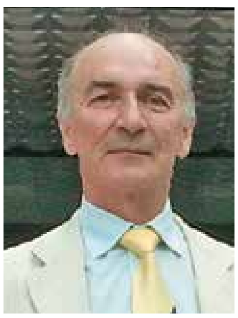
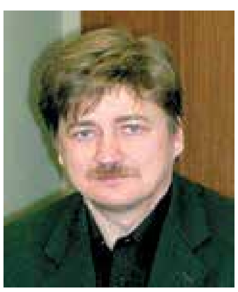
Оригинальная статья
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-2-39-48

Об одной задаче расчета комплекта запасных элементов, имеющих отказы двух типов

On a problem of calculating a set of spare parts that have two types of failures

Антонов А.В.[1], **Чепурко В.А.**[2*]
Antonov A.V.[1], **Chepurko V.A.**[2*]
[1]АНО ДПО Техническая академия Росатома, Обнинск, Российская Федерация, [2]АО РАСУ, Москва, Российская Федерация
[1]Rosatom Technical Academy, Obninsk, Russian Federation, [2]JSC RASU, Moscow, Russian Federation
**VAChepurko@rasu.ru*


Антонов А.В.


Чепурко В.А.

Резюме. Цель. *Цель данной работы, являющейся продолжением [24], состоит в построении алгоритма, позволяющего найти необходимое количество запасных изделий (ЗИП) для сложной системы, элементы которой могут быть как ремонтопригодными, так и неремонтопригодными. В отличие от работы [24], в качестве обобщения, в статье вводятся дополнительные неработоспособные состояния. Эти состояния характеризуются простоями системы, связанными с заменой отказавшего элемента элементом из состава ЗИП. Если время замены отказавшего элемента не является пренебрежимо малой величиной по отношению к другим временным показателям обслуживаемой системы, то возникает необходимость в предлагаемом учете дополнительных неработоспособных состояний.* **Методы.** *Используются Марковские модели для описания исследуемой технической системы. Выведена система уравнений Колмогорова для получения финальных вероятностей. Получено стационарное решение системы уравнений Колмогорова. Применяются классические методы теории вероятностей и математической теории надежности, некоторые специальные функции.* **Выводы.** *В статье формализуется задача определения необходимого количества ЗИП для системы с объектами, которые могут отказать в случайный момент времени. При этом отказы могут быть двух типов. Первый тип отказов приводит объект в неработоспособное ремонтопригодное состояние. В этом случае восстановление объекта возможно в ремонтном подразделении предприятия, на котором объект эксплуатируется. Второй тип отказов, более катастрофичный, приводит объект в неработоспособное неремонтопригодное состояние и его восстановление возможно только на предприятии изготовителе или на специализированных ремонтных предприятиях. Для соответствующего процесса гибели и размножения построен Марковский граф. Формализованы уравнения для характерных состояний Марковского графа. Индукционно найдено стационарное решение системы уравнений Колмогорова. Доказана теорема об общем решении для всех состояний Марковского графа. В случае неограниченного восстановления решение значительно упрощается. Показано, что в предположении неограниченного восстановления и мгновенно производимых замен решение совпадает с решением, полученным ранее в упрощенном случае в работе [24]. Найдены предельные значения вероятностей неработоспособных критических и некритических состояний. Они позволяют сделать вывод о том, что в случае неограниченного восстановления увеличение объема ЗИП ведет к тому, что вероятность попадания в критическое состояние нехватки ЗИП постепенно обнуляется. При этом вероятность попадания в неработоспособное состояние, связанное с занимающей определенное время заменой отказавшего оборудования аналогом из числа ЗИП, определяется стационарным коэффициентом неготовности альтернирующего процесса восстановления. Общее решение задачи позволяет формализовать критерий достаточности ЗИП. Необходимое количество ЗИП определяется путем постепенного увеличения количества ЗИП до тех пор, пока вероятность неработоспособных критических событий не станет ниже заданной вероятности нехватки ЗИП. Приведен пример нахождения необходимого количества ЗИП.*

Abstract. Aim. *The paper, that continues [24], aims to develop an algorithm that would allow finding the required number of spare items (SPTA) for a complex system, whose elements may or may not be maintainable. Unlike in [24], as a generalisation, the paper introduces additional inoperable states. Those states are characterised by system downtime associated with the replacement of a failed element with an element from the SPTA. If the time of replacement of a failed element is not a negligibly small value as compared to other time indices of the serviced system, it becomes necessary, as suggested, to account for additional inoperable states.* **Methods.** *Markov models are used for describing the technical system under consideration. The final probabilities were obtained using a developed system of Kolmogorov equations. A* *stationary solution was obtained for the system of Kolmogorov equations. Classical methods of the probability theory and mathematical theory of dependability, some special functions were used.* **Conclusions.** *The paper formalizes the problem of determining the required number of SPTAs for a system with items that may fail at a random moment in time. The failures may be of two types. The first type of failures leaves an item in an inoperable repairable state. In this case, the item can be repaired in the maintenance unit of the company that operates such item. The second type of failures, a more catastrophic one, leaves the item in an inoperable non-repairable state, and it can be repaired only by the manufacturer or a specialized maintenance company. A Markov graph was built for the respective birth and death process. Equations were formalised for typical states of the Markov graph. A stationary solution was obtained for the system of Kolmogorov equations using induction. The theorem of general solution was proven for all the states of the Markov graph. In case of unlimited repair, the solution is significantly simplified. It was shown that, on an assumption of unlimited repair and momentary replacements, the solution matches the one earlier obtained in a simplified form in [24]. The limit values of the probabilities of inoperable critical and non-critical states were found. They allow concluding that, in case of unlimited repair, the growth of the size of SPTA causes the probability of a critical state of insufficient SPTA to tend to and become zero. Additionally, the probability of an inoperable state associated with the replacement of a failed item with an equivalent from the SPTA that takes a certain time is defined by a stationary unavailability of the alternating repair process. The general solution of the problem allows formalising the SPTA sufficiency coefficient. The required number of SPTAs is identified by progressively increasing the number of SPTAs until the probability of inoperable critical states is below the defined probability of SPTA shortage. An example of finding the required number of SPTAs is given.*

