{E+}, T_{E-}, R сети на рис. 4

λ	T_{E+}	T_{E-}	R
0,1	2,13	0,3334	0,864576
0,01	390,86	0,4845	0,998762
0,001	41415,64	0,4986	0,999988

Использование других критериев работоспособности и моделей надежности сети

До данного момента мы использовали в качестве критерия работоспособности связность всех узлов сети. Однако уместно задать вопрос: является ли отказом потеря связи с одним из узлов? Если мы считаем допустимой потерю связности с h-узлами, то можно использовать следующий критерий работоспособности сети: сеть считается работоспособной, если число связных узлов ≥ **m-h**. Данный критерий работоспособности сети рассматривался в работе [6].

Полученные результаты можно использовать и в этом случае, только необходимо внести соответствующие изменения в алгоритм определения значений Yi. В табл. 5 приведены значения $\mathbf{T_{E+}}$ и $\boldsymbol{R}$, при различных значениях h, для сети представленной на рис. 4.

Таблица 5. Значения T_{E+}, R при различных значениях h для сети на рис.4 (λ=0,01; μ=1)

h	T_{E+}	R
1	5780,49	0,999943591
2	9843,50	0,999967012
3	31455,53	0,999990157

Можно ослабить ограничение на равнонадежность ребер. Каждое ребро можно представить в виде последовательного соединения определенного количества равнонадежных элементов. При этом в структуру сети вводятся фиктивные узлы. После таких преобразований определяются значения $\mathbf{Z}_i$. Если отказал один из элементов, составляющих ребро, то это ребро удаляется из сети. Связность сети проверяется без учета фиктивных узлов.

Следует обратить внимание на то, что полученные результаты можно использовать в том случае, когда отказывают узлы, а ребра абсолютно надежны. Отказ узла можно промоделировать удалением всех ребер, исходящих из этого узла.

Данный метод анализа надежности сетей можно использовать и в тех случаях, когда работоспособными считаются только те состояния, при которых величина определенных параметров сети, например, время передачи или пропускная способность, будут удовлетворять заданным значениям.

Для сетей большой размерности статистическую оценку значений $\boldsymbol{Z_i}$ можно определить, используя метод Монте-Карло. Генерируется случайная комбинация из i отказавших элементов, после этого проверяется работоспособность сети. Отношение количества испытаний, при которых сеть окажется неработоспособной, к общему числу испытаний будет являться статистической оценкой $\boldsymbol{Z_i}$.

Однако следует учитывать то, что для достижения высокой точности статистической оценки $\boldsymbol{Z_i}$, количество испытаний должно быть достаточно велико (10^5-10^6).

Модель надежности сети состоящей из идентичных невосстанавливаемых элементов

Будем предполагать, что узлы сети абсолютно надежны, а ребра идентичны по надежности, отказывают независимо друг от друга и имеют экспоненциальное распределение времени работы до отказа.

Рассмотрим цепь Маркова, описывающую изменение состояний сети в моменты отказа ее элементов.

Если при наличии ***i-1*** отказавших элементов сеть была работоспособна, то при отказе i-го элемента она с вероятностью $\mathbf{Z^*_i}$ переходит в неработоспособное состояние, или с вероятностью $\mathbf{1- Z^*_i}$ останется в работоспособном состоянии.

Если при наличии ***i-1*** отказавших элементов сеть была неработоспособна, то при отказе ***i***-го элемента она с вероятностью 1 останется в неработоспособном состоянии.

Диаграмма переходов рассматриваемого процесса показана на рис. 5. Состояния ***i'*** соответствуют работоспособным состояниям сети, а состояния ***i"*** соответствуют неработоспособным состояниям сети при отказе ***i*** элементов.

