Перегуда А. И.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ КОМПЛЕКСА «ОБЪЕКТ ЗАЩИТЫ – СИСТЕМА БЕЗОПАСНОСТИ» ПРИ НЕЧЕТКОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В данной работе рассматривается математическая модель надежности комплекса “объект защиты – система безопасности” с периодически контролируемой системой безопасности. При построении математической модели надежности, учитывающей неопределенность параметров модели, используется случайно-нечеткий процесс восстановления. Получена нечеткая оценка для математического ожидания наработки комплекса, а также приведен пример вычисления оценки средней наработки до аварии комплекса «объект защиты – система безопасности».

Ключевые слова: *надежность, случайно-нечеткие величины, принцип расширения Заде, функция принадлежности, нечеткая средняя наработка, оценка характеристик надежности, дефаззификация.*

Введение

Системы, состоящие из объекта защиты и системы безопасности, применяются там, где необходимо обеспечить безопасную эксплуатацию потенциально опасных объектов. В качестве примера можно привести атомную промышленность. Назначение системы безопасности – переводить аварийные ситуации при нарушении нормального функционирования объекта защиты в ранг неопасных, т.е. парирование отказов объекта защиты. Рассматриваемая система обладает следующими характерными особенностями: имеет место вертикальная соподчиненность – установка находится под контролем системы безопасности; система безопасности обладает правом вмешательства с тем, чтобы предотвращать потенциально опасные изменения в объекте защиты; имеет место взаимозависимость действий – успешность действия системы в целом зависит от поведения всех элементов системы. Из этого следует, что объект защиты и систему безопасности необходимо рассматривать в совокупности как единый автоматизированный технологический комплекс «объект защиты – система безопасности» (АТК ОЗ–СБ). Разработке математической модели надежности такого комплекса посвящены работы [1,2].

При анализе надежности систем может иметь место неопределенность результатов анализа, обусловленная различными причинами. В этой работе будем рассматривать неопределенность результатов анализа надежности, обусловленную неопределенностью исходных данных. Данная разновидность неопределенности возникает, поскольку параметры математической модели, используемой при анализе надежности систем, могут быть точно неизвестны вследствие недостаточности данных и изменчивости характеристик.

Для моделирования различных аспектов неопределенности разработано несколько отличающихся друг от друга подходов, таких как теоретико-вероятностный подход, нечеткие множества и меры и некоторые другие. Обсуждение их различий и преимуществ можно найти в работе [3]. Здесь будем использовать комбинацию теоретико-вероятностного подхода и нечетких мер для построения математической модели надежности, учитывающей неопределенность параметров модели. Подобный подход изложен в ряде работ [4 – 8]. В данной работе, следуя Лю [4,5] будем использовать случайно-нечеткие величины, поскольку они позволяют наиболее просто создать математическую модель надежности АТК ОЗ–СБ, учитывающую неопределенность исходных данных. При анализе математической модели надежности мы переходим от случайных величин к случайно-нечетким величинам, а, следовательно, возникает необходимость в применении случайно-нечеткого процесса восстановления [9,10].

Формализация и решение задачи

При разработке математических моделей надежности общепринятым является подход, при котором наработки и времена восстановления описываются с помощью случайных величин. Например, можно рассматривать наработку до отказа χ, имеющую функцию распределения $F_\chi(t;\vec{\lambda})$, где $\vec{\lambda}$ – вектор параметров распределения. Однако, как правило, точные значения параметров $\vec{\lambda}$ в силу тех или иных причин неизвестны, а, следовательно, имеет место неопределенность параметров модели, что, в свою очередь, приводит к неопределенности значений искомых показателей надежности. Для количественного учета этой неопределенности воспользуемся математическим аппаратом случайно-нечетких величин [4,5]. Сущность используемого подхода заключается в том, что случайным величинам приписывается мера правдоподобия. Случайно-нечеткие наработки до отказа и времена восстановления мы будем определять, используя подход, рассмотренный в [4]. Чтобы задать случайно-нечеткую величину χ, укажем семейство вероятностных распределений $\left\{F_\chi\left(t;\vec{\lambda}(\theta)\right),\theta\in\Theta\right\}$ на вероятностном пространстве (Ω, A, P), где $\vec{\lambda}$ – нечеткий вектор, определенный на пространстве правдоподобия (Θ, G, Cr), которому соответствует функция принадлежности $\mu_{\vec{\lambda}}(\vec{x})$.

Для создания математической модели надежности комплекса «объект защиты – система безопасности» будем использовать вместо случайных величин случайные нечеткие величины. Сущность данного подхода заключается в том, что случайным величинам будем приписывать меру правдоподобия.