Ключевые слова*: Марковский анализ, граф, состояние графа, вероятность перехода, интенсивность отказов, интенсивность восстановления, интенсивность ремонта, стационарное решение.*
Keywords: *Markov analysis, graph, graph state, transition probability, failure rate, restoration rate, repair rate, stationary solution.*

Для цитирования: *Антонов А.В., Чепурко В.А. Об одной задаче расчета комплекта запасных элементов, имеющих отказы двух типов // Надежность. 2023. №2. С. 39-48. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-2-39-48*
For citation: *Antonov A.V., Chepurko V.A. On a problem of calculating a set of spare parts that have two types of failures. Dependability 2023;2:39-48. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2023-23-2-39-48*

Поступила: *01.02.2023* / **После доработки:** *20.04.2023* / **К печати:** *15.06.2023*
Received on: *01.02.2023*/ **Revised on:** *20.04.2023* / **For printing:** *15.06.2023*

Введение

При организации эксплуатации промышленных объектов, особенно объектов повышенного риска, таких как ядерные энергетические установки, летательные аппараты, химические комплексы и т.п., предъявляются высокие требования к обеспечению безопасности их функционирования. Особую актуальность вопросы безопасности имеют в области атомной энергетики. Принципиально важным условием развития атомноэнергетической отрасли является недопущение радиационного воздействия на окружающую среду и персонал, как атомной станции (АЭС), так и прилегающих к ней районов. Предотвращение аварий является одним из главных принципов безопасности и обеспечивается в первую очередь высокой надежностью оборудования и систем АЭС. Таким образом, вопросы поддержания надежности оборудования и систем АЭС имеют особую важность. Для поддержания надежности на высоком уровне на промышленном объекте планируются специальные мероприятия. К ним относятся: проведение профилактического обслуживания оборудования и систем, контроль исправности функционирования объектов, создание комплектов запасных изделий (ЗИП) для оперативной замены вышедшего из строя оборудования.

В практике эксплуатации систем вопросы обоснования выбора состава запасных изделий, необходимых для бесперебойного функционирования оборудования, имеют первостепенное значение.

Вопросы расчета надежности оборудования с учетом ЗИП и определения его требуемого состава рассматривались в работах как российских, так и зарубежных специалистов.

Понятие запасного элемента впервые введено в 1964 году в работе [1].

Способы пополнения запасов и показатели достаточности комплектов ЗИП широко рассмотрены в работах [2, 3]. В 1970-х годах опубликованы работы [4, 5, 6], детализирующие стратегии пополнения запасов и предлагающие модели их учета при оценке характеристик комплектов ЗИП. Стратегия периодического пополнения запасов обсуждается в работе [7]. Модели функционирования ЗИП, в том числе при стратегиях периодического пополнения с экстренными доставками и пополнения по уровню, представлены в [8]. Вопросы оптимизации ЗИП рассмотрены в работе [9].

Можно констатировать, что данный вопрос не потерял своей актуальности до сих пор. Отметим некоторые работы, опубликованные уже в XXI веке. В работе [10] рассматривается метод расчета надежности систем с наличием запасных элементов. Стратегия функционирования системы предполагает, что в случае отказа элемента он заменяется резервным, а отказавший элемент поступает в ремонтный орган для восстановления. После ремонта элемент пополняет комплект ЗИП. В работе [11] решается задача оптимизации состава запасных элементов с учетом сложной стратегии их функционирования, в предположении, что отказавшее изделие подвергается ремонту. В работах [12, 13] излагается решение задачи оптимизации состава ЗИП при наличии ограничений на стоимость приобретения, доставки и хранения запасных элементов. В работах [14, 15] рассматриваются динамические модели управления составом запасных элементов на предприятии. В статьях [16, 17] решается задача оптимизации комплекта запасных элементов с учетом выработки данными элементами части ресурса. На основе методов теории восстановления решена задача расчета характеристик надежности системы в случае, когда запасные элементы могут находиться в холодном, теплом и горячем резерве. В работе [18] рассмотрена задача оптимизации комплекта ЗИП для элементов стареющего типа с учетом ограничений на стоимость запасных элементов. На основании методов теории восстановления получен коэффициент готовности системы, в состав которой входят элементы стареющего типа. В [19, 20] излагается задача расчета характеристик надежности систем, элементы которых в случае отказа заменяются работоспособными объектами из состава ЗИП, а отказавший элемент восстанавливается ремонтной бригадой и далее пополняет состав ЗИП. В данных работах учитывается старение объектов в процессе эксплуатации. В качестве модели, учитывающей старение элементов, используются геометрические процессы.

И, наконец, отметим фундаментальную работу [21], в которой приведен достаточно подробный анализ публикаций на тему расчетов надежности систем с учетом запасных элементов и расчетов необходимого количества ЗИП. Также в ней приведено описание различных моделей расчета показателей надежности с учетом ЗИП, в том числе в условиях периодического и непрерывного пополнения запасов в комплекте ЗИП, при периодическом пополнении запасов с экстренными доставками, рассмотрены вопросы оптимизации комплекта ЗИП. В данной работе также приведен достаточно подробный анализ публикаций на тему расчетов надежности систем с учетом запасных элементов, расчетов необходимого количества ЗИП. Выполнено описание различных моделей расчета показателей надежности с учетом ЗИП, в том числе в условиях периодического и непрерывного пополнения запасов в комплекте ЗИП, при периодическом пополнении запасов с экстренными доставками, рассмотрены вопросы оптимизации комплекта ЗИП. Следует также отметить, что вопросы расчета и оптимизации ЗИП представлены в соответствующих ГОСТах и РД (см., например, [22, 23]). Следует заметить, что вопрос расчета состава запасных изделий не потерял своей актуальности к настоящему времени и по-прежнему находится в поле зрения специалистов.

Постановка задачи

Рассмотрим функционирование объекта в составе сложной системы. В некоторый случайный момент времени объект может отказать. Отказ объекта приводит его в неработоспособное состояние. Будем предполагать, что отказы могут быть двух типов. Первый тип отказов приводит объект в неработоспособное ремонтопригодное состояние. Второй тип отказов, более катастрофичный, приводит объект в неработоспособное неремонтопригодное состояние.