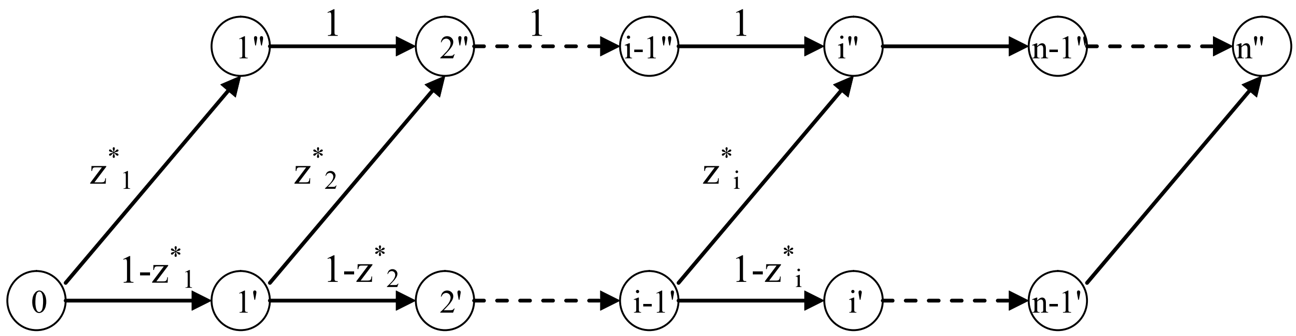

Рис. 5. Диаграмма изменения состояний сети

Введем обозначения $Q_{i'}$ – вероятность работоспособного состояния, а $Q_{i''}$ –вероятность неработоспособного состояния сети при отказе ***i*** элементов. Из определения $\mathbf{Z}_i$ следует

$$Q_{i'} = 1 - Z_i \tag{17}$$

$$Q_{i''} = Z_i . \tag{18}$$

В соответствии с диаграммой изменения состояний сети на рис. 5 можно записать

$$Q_{i'} = Q_{(i-1)'}(1 - Z^*{}_i) \tag{19}$$

откуда

$$Z^*{}_i = \frac{Q_{(i-1)'} - Q_{(i)'}}{Q_{(i-1)'}} . \tag{20}$$

Подставляя в (20) значения $Q_{i'}$ и $Q_{i''}$ из (17) и (18), получим

$$Z^*{}_i = \frac{Z_i - Z_{i-1}}{1 - Z_{i-1}} . \tag{21}$$

Кроме того, из выражения (19) следует

$$Q_{i'} = \prod_{j=1}^{i} 1 - Z^*{}_j = 1 - Z_i . \tag{22}$$

Для определения среднего времени работы до отказа рассмотрим непрерывный марковский процесс, описывающий поведение системы во времени. Состояния процесса задаются числом отказавших элементов и состоянием сети [7]. Диаграмма изменений состояний этого процесса показана на рис. 6.

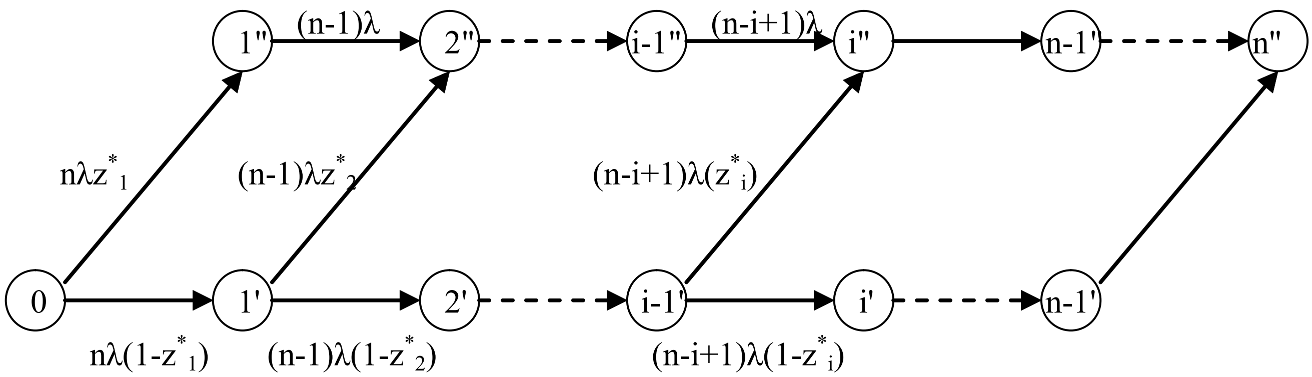

Рис. 6. Марковский процесс изменения состояний сети

Обозначим интенсивность отказов элементов λ. Пусть в некоторый момент времени имеется ***i*** отказавших элементов и сеть при этом работоспособна. За бесконечно малый промежуток времени Δt может произойти одно из следующих событий:

- Сеть останется в работоспособном состоянии. Вероятность этого события **(1-(n-i)λ Δt);**
- Откажет еще один элемент и сеть перейдет в неработоспособное состояние. Вероятность этого события **(1-(n-i)λ Z^*_{i+1} Δt);**
- Откажет еще один элемент, но сеть останется в работоспособном состоянии. Вероятность этого события **(1-(n-i)λ $(1-Z^*_{i+1})$ Δt).**

В целях упрощения аналитических выкладок множество неработоспособных состояний заменим одним поглощающим состоянием (рис. 7).

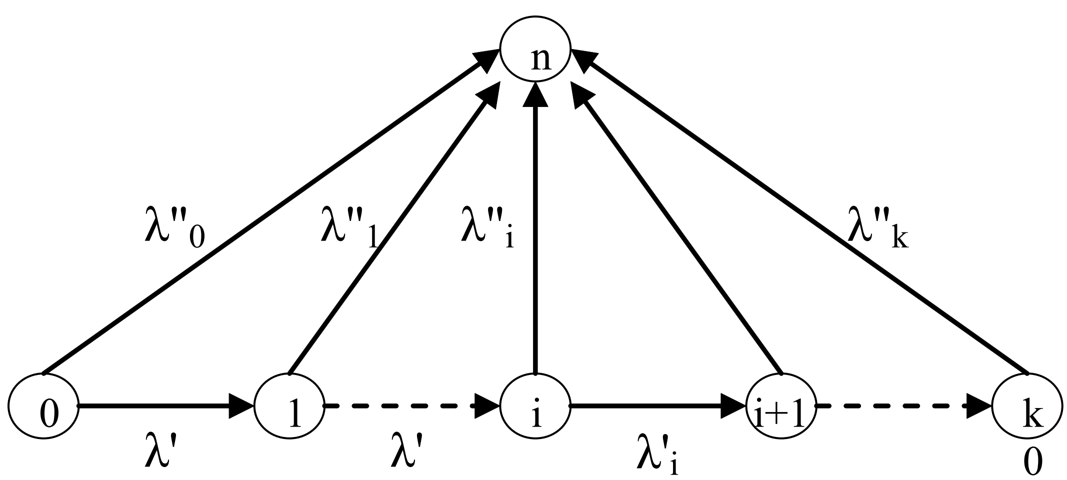

Рис. 7. Марковский процесс изменения состояний сети с поглощающим состоянием

Вероятности пребывания процесса в различных состояниях в произвольный момент времени **$P_i(t)$** могут быть найдены путем решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = -\lambda_0^{'} P_0(t) - \lambda_0^{''} P_0(t) = -\lambda_0 P_0(t)$$

$$\frac{\partial P_i(t)}{\partial t} = \lambda_{i-1}^{'} P_{i-1}(t) - \lambda_i^{'} P_i(t) - \lambda_i^{''} P_i(t) = \lambda_{i-1}^{'} P_{i-1}(t) - \lambda_i P_i(t) \qquad (23)$$

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i^{"} P_i(t)$$

Здесь

$\lambda_i=(n-i)\lambda$

$\lambda'_i=(1- Z^*_{i+1})\ \lambda_i$

$\lambda''_i=Z^*_{i+1}\ \lambda_i$

k – максимальное число элементов, после отказа которых сеть может быть работоспособна.