Будем считать, что величины χ_i – случайные нечеткие величины, каждая из которых задана на соответствующем пространстве правдоподобия (Θ_i, P_i, Cr_i), причем все они независимы, положительны и одинаково распределенные. Аналогично γ_i – случайные нечеткие величины, каждая из которых задана на соответствующем пространстве правдоподобия (Θ_i’, P_i’, Cr_i’), причем они также независимы, одинаково распределены и положительны. Номер цикла процесса функционирования объекта защиты, на котором произошла авария, обозначим ν. Кроме этого, считаем, что ν – положительное случайное нечеткое целое (т.е. случайная нечеткая величина, которая принимает только положительные целые значения), определенное на пространстве правдоподобия (Θ_i’’, P_i’’, Cr_i’’). И, наконец, предположим, что последовательности $\{\chi_i, i \geq 1\}$ и $\{\gamma_i, i \geq 1\}$ взаимно независимы, а ν независима от последовательностей $\{\chi_i, i \geq 1\}$ и $\{\gamma_i, i \geq 1\}$.

Наработку комплекса до первой аварии можно записать [2]:

$$\omega = \sum_{i=1}^{\nu-1} (\chi_i + \gamma_i) + \chi_\nu ,$$

где χ_ν – наработка на отказ на том цикле регенерации, на котором произошел отказ объекта защиты. Таким образом, ω – это случайная нечеткая величина, определенная на пространстве правдоподобия (Θ_i, P_i, Cr_i), где $\Theta = \Theta'' \times (\Theta_1 \times \Theta_1') \times (\Theta_2 \times \Theta_2') \times \ldots$, *Cr* – мера правдоподобия, определяется так [4,5]

$$Cr(A) = \begin{cases} \sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\ldots)\in A} \inf\limits_{1\le k\le\infty} Cr_k\{\theta_k\}, & \textit{если} \quad \sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\ldots)\in A} \inf\limits_{1\le k\le\infty} Cr_k\{\theta_k\} < \dfrac{1}{2}, \\ 1 - \sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\ldots)\in A^c} \inf\limits_{1\le k\le\infty} Cr_k\{\theta_k\}, & \textit{если} \quad \sup\limits_{(\theta_1,\theta_2,\ldots)\in A} \inf\limits_{1\le k\le\infty} Cr_k\{\theta_k\} \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Для каждого фиксированного θ величины $M\chi_i(\theta)$, $M\gamma_i(\theta)$, $M\nu(\theta)$ и $M\omega(\theta)$ представляют собой математические ожидания случайных величин χ(θ), γ(θ), ν(θ) и ω(θ) соответственно. Поскольку θ варьируется на множестве Θ, то мы рассматриваем уже нечеткие величины $M\chi_i(\theta)$, $M\gamma_i(\theta)$, $M\nu(\theta)$, $M\omega(\theta)$. Для измерения нечеткой величины используют два критических значения (оптимистическое и пессимистическое значение) с заданным доверительным уровнем α [5]. Таким образом, мы можем рассматривать следующие α-пессимистические и α-оптимистические значения этих математических ожиданий:

$$(M\chi_i(\theta))_{\sup}(\alpha) = \sup\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\chi_i(\theta) \ge r\} \ge \alpha\right\},$$

$$(M\chi_i(\theta))_{\inf}(\alpha) = \inf\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\chi_i(\theta) \le r\} \ge \alpha\right\},$$

$$(M\gamma_i(\theta))_{\sup}(\alpha) = \sup\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\gamma_i(\theta) \ge r\} \ge \alpha\right\},$$

$$(M\gamma_i(\theta))_{\inf}(\alpha) = \inf\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\gamma_i(\theta) \le r\} \ge \alpha\right\},$$

$$(M\nu(\theta))_{\sup}(\alpha) = \sup\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\nu(\theta) \ge r\} \ge \alpha\right\},$$

$$(M\nu(\theta))_{\inf}(\alpha) = \inf\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\nu(\theta) \le r\} \ge \alpha\right\},$$

$$(M\omega(\theta))_{\sup}(\alpha) = \sup\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\omega(\theta) \ge r\} \ge \alpha\right\},$$

$$(M\omega(\theta))_{\inf}(\alpha) = \inf\left\{r \,\middle|\, Cr\{M\omega(\theta) \le r\} \ge \alpha\right\}.$$

Для каждого θ∈Θ имеет место равенство

$$M\omega(\theta) = M\left(\sum_{i=1}^{\nu(\theta)-1} (\chi_i(\theta) + \gamma_i(\theta)) + \chi_{\nu(\theta)}(\theta)\right).$$