При первом типе отказа неработоспособный, но ремонтопригодный объект заменяется на работоспособный из состава ЗИП. То есть работоспособность системы восстанавливается за счет использования объекта из состава ЗИП. Интенсивность замены отказавшего элемента известна и равна μ. Далее неработоспособный блок передается для восстановления в ремонтный орган предприятия, на котором осуществляется использование объекта. В данном подразделении объект ремонтируют и возвращают в состав ЗИП. Интенсивность ремонта равна τ_2.

При втором типе отказа на место отказавшего объекта устанавливается работоспособный блок из комплекта ЗИП. Интенсивность замены также равна μ. Неработоспособный и неремонтопригодный блок направляется установленным порядком для ремонта на предприятие-изготовитель, где его ремонтируют с интенсивностью τ_1. Естественно предположить, что интенсивность ремонта при первом типе отказа будет существенно выше, чем при втором типе. Такого типа стратегии ремонта имеют место для сложных дорогостоящих систем, используемых в ядерной энергетике. Также такие стратегии используются в ряде других отраслей, например, для электронных систем, используемых в качестве бортового оборудования на летательных аппаратах.

Требуется определить объем необходимого комплекта ЗИП таким образом, чтобы вероятность исчерпания ЗИП была не выше заданного уровня.

Построение математической модели

Для расчета необходимого количества ЗИП на предполагаемом промежутке времени будем использовать математическую модель, состоящую в том, что процесс замены осуществляется с возможностью ремонта отказавших элементов, как было описано выше.

Описанная модель соответствует случайному процессу гибели и размножения, который характеризуется графом состояний (рис. 1). Будем считать, что поток отказов подчиняется трем известным свойствам: ординарности, отсутствия последействия и стационарности. Цветом выделены критические состояния, означающие исчерпание ЗИП.

При построении модели будем использовать обозначения:

n – количество однотипных элементов в системе;

k – планируемый объем ЗИП;

λ – интенсивность отказов одного элемента;

μ – интенсивность замены отказавшего элемента;

μ_0 – интенсивность ремонта неремонтопригодного объекта на предприятии промышленности;

μ_1 – интенсивность ремонта ремонтопригодного объекта, подлежащего ремонту на данном предприятии;

q – вероятность ремонтопригодности (оценивается статистически);

c – число ремонтных бригад;

T – планируемый промежуток времени обслуживания.

Состояния Марковского графа описываются трехкомпонентным вектором (a, b, d), в котором a – состояние основного элемента (1 – работоспособное, 0 – неработоспособное), b – количество ремонтопригодных элементов, которые подлежат ремонту на данном предприятии, d – количество неремонтопригодных элементов, которые будут отремонтированы на предприятии промышленности, производящем данные объекты.

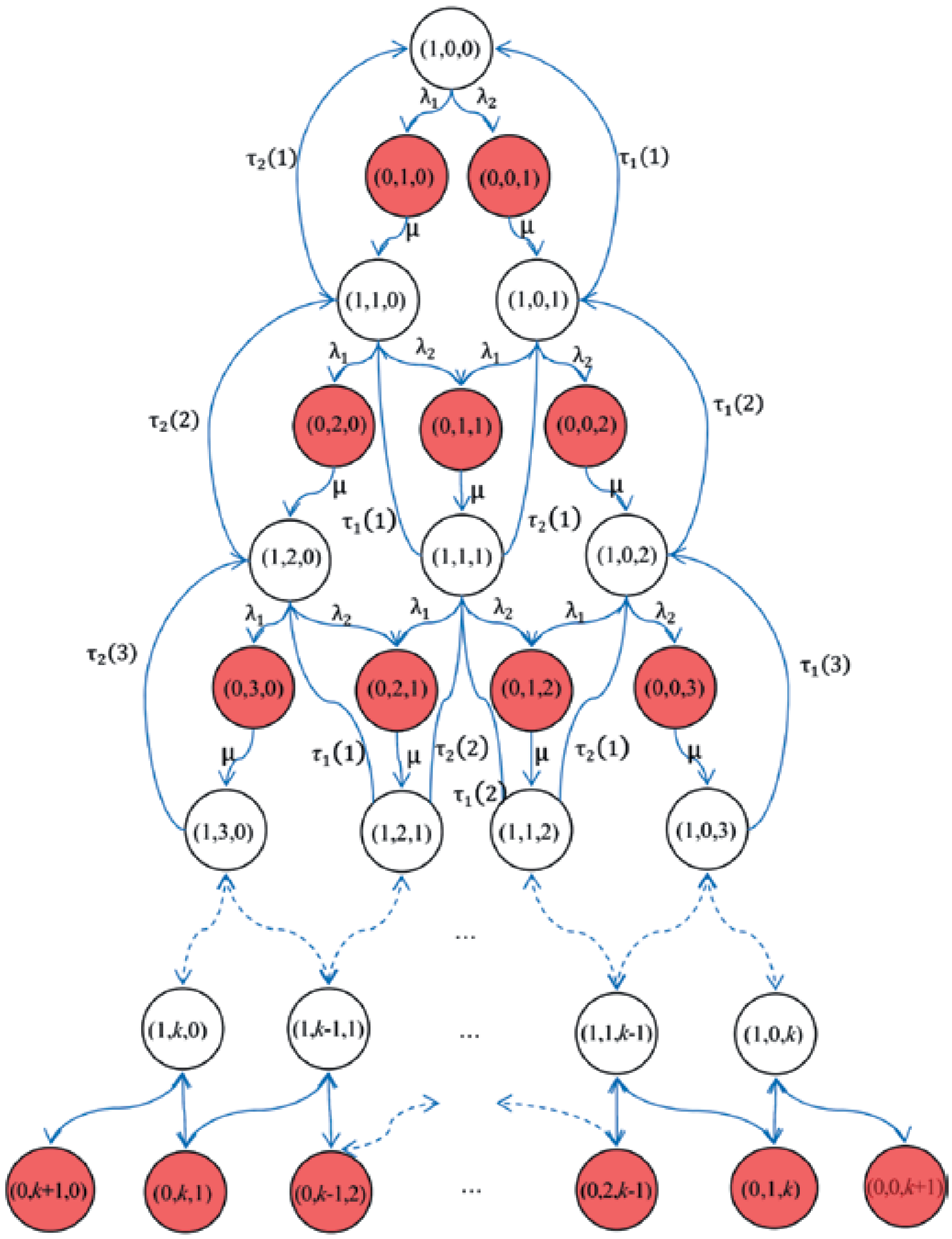


Рис. 1. Граф переходов процесса отказа, восстановления и ремонта объекта.