Решим систему дифференциальных уравнений (23), используя преобразование Лапласа, при начальных условиях $P_0(0)=1$, $P_i(0)=0\ \ \forall i \neq 0$.

Введем обозначение

$$F(s) = \int_0^\infty P(t) e^{-st} \partial t$$

Тогда система дифференциальных уравнений (23) приводится к системе алгебраических уравнений относительно F(s).

$$sF_0(s) = 1 - \lambda_0 F_0(s)$$

$$sF_i(s) = \lambda'_{i-1} F_{i-1}(s) - \lambda_i F_i(s) \qquad (24)$$

$$sF_n(s) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i^{"} F_i(s)$$

Откуда имеем

$$F_0(s) = \frac{1}{s+\lambda_0}$$

$$F_i(s) = \frac{\lambda'_{i-1}}{s+\lambda_i} F_{i-1}(s) \qquad (25)$$

$$F_n(s) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{k} \lambda_i^{"} F_i(s)\ .$$

Это решение позволяет получить выражение для среднего времени работы до отказа

$$T = \sum_{i=0}^{k} F_i(s) \Big| s = 0\ . \qquad (26)$$

Раскрывая (25), получим

$$F_0(0)=\frac{1}{\lambda_0}=\frac{1}{n\lambda} \qquad (27)$$

$$F_i(0)=\frac{\lambda'_{i-1}}{\lambda_i}F_{i-1}(0)=\frac{\prod_{j=1}^{i}(1-Z_j^*)}{(n-i)\lambda}. \qquad (28)$$

Используя (22), выражение (28) можно упростить

$$F_i(0)=\frac{\prod_{j=1}^{i}(1-Z_j^*)}{(n-i)\lambda}=\frac{1-Z_i}{(n-i)\lambda}. \qquad (29)$$

Тогда из (26) следует

$$T=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{(1-Z_i)}{n-i}. \qquad (30)$$

Выражение (30) позволяет определить значение среднего времени работы до отказа по известным значениям $\boldsymbol{Z_i}$ и λ.

Определим значение T для сети, представленной на рис. 1 при λ=0,01 (1/час)

$$T=100\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\left(\frac{19}{21}\right)\frac{1}{5}+\left(\frac{21}{35}\right)\frac{1}{4}\right)=100*\frac{269}{420}\approx 64,047(\textit{час.})$$

Сравнение с известными результатами

В целях проверки полученного выражения определим среднее время работы до отказа системы, для которой известны аналитические оценки (рис. 3).

В [4] можно найти следующие выражения.

Вероятность безотказной работы системы из 2-х параллельно соединенных идентичных элементов

$$P_{(t)}=1-(1-e^{-\lambda t})^2=2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}.$$

Вероятность безотказной работы системы состоящей из 3-х одинаковых, последовательно соединенных подсистем

$$P_{\tilde{n}(t)}=(P_{(t)})^3$$

$$P_{\tilde{n}(t)}=(2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t})^3=\ 8e^{-3\lambda t}-12e^{-4\lambda t}+6e^{-5\lambda t}-e^{-6\lambda t}.$$

Среднее время работы системы до отказа равно

$$T = \int_0^\infty P_{\tilde{n}(t)} \partial t = \frac{1}{\lambda}(\frac{8}{3} - \frac{12}{4} + \frac{6}{5} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{\lambda}(\frac{42}{60}) = 0,7\frac{1}{\lambda}.$$

Для определения среднего времени до отказа с использованием выражения (30), необходимо определить значения и Z_i. Для рассматриваемой системы они равны: Z_1=0,0; Z_2=3/15; Z_3=12/20; $Z_4 = Z_5 = Z_6$=1.

Подставляя эти значения в выражение (30), получаем

$$T = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + (\frac{12}{15})\frac{1}{4} + (\frac{8}{20})\frac{1}{3}) = \frac{1}{\lambda}(\frac{42}{60}) = 0,7\frac{1}{\lambda}.$$

Данный пример также показывает, что предлагаемый метод можно использовать для определения среднего времени работы до отказа сложных последовательно-параллельных систем, состоящих из идентичных невосстанавливаемых элементов.