Используя формулу полной вероятности и определение критических значений α, вычислим α-пессимистическое значение Mω(θ). Тогда

$$
\begin{aligned}
&(M\omega(\theta))_{\inf}(\alpha) = M\left(\sum_{i=1}^{\nu(\cdot)-1}(\chi_i(\theta)+\gamma_i(\theta))+\chi_{\nu(\theta)}(\theta)\right)_{\inf}(\alpha) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(P(\theta)=k)\sum_{i=1}^{k-1}(M\chi_i(\theta)+M\gamma_i(\theta))+M\chi_k(\theta)\right)_{\inf}(\alpha) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}P(\nu(\theta)=k)_{\inf}(\alpha)\left(\sum_{i=1}^{k-1}(M\chi_i(\theta)+M\gamma_i(\theta))+M\chi_k(\theta)\right)_{\inf}(\alpha) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}P(\nu(\theta=k)_{\inf}(\alpha)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\Big(\big(M\chi_i(\theta)\big)_{\inf}(\alpha)+\big(M\gamma_i(\theta)\big)_{\inf}(\alpha)\Big)+\big(M\chi_k(\theta)\big)_{\inf}(\alpha)\right) = \\
&= \left(M\chi(\theta)\sum_{k=1}^{\infty}P(\nu(\theta)=k)\right)_{\inf}(\alpha)+\left((M\chi(\theta)+M\gamma(\theta))\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P(\nu(\theta)=k)\right)_{\inf}(\alpha) = \\
&= \big((M\chi(\theta))_{\inf}(\alpha)+(M\gamma(\theta))_{\inf}(\alpha)\big)(M\nu(\theta)-1)_{\inf}(\alpha)+(M\chi(\theta))_{\inf}(\alpha).
\end{aligned}
$$

Аналогично показывается, что α-оптимистическое значение Mω(θ) определяется соотношением

$$(M\omega(\theta))_{\sup}(\alpha) = \big((M\chi(\theta))_{\sup}(\alpha)+(M\gamma(\theta))_{\sup}(\alpha)\big)(M\nu(\theta)-1)_{\sup}(\alpha)+(M\chi(\theta))_{\sup}(\alpha).$$

Вычислим теперь среднее ожидаемое значение случайной нечеткой величины, которое определяется формулой $E[\xi]=\frac{1}{2}\int_0^1\big(\xi_{\sup}(\alpha)+\xi_{\inf}(\alpha)\big)d\alpha$ [5,6], получим

$$
\begin{aligned}
E[M\omega(\theta)] &= \frac{1}{2}\int_0^1((M\chi)_{\inf}(\alpha)(M\nu(\theta))_{\inf}(\alpha)+(M\gamma(\theta))_{\inf}(\alpha)(M\nu(\theta)-1)_{\inf}(\alpha))d\alpha + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^1((M\chi(\theta))_{\sup}(\alpha)(M\nu(\theta))_{\sup}(\alpha)+(M\gamma(\theta))_{\sup}(\alpha)(M\nu(\theta)-1)_{\sup}(\alpha))d\alpha = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1((M\chi(\theta))_{\inf}(\alpha)(M\nu(\theta))_{\inf}(\alpha)+(M\chi(\theta))_{\sup}(\alpha)(M\nu(\theta))_{\sup}(\alpha))d\alpha + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^1((M\gamma(\theta))_{\inf}(\alpha)(M\nu(\theta)-1)_{\inf}(\alpha)+(M\gamma(\theta))_{\sup}(\alpha)(M\nu(\theta)-1)_{\sup}(\alpha))d\alpha.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получаем

$$E[M\omega(\theta)] = M\chi(\theta)+M\chi(\theta)(\nu(\theta)-1)+M\gamma(\theta)(\nu(\theta)-1). \tag{1}$$

Из определения среднего ожидаемого значения случайной нечеткой величины следует, что M[ω] = E[Mω].

Практическое использование теории нечетких величин предполагает наличие функций принадлежности. При дальнейшем вычислении математического ожидания случайной нечеткой величины M[ω] необходимо вычислить функцию принадлежности.

Пусть наработка между отказами объекта защиты имеет экспоненциальное распределение, параметр которого является треугольной нечеткой величиной. Тогда наработка между отказами объекта защиты является случайной нечеткой величиной. Кроме этого предположим, что и время восстановления объекта защиты имеет экспоненциальное распределение, параметр которого также является треугольной нечеткой величиной. Полагаем, что номер цикла ν, на котором произошла авария, также является случайной нечеткой величиной, причем вероятность аварии на одном цикле процесса функционирования комплекса равна q.