Определим интенсивности переходов в Марковском графе.

1. Интенсивность перехода «вниз и влево» из работоспособных состояний – $\lambda_{(1,b,d)\to(0,b+1,d)}$, происходящего в случае отказа и выявления того факта, что элемент ремонтопригоден будет определяться выражением:

$$\lambda_{(1,b,d)\to(0,b+1,d)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1\cdot R;t,\Delta t\right)}{\Delta t} = \\ = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1;t,\Delta t\right)q}{\Delta t} = n\lambda q = \lambda_1,$$

где A_1 – событие, состоящее в том, что на промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ произошел один отказ, R – событие, обозначающее ремонтопрогодность элемента.

2. Интенсивность перехода «вниз и вправо» из работоспособных состояний – $\lambda_{(1,b,d)\to(0,b,d+1)}$, происходящего в случае отказа и выявления того факта, что элемент неремонтопригоден будет определяться выражением:

$$\lambda_{(1,b,d)\to(0,b,d+1)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1\cdot \overline{R};t,\Delta t\right)}{\Delta t} = \\ = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1;t,\Delta t\right)\left(1-q\right)}{\Delta t} = n\lambda\left(1-q\right) = \lambda_2.$$

3. Интенсивность перехода «вверх и влево» из работоспособных состояний – $\lambda_{(1,b,d)\to(1,b,d-1)}$. Этот переход происходит в случае восстановления неремонтопригодного объекта на предприятии промышленности:

$$\lambda_{(1,b,d)\to(1,b,d-1)} = \begin{cases} min\left(b,c_1\right)\cdot\mu_0,\ \text{если}\, c_1 \\ \text{ремонтных бригад,} \\ b\mu_0,\ \text{если число} \\ \text{бригад неограничено.}\end{cases} = \tau_1\left(b\right), b = 1,2,\ldots.$$

4. Интенсивность перехода «вверх и вправо» из работоспособных состояний – $\lambda_{(1,b,d)\to(1.b-1,d)}$. Этот переход происходит в случае восстановления ремонтопригодного объекта подлежащего ремонту на данном предприятии:

$$\lambda_{(1,b,d)\to(1.b-1,d)} = \begin{cases} min\left(a,c_2\right)\cdot\mu_1,\ \text{если}\ c_2 \\ \text{ремонтных бригад,} \\ a\mu_1,\ \text{если число} \\ \text{бригад неограничено.}\end{cases} = \tau_2\left(a\right), a = 1,2,\ldots.$$

5. Интенсивность перехода «вниз» из неработоспособных состояний за исключением критических в последней строке вершин графа – $\lambda_{(0,b,d)\to(1.b,d)}$. Этот переход происходит в случае замены неремонтопригодного объекта из числа ЗИП:

$$\lambda_{(0,b,d)\to(1.b,d)} = \mu, b + d \le k.$$

6. Интенсивность перехода «вверх и влево» из критических состояний – $\lambda_{(0,b,d)\to(1,b,d-1)}$. Этот переход происходит в случае восстановления ремонтопригодного объекта:

$$\lambda_{(0,b,d)\to(1,b,d-1)} = \begin{cases} min\left(b,c_1\right)\cdot\mu_0,\ \text{если}\, c_1 \\ \text{ремонтных бригад,} \\ b\mu_0,\ \text{если число} \\ \text{бригад неограничено.}\end{cases} = \tau_1\left(b\right), b = 1,2,\ldots.$$

7. Интенсивность перехода «вверх и вправо» из критических состояний – $\lambda_{(0,b,d)\to(1.b-1,d)}$. Этот переход происходит в случае восстановления ремонтопригодного объекта:

$$\lambda_{(0,b,d)\to(1.b-1,d)} = \begin{cases} min\left(a,c_2\right)\cdot\mu_1,\ \text{если}\ c_2 \\ \text{ремонтных бригад,} \\ a\mu_1,\ \text{если число} \\ \text{бригад неограничено.}\end{cases} = \tau_2\left(a\right), a = 1,2,\ldots.$$

Для данной стратегии напишем систему уравнений Колмогорова для общего случая.

Уравнения для вероятностей состояний вида $(1,i,j)$, $i = 0, 1, ..., k–1, j = 0, ..., k–1$ так, что $i + j \le k–1$ определяются следующим образом:

$$P'_{1,i,j} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_1\left(j\right) + \tau_2\left(i\right)\right)P_{1,i,j} + \mu P_{0,i,j} + \\ + \tau_2\left(i+1\right)P_{1,i+1,j} + \tau_1\left(j+1\right)P_{1,i,j+1}. \quad (1)$$

Уравнения для вероятностей состояний вида $(1,i,j)$, $i = 0, 1, ..., k, j = k–i$ определяются следующим образом:

$$P'_{1,i,j} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_1\left(j\right) + \tau_2\left(i\right)\right)P_{1,i,j} + \mu P_{0,i,j} + \\ + \tau_2\left(i+1\right)P_{0,i+1,j} + \tau_1\left(j+1\right)P_{0,i,j+1}. \quad (2)$$

При этом очевидно считать, что $\tau_1\left(0\right) = \tau_2\left(0\right) = = P_{0,0,0} = P_{1,-1,j} = P_{1,i,-1} = 0, i, j \in \left\{0,1\right\}$.

Уравнения для вероятностей неработоспособных состояний вида $(0,i,j)$, $i = 0, 1, ..., k, j = 0, ..., k$ так, что $i+j\le k$ определяются следующим образом:

$$P'_{0,i,j} = -\mu P_{0,i,j} + \lambda_1 P_{1,i-1,j} + \lambda_2 P_{1,i,j-1}. \quad (3)$$

При этом очевидно считать, что $P_{0,-1,j} = P_{0,i,-1} = = 0, i, j \in \left\{0,1\right\}$.