Пример анализа надежности сети состоящей из идентичных невосстанавливаемых элементов

Обозначим **m** – число узлов, **n** – число ребер. Рассмотрим сеть с параметрами m=20, n=24, (рис. 4). Значения **Zi** этой сети могут быть определены путем полного перебора всех возможных состояний.

Предлагаемый метод можно использовать при других критериях работоспособности сети. Например, сеть считается работоспособной, если число связных узлов **>= m-h.** Полученные результаты можно использовать и в этом случае, только необходимо внести соответствующие изменения в алгоритм определения значений $\mathbf{Z_i}$. В табл. 6 приведены значения $\mathbf{Z_i}$ при различных значениях h для сети, представленной на рис. 4. Определение значений $\mathbf{Z_i}$ при k>0 осуществлялось методом Монте-Карло. Количество испытаний составляло 10^6.

Таблица 6. Значения $\mathbf{Z_i}$ при различных значениях h для сети на рис. 4

i/h	0	2	4	6	8	10
1	0,0000000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,0434783	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3	0,1620553	0,01581	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
4	0,3841521	0,07980	0,01498	0,00435	0,00296	0,00000
5	0,7048748	0,25247	0,08813	0,03329	0,01644	0,00000
6	1,0000000	0,56194	0,27850	0,13070	0,05976	0,00324
7	1,0000000	0,86648	0,56942	0,33252	0,17912	0,04445
8	1,0000000	1,00000	0,82642	0,58123	0,36764	0,16783
9	1,0000000	1,00000	0,96544	0,79849	0,57894	0,34029

10	1,0000000	1,00000	1,00000	0,93211	0,76173	0,52593
11	1,0000000	1,00000	1,00000	0,98807	0,89262	0,69336
12	1,0000000	1,00000	1,00000	1,00000	0,96470	0,82566
13	1,0000000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99360	0,91743
14	1,0000000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,97046
15	1,0000000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,99403
α	0,214850615	0,29501	0,354027	0,411813	0,476755	0,571528

$$\alpha = \sum_{i=0}^{k} \frac{(1 - Z_i)}{n - i}$$

$$T = \alpha * \lambda$$

Заключение

Получены аналитические выражения для определения значений показателей надежности сетей, состоящих из идентичных элементов, которые имеют экспоненциальное распределение времени работы до отказа и времени восстановления. При этом можно считать абсолютно надежными как узлы, так и ребра сети. Достоверность полученного результата подтверждается путем расчета показателей надежности последовательно–параллельной системы, для которой известны аналитические оценки.

Литература

1. Вопросы математической теории надежности. Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко, А.Д. Соловьев, И.А. Ушаков./Под ред. Б.В.Гнеденко, М., Радио и связь, 1983. -367стр. с илл.

2. **Ткачев О.А.** Использование цепей Маркова для анализа надежности систем со сложной структурой. Кибернетика, №5 1983, стр. 95-101.

3. **Ткачев О.А.** Анализ надежности сетей передачи данных. – Труды международной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: теория и приложения « (DCCN-2010) ISBN 978-5-9901871-2-2, Россия, Москва, 2010, стр.276-283.

4. Математические методы в теории надежности. Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. М.: Наука, 1965. – 524 стр. с илл.

5. Теория проектирования вычислительных машин, систем и сетей: Учебное пособие/В.И.Матов, Г.Т.Артамонов, О.М. Брехов и др.; Под ред. В.И.Матова. –М.: Изд-во МАИ, 1999. -460с.

6. **Tkachev O.** Analytical estimation of reliability of networks consisting of identical elements. Reliability – Theory & Application, ISSN 1932-2321, №2(21) 2011, p.9-20.

7. **Tkachev O.** Determination of mean time to failure of a network consisting of identical non-repairable elements. Reliability – Theory & Application, ISSN 1932-2321, №3(22) 2011, p. 43-46.