Уравнения для вероятностей неработоспособных критических состояний вида $(0,i,j)$, $i = 0, 1, ..., k+1, j = k+1–i$ определяются следующим образом:

$$P'_{0,i,j} = -\left(\tau_1\left(j\right) + \tau_2\left(i\right)\right)P_{0,i,j} + \lambda_1 P_{1,i-1,j} + \lambda_2 P_{1,i,j-1}. \quad (4)$$

Будем искать стационарное решение системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Заметим, что $\lambda_1 + \lambda_2 = n\lambda$.

Для случая $i = 0,1,\dots,k,\ j = 0,\dots,k, i + j \le k - 1$:

$$\left(n\lambda + \tau_1(j) + \tau_2(i)\right)P_{1,i,j} = \\ = \mu P_{0,i,j} + \tau_2(i+1)P_{1,i+1,j} + \tau_1(j+1)P_{1,i,j+1}. \quad (5)$$

Для случая (1,i,j), i = 0, 1, ..., k, j = k–i:

$$\left(n\lambda + \tau_1(j) + \tau_2(i)\right)P_{1,i,j} = \\ = \mu P_{0,i,j} + \tau_2(i+1)P_{0,i+1,j} + \tau_1(j+1)P_{0,i,j+1}. \quad (6)$$

Для вероятностей состояний вида (0,i,j), i = 0, 1, ..., k, j = 0, ..., k так, что i+j≤k стационарные уравнения определяются следующим образом:

$$\mu P_{0,i,j} = \lambda_1 P_{1,i-1,j} + \lambda_2 P_{1,i,j-1}. \quad (7)$$

Для вероятностей критических состояний i = 0, 1, ..., k+1, j = k+1–i:

$$\left(\tau_1(j) + \tau_2(i)\right)P_{0,i,j} = \lambda_1 P_{1,i-1,j} + \lambda_2 P_{1,i,j-1}. \quad (8)$$

Будем искать решение по индукции.

Пусть k=0 Получаем (k+1)(k+3)=3 уравнения:

$$\begin{cases} n\lambda P_{1,0,0} = \tau_2(1)P_{1,1,0} + \tau_1(1)P_{1,0,1} \\ \tau_1(1)P_{0,0,1} = \lambda_2 P_{1,0,0} \\ \tau_2(1)P_{0,1,0} = \lambda_1 P_{1,0,0} \end{cases} \quad (9)$$

После несложных преобразований получаем:

$$P_{1,0,0} = \left(1 + \frac{\lambda_2}{\tau_1(1)} + \frac{\lambda_1}{\tau_2(1)}\right)^{-1},$$

$$P_{0,1,0} + P_{0,0,1} = 1 - P_{1,0,0} = \frac{\dfrac{\lambda_2}{\tau_1(1)} + \dfrac{\lambda_1}{\tau_2(1)}}{1 + \dfrac{\lambda_2}{\tau_1(1)} + \dfrac{\lambda_1}{\tau_2(1)}}.$$

Пусть k=1 Получаем (k+1)(k+3)=8 уравнений:

$$\begin{cases} n\lambda P_{1,0,0} = \tau_2(1)P_{1,1,0} + \tau_1(1)P_{1,0,1} \\ \left(n\lambda + \tau_1(1)\right)P_{1,0,1} = \mu P_{0,0,1} + \tau_2(1)P_{0,1,1} + \tau_1(2)P_{0,0,2} \\ \left(n\lambda + \tau_2(1)\right)P_{1,1,0} = \mu P_{0,1,0} + \tau_2(2)P_{0,2,0} + \tau_1(1)P_{0,1,1} \\ \tau_1(2)P_{0,0,2} = \lambda_2 P_{1,0,1} \\ \left(\tau_1(1) + \tau_2(1)\right)P_{0,1,1} = \lambda_1 P_{1,0,1} + \lambda_2 P_{1,1,0} \\ \tau_2(2)P_{0,2,0} = \lambda_1 P_{1,1,0} \\ \mu P_{0,0,1} = \lambda_2 P_{1,0,0} \\ \mu P_{0,1,0} = \lambda_1 P_{1,0,0} \end{cases} \quad (10)$$

По аналогии получаем решение:

$$P_{1,0,0} = \left(\begin{matrix} 1 + \dfrac{\lambda n}{\mu} + \dfrac{\lambda_1}{\tau_2(1)} + \dfrac{\lambda_2}{\tau_1(1)} + \dfrac{\lambda_1^2}{\tau_2(1)\tau_2(2)} + \\ + \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\tau_1(1)\tau_2(1)} + \dfrac{\lambda_2^2}{\tau_1(1)\tau_1(2)} \end{matrix} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Вероятность попадания в неработоспособное состояние

$$P_{0,0,2} + P_{0,1,1} + P_{0,2,0} + P_{0,0,1} + P_{0,1,0} = \\ = \left(\frac{\lambda_1^2}{\tau_2(1)\tau_2(2)} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\tau_1(1)\tau_2(1)} + \frac{\lambda_2^2}{\tau_1(1)\tau_1(2)} + \frac{\lambda n}{\mu}\right)P_{1,0,0}. \quad (12)$$

Анализируя полученный результат, формулируем следующий вывод.

Теорема. Общее решение для всех состояний, кроме неработоспособных некритических

$$P_{l,i,j} = \frac{\lambda_1^i \lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{1,0,0}, \quad (13)$$

при условии $\prod_{m=1}^{0}\tau_i(m) = 1.$

Для неработоспособных некритических состояний вероятности определяются выражением (7).

Доказательство. Подставим решение в правую часть уравнения (5) предполагая, что (0,i,j) – неработоспособные некритические состояния, т.е. i = 0, 1, ..., k, j = 0, ..., k, $i + j \le k - 1$:

$$\mu P_{0,i,j} + \tau_2(i+1)P_{1,i+1,j} + \tau_1(j+1)P_{1,i,j+1} = \lambda_1 P_{1,i-1,j} + \\ + \lambda_2 P_{1,i,j-1} + \tau_2(i+1)P_{1,i+1,j} + \tau_1(j+1)P_{1,i,j+1} = \\ = \frac{\lambda_1^i\lambda_2^j\left(\tau_1(j) + \tau_2(i) + \lambda_1 + \lambda_2\right)}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{1,0,0} = \left(n\lambda + \tau_1(j) + \tau_2(i)\right)P_{1,i,j}.$$

Предполагая, что i = 0, 1, ..., k, j = k – i и подставляя (7) в (6) получим такой же результат. Наконец, выполнимость (8) доказывается аналогично.

Упростим (7):

$$P_{0,i,j} = \frac{\tau_1(j) + \tau_2(i)}{\mu}P_{1,i,j}.$$

Из условия нормировки получаем уравнение.

$$1 = P_{1,0,0} + P_{1,0,0}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k+1-i}}{\left(\prod_{m=1}^{k+1-i}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)} + \\ + \sum_{\substack{i,j=0 \\ 1\le i+j\le k}}^{k}\left(1 + \frac{\tau_1(j) + \tau_2(i)}{\mu}\right)P_{1,i,j}. \quad (14)$$

В случае ограниченного восстановления получаем решение для $P_{1,0,0}$

$$P_{1,0,0}=\left[1+\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k+1-i}}{\left(\prod_{m=1}^{k+1-i}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}+\right.$$

$$\left.\sum_{\substack{i,j=0\\1\le i+j\le k}}^{k}\left(1+\frac{\tau_1(j)+\tau_2(i)}{\mu}\right)\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}\right]^{-1}. \quad (15)$$

Если неограниченное восстановление, то суммы в (14) можно упростить.

Первая сумма представляет собой бином Ньютона.

$$\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k+1-i}}{\left(\prod_{m=1}^{k+1-i}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}=\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}.$$

Вторая сумма вероятностей сводится к конечному разложению экспоненты в ряд Тейлора

$$\sum_{\substack{i,j=0\\1\le i+j\le k}}^{k}P_{1,i,j}=P_{1,0,0}\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}-1\right)=$$

$$=P_{1,0,0}\left(e_k\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)-1\right), k=0,1,\ldots,$$

где $e_k(x)=1+x+\ldots+\frac{x^k}{k!}$.

Третья сумма также сводится к конечному разложению экспоненты в ряд Тейлора.

$$\sum_{\substack{i,j=0\\1\le i+j\le k}}^{k}\left(\tau_1(j)+\tau_2(i)\right)P_{1,i,j}=P_{1,0,0}\lambda n e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right).$$

Уравнение (14) существенно упростится:

$$P_{1,0,0}=\left[e_{k+1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)+\frac{\lambda n}{\mu}e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)\right]^{-1}. \quad (16)$$

Вероятность неработоспособных критических событий

$$Q_1(k)=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k+1-i}}{\left(\prod_{m=1}^{k+1-i}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{1,0,0}=$$

$$=\frac{\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}}{e_{k+1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)+\frac{\lambda n}{\mu}e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)}. \quad (17)$$

Вероятность неработоспособных некритических событий

$$Q_2(k)=\sum_{\substack{i,j=0\\1\le i+j\le k}}^{k}\frac{\tau_1(j)+\tau_2(i)}{\mu}P_{1,i,j}=$$

$$=\frac{\frac{\lambda n}{\mu}e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)}{e_{k+1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)+\frac{\lambda n}{\mu}e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)}. \quad (18)$$

Вероятность неработоспособных состояний в случае неограниченного восстановления

$$Q(k)=Q_1(k)+Q_2(k)=$$

$$=\frac{\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}+\frac{\lambda n}{\mu}e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)}{e_{k+1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)+\frac{\lambda n}{\mu}e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)}. \quad (19)$$

Если положить $\mu=\infty$ (замена происходит мгновенно), то получается результат, изложенный авторами в работе [24].

Легко показать, что

$$\lim_{k\to\infty}Q_1(k)=0,\ \lim_{k\to\infty}Q(k)=\lim_{k\to\infty}Q_2(k)=\frac{\lambda n}{\lambda n+\mu}. \quad (20)$$

Это означает, что в случае неограниченного восстановления увеличение объема ЗИП ведет к тому, что вероятность попадания в критическое состояние нехватки ЗИП постепенно обнуляется. При этом вероятность попадания в неработоспособное состояние, связанное с занимающей определенное время заменой отказавшего оборудования аналогом из числа ЗИП определяется стационарным коэффициентом неготовности альтернирующего процесса восстановления.

В случае ограниченного восстановления:

$$Q_1(k)=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k+1-i}}{\left(\prod_{m=1}^{k+1-i}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{1,0,0}, \quad (21)$$

$$Q_2(k)=\sum_{\substack{i,j=0\\1\le i+j\le k}}^{k}\frac{\tau_1(j)+\tau_2(i)}{\mu}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{1,0,0}. \quad (22)$$

Вероятность $P_{1,0,0}$ определяется выражением (15).

Критерий определения необходимого объема ЗИП – k формулируется классическим образом. Объем k увеличивается до тех пор, пока не выполнится неравенство:

$$Q_1(k)\le\varepsilon, \quad (23)$$

где ε – задаваемая вероятность нехватки ЗИП.

Пример расчета необходимого числа запасных элементов

В качестве примера расчета необходимого числа запасных элементов рассмотрим некоторые электронные компоненты, функционирующие в составе системы управления энергетическим объектом. Рассмотрим исходные данные для расчета:

– количество однотипных объектов в системе: n = 30 единиц;

– интенсивность отказов одного объекта: $\lambda = 2{,}92 \cdot 10^{-5}$ 1/час;

– интенсивность замены: $\mu = 0{,}01$ 1/час;

– интенсивность восстановления работоспособности неремонтопригодного объекта на заводе изготовителе: $\mu_0 = 1{,}389 \cdot 10^{-3}$ 1/час;

– интенсивность восстановления работоспособности ремонтопригодного объекта на предприятии, где осуществляется его функционирование: $\mu_1 = 4{,}167 \cdot 10^{-2}$ 1/час;

– вероятность ремонтопригодности: $q = 0{,}6875$;

– число ремонтных бригад: $c = \infty$;

– вероятность достаточности ЗИП: $1 - \varepsilon = 0{,}999$.

Для расчетов будем использовать выражение (17). Приведем вспомогательные выкладки:

$$\lambda_1 = n\lambda q = 6{,}02 \cdot 10^{-4} \text{ 1/час.}$$

$$\lambda_2 = n\lambda(1-q) = 2{,}74 \cdot 10^{-4} \text{ 1/час.}$$

$$\frac{\lambda n}{\mu} = 8{,}76 \cdot 10^{-2}.$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = 1{,}45 \cdot 10^{-2}.$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_0} = 1{,}97 \cdot 10^{-1}.$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_0} = 2{,}12 \cdot 10^{-1}.$$

Для вычисления $e_n(x) = \sum_0^n \frac{x^n}{n!}$ был написан макрос. Результат расчетов необходимого объема ЗИП при различных k приведен в таблице 1.

Расчет по разработанной методике показывает, что необходимое количество запасных электронных компонентов, удовлетворяющее заданной вероятности достаточности ЗИП, равно 3 единицам, поскольку $6{,}21 \cdot 10^{-5} < \cdot 10^{-3}$.

В случае ограниченного восстановления авторами был также разработан соответствующий макрос, рассчитывающий (19). Так, в случае наличия одной обслуживающей бригады необходимый объем ЗИП увеличивается до 4 единиц при тех же остальных исходных данных. При двух и более бригадах достаточно 3 единиц ЗИП.

Заключение

Таким образом, рассмотрена задача обеспечения запасными элементами сложного дорогостоящего оборудования, подверженного двум типам отказов. В одном случае в результате отказа объект переходит в неработоспособное ремонтопригодное состояние и его восстановление возможно в ремонтном подразделении предприятия, на котором объект эксплуатируется. Во втором случае в результате отказа объект переходит в неработоспособное неремонтопригодное состояние и его восстановление возможно только на предприятии изготовителе или на специализированных ремонтных предприятиях. Ввиду высокой стоимости объекта его экономически целесообразнее доставить на специализированное предприятие и выполнить восстановление.

Данная модель может найти применение для расчета состава запасных изделий сложных дорогостоящих электронных систем атомной энергетики. Модель также может быть использована при обосновании состава ЗИП в ряде других отраслей промышленности, например, в области авиации и ракетной техники, при организации работы химического производства и т.п., в отраслях для которых вопросы безопасности и надежности имеют большое значение.

Библиографический список

1. Шишонок Н.А., Репкин В.Ф., Барвинский Л.Л. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры. М.: Сов. радио, 1964. 552 с.

Табл. 1. Вероятность нехватки ЗИП при различных *k*.

k	0	1	2	3
$\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}$	$2{,}12 \cdot 10^{-1}$	$2{,}24 \cdot 10^{-2}$	$1{,}58 \cdot 10^{-3}$	$8{,}35 \cdot 10^{-5}$
$e_{k+1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)$	1,21	1,23	1,24	1,24
$\frac{\lambda n}{\mu} e_{k-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)$	0,00	$8{,}76 \cdot 10^{-2}$	$1{,}06 \cdot 10^{-1}$	$1{,}08 \cdot 10^{-1}$
$Q_1(k)$	$1{,}75 \cdot 10^{-1}$	$1{,}69 \cdot 10^{-2}$	$1{,}18 \cdot 10^{-3}$	$6{,}21 \cdot 10^{-5}$

2. Пославский О.Ф. Методические вопросы разработки и оценки ЗИП. Часть 1. Общие положения теории ЗИП. М.: Знание, 1968. 96 с.

3. Пославский О.Ф. Методы расчета числа запасных частей. М.: Знание, 1977. 90 с.

4. Гоголевский В.Б., Грабовецкий В.П. Определение числа запасных элементов и блоков, обеспечивающих заданную надежность аппаратуры. В кн.: Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Сов. радио, 1971.

5. Захарин А.М., Кандаков В.Ф. Оптимальная стратегия пополнения ЗИП в ремонтном контуре системы обслуживания // Надежность и контроль качества. 1979. № 2. С. 18-24.

6. Конев В.В. Об оптимальном обеспечении группы приборов однотипными запасными элементами // Надежность и контроль качества. 1978. № 3. С. 43-49.

7. Сафаров Б.Е. К выводу основных показателей модели периодического пополнения регионального склада запасными частями при наличии экстренных поставок произвольной величины // Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 1983. Вып. 14. С. 54-61.

8. Надежность технических систем. Справочник / Под ред. И.А. Ушакова / Глава 14. Обеспечение технических объектов запасными элементами / А.Э. Шура-Бура. М.: Радио и связь, 1985. С. 205–233.

9. Сафаров Б.Е. Задача управления запасами в централизованной системе технического обслуживания СВТ. М.: Знание, 1986. 126 с.

10. Антонов А.В., Пляскин А.В. К вопросу расчета надежности системы с ограниченным количеством запасных элементов // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2000. № 2. С. 12-23.

11. Антонов А.В., Пляскин А.В., Чепурко В.А. Оптимизация числа запасных элементов оборудования, важных для безопасности АЭС // Методы менеджмента качества. 2001. № 8. С. 27-31.

12. Антонов А.В., Пляскин А.В. Определение оптимального количества запасных элементов системы с учетом ограничений на стоимость // Надежность. 2003. № 4. С. 9-16.

13. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. Оптимизация состава запасных изделий энергоблоков АЭС методом нелинейного программирования // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18. Выпуск 1. С. 100-101.

14. Чепурко В.А., Унщиков А.П. Об одной динамической модели управления запасами на предприятии // Надежность. 2009. № 4. С. 22-28.

15. Чепурко В.А., Унщиков А.П. Исследование динамических моделей управления запасами на предприятии // Надежность. 2010. № 3. С. 40-47.

16. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. К вопросу оптимизации комплекта запасных изделий с учетом частичной выработки их ресурса // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 1. С. 1-8.

17. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. Повышение качества функционирования систем управления за счет оптимизации состава запасных элементов // Качество, инновации, образование. 2012. № 7. С. 51-56.

18. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. Оптимизация состава запасных изделий энергоблоков АЭС с учетом частичной выработки их ресурса // Ядерная физика и инжиниринг. 2012. Т. 3. № 5. С. 408-415.

19. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. К вопросу расчета надежности резервированных структур с учетом старения элементов // Надежность. 2013. № 1(44). С. 55-61.

20. Antonov A., Plyaskin A. Tataev Kh. Calculation of the Redundant Structure Reliability for Aging type Elements. Pp. 383-390 / In book: Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis. Wiley-ISTE, Nov. 2013. 416 p.

21. Черкесов Г.Н. Оценка надежности систем с учетом ЗИП: учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 480 с.

22. ГОСТ Р В 27.3.03-2005. Надежность военной техники. Оценка и расчет запасов в комплектах ЗИП.

23. РД В 319.01.19-98. Радиоэлектронные системы военного назначения. Методика оценки и расчета запасов в комплектах ЗИП.

24. Антонов А.В., Чепурко В.А. К вопросу расчета состава запасных элементов, имеющих отказы двух типов // Надежность. 2022. № 3. С.21-28.

References

1. Shishonok N.A., Repkin V.F., Barvinsky L.L. [Foundations of the theory of dependability and operation of electronic equipment]. Moscow: Sovetskoye radio; 1964. (in Russ.)

2. Poslavsky O.F. [Methodological aspects of the development and evaluation of SPTA. Part 1. General provisions of the SPTA theory.]. Moscow: Znanie; 1968. (in Russ.)

3. Poslavsky O.F. [Methods for calculating the number of spare parts]. Moscow: Znanie; 1977. (in Russ.)

4. Gogolevsky V.B., Grabovetsky V.P. [Identifying the number of spare elements and units that ensure the specified dependability of equipment]. In: [Essentials of the theory and practice of dependability]. Moscow: Sovietskoye radio; 1971. (in Russ.)

5. Zakharin A.M., Kandakov V.F. [An optimal strategy of SPTA replenishment in the repair circuit of a maintenance system]. *Nadiozhnost i kontrol kachestva* 1979;2:18-24. (in Russ.)

6. Konev V.V. [On an optimal supply of a group of devices with single-type spare elements]. *Nadiozhnost i kontrol kachestva* 1978;3:43-49. (in Russ.)

7. Safarov B.E. [On the deduction of the primary indicators of the model of scheduled replenishment of a regional space part storage in the presence of emergency deliveries of production size]. *Voprosy radioelektroniki. Seria EVT* 1983;14:54-61. (in Russ.)

8. Shura-Bura A.E. [Chapter 14. Spare Part support of technical facilities]. In: Ushakov I.A., editor. [Dependabil-

ity of technical systems]. Moscow: Radio i sviaz; 1985. P. 205-233. (in Russ.)

9. Safarov B.E. [Managing reserves in a centralised communications and computer maintenance system]. Moscow: Znanie, 1986. (in Russ.)

10. Antonov A.V., Plyaskin A.V. On a Question of Calculation of Reliability of a System with Restricted Number of Spare Elements. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika* 2000;2:12-23. (in Russ.)

11. Antonov A.V, Plyaskin A.V., Chepurko V.A. [Optimizing the number of spare parts of safety-critical nuclear power plant equipment]. *Methods of quality management* 2001;8:27-31. (in Russ.)

12. Antonov A.V., Plyaskin A.V. [Identifying the optimal number of spare elements of a system subject to cost restrictions]. *Dependability* 2003;4:9-16. (in Russ.)

13. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tatayev Kh.N. [Optimizing spare components of nuclear power plant reactors using nonlinear programming]. *Surveys on Applied and Industrial Mathematics* 2011;1(18):100-101. (in Russ.)

14. Chepurko V.A., Unshchikov A.P. [On a dynamic stock management model]. *Dependability* 2009;4:22-28. (in Russ.)

15. Chepurko V.A., Unshchikov A.P. [A research of dynamic models of managing company stocks]. *Dependability* 2010;3:40-47. (in Russ.)

16. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tatayev K.N. Optimization of Spare Products and Devices Complete Sets Taking into Account the Reduction of its Resource. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* 2012;1:1-8. (in Russ.)

17. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tataev Kh.N. Improving Functioning of Control Systems by Force of Spare Elements Optimization. *Kachestvo, innovatsii, obrazovanie* 2012;7:51-56. (in Russ.)

18. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tataev H.N. [Optimizing the Spare Component Kit of Nuclear Power Plant Reactors Providing for Partial Depletion]. *Nuclear Physics and Engineering* 2012;3(5):408-415. (in Russ.)

19. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tataev H.N. On the Issue of Reliability Calculation for Redundant Structures in View of Ageing Elements. *Dependability* 2013;1:55-61. (in Russ.)

20. Antonov A., Plyaskin A. Tataev Kh. Calculation of the Redundant Structure Reliability for Aging type Elements. P. 383-390. In: Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis. Wiley-ISTE; Nov. 2013. 416 p.

21. Cherkesov G.N. [System dependability assessment with STPA taken into consideration: a textbook]. Saint Petersburg: BHV-Peterburg; 2012. (in Russ.)

22. GOST R V 27.3.03-2005. [Dependability of military hardware. Estimation and calculation of supplies in SPTA sets]. (in Russ.)

23. RD V 319.01.19-98. [Military electronic systems. Method for evaluating and calculating supplies in SPTA sets]. (in Russ.)

24. Antonov A.V., Chepurko V.A. On the calculation of a set of spare parts that have two types of failures. *Dependability* 2022;3:21-28.

Сведения об авторах

Антонов Александр Владимирович – доктор технических наук, профессор, главный эксперт департамента международного сотрудничества и развития международного бизнеса Автономной некоммерческой организации дополнительного профессионального образования «Техническая академия Росатома», Курчатова, 21, Обнинск, Российская Федерация, e-mail: AVAntonov@rosatomtech.ru.

Чепурко Валерий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, главный специалист отдела расчетных обоснований проектных решений АО РАСУ, Москва, Российская Федерация, e-mail: VAChepurko@rasu.ru.

About the authors

Alexander V. Antonov, Doctor of Engineering, Professor, Chief Expert, Department for International Cooperation and Global Business Development, Rosatom Technical Academy, 21 Kurchatova St., Obninsk, Russian Federation, e-mail: AVAntonov@rosatomtech.ru.

Valery A. Chepurko, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Chief Specialist, Division for Computational Substantiation of Design Solutions, JSC RASU, Moscow, Russian Federation, e-mail: VAChepurko@rasu.ru.

Вклад авторов в статью

Чепурко В.А. нашел общее решение.

Антонов А.В. провел обзор литературы, формализовал Марковский граф и нашел частные решения

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.