Таким образом, исходя из сделанных предположений, запишем:

$$P\{\chi(\theta)\le t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda_\chi(\theta)t}, & \text{если}\quad 0\le t<\infty,\\ 0, & \text{если}\quad t<0.\end{cases}$$

Замечая, что треугольная нечеткая величина $\lambda_\chi(\theta)$ представима тройкой четких чисел $\left(\lambda_\chi^{(1)},\lambda_\chi^{(2)},\lambda_\chi^{(3)}\right)$, таких что $\lambda_\chi^{(1)}<\lambda_\chi^{(2)}<\lambda_\chi^{(3)}$, а функция принадлежности ее определяется выражением вида

$$\mu_{\lambda_\chi}(y_1)=\begin{cases}\dfrac{y_1-\lambda_\chi^{(1)}}{\lambda_\chi^{(2)}-\lambda_\chi^{(1)}}, & \text{если}\quad y_1\in\left[\lambda_\chi^{(1)},\lambda_\chi^{(2)}\right],\\ \dfrac{y_1-\lambda_\chi^{(3)}}{\lambda_\chi^{(2)}-\lambda_\chi^{(3)}}, & \text{если}\quad y_1\in\left[\lambda_\chi^{(2)},\lambda_\chi^{(3)}\right],\\ 0, & \text{если}\quad y_1\notin\left[\lambda_\chi^{(1)},\lambda_\chi^{(3)}\right].\end{cases}$$

Аналогично запишем для нечеткой величины $\lambda_\chi(\theta)$

$$P\{\gamma(\theta)\le t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda_\gamma(\theta)t}, & \text{если}\quad 0\le t<\infty,\\ 0, & \text{если}\quad t<0\end{cases}$$

$$\mu_{\lambda_\gamma}(y_2)=\begin{cases}\dfrac{y_2-\lambda_\gamma^{(1)}}{\lambda_\gamma^{(2)}-\lambda_\gamma^{(1)}}, & \text{если}\quad y_2\in\left[\lambda_\gamma^{(1)},\lambda_\gamma^{(2)}\right],\\ \dfrac{y_2-\lambda_\gamma^{(3)}}{\lambda_\gamma^{(2)}-\lambda_\gamma^{(3)}}, & \text{если}\quad y_2\in\left[\lambda_\gamma^{(2)},\lambda_\gamma^{(3)}\right],\\ 0, & \text{если}\quad y_2\notin\left[\lambda_\gamma^{(1)},\lambda_\gamma^{(3)}\right].\end{cases}$$

Поскольку рассматриваемый процесс функционирования объекта защиты является альтернирующим случайным процессом, то вероятность того, что авария произошла на k-м цикле регенерации равна

$$P\{\nu = k\} = (1-q)^{(k-1)} q. \tag{2}$$

В этом случае не представляется возможным в явном виде записать выражение для функции принадлежности величины Mω, однако вычислить E[ω] все же можно. Очевидно, что

$$M[\omega] = M\left[\frac{1}{q\lambda_\chi} + \frac{1-q}{q\lambda_\gamma}\right] = \frac{1}{q} M\left[\frac{1}{\lambda_\chi}\right] + \frac{1-q}{q} M\left[\frac{1}{\lambda_\gamma}\right].$$

В полученном выражении оказались неизвестными ожидаемые значения $M\left[\frac{1}{\lambda_\chi}\right]$ и $M\left[\frac{1}{\lambda_\gamma}\right]$, которые нам предстоит вычислить. Математическое ожидание нечеткой величины $M\left[\frac{1}{\lambda_\chi}\right]$ будем вычислять следующим образом:

$$M\left[\frac{1}{\lambda_\chi}\right] = \int_0^{+\infty} Cr\left\{\theta \in \Theta \Big/ \frac{1}{\lambda_\chi(\theta)} \geq r\right\} dr.$$

Прежде чем вычислить $M\left[\frac{1}{\lambda_\chi}\right]$, сначала необходимо определить соответствующую функцию принадлежности:

$$\mu(y) = \sup_{y=\frac{1}{y_1}} \mu_{\lambda_\chi}(y_1) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{y_1} - \lambda_\chi^{(1)}}{\lambda_\chi^{(2)} - \lambda_\chi^{(1)}}, & \text{если} \quad y \in \left[\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(2)}}, \dfrac{1}{\lambda_\chi^{(1)}}\right] \\ \dfrac{\frac{1}{y_1} - \lambda_\chi^{(3)}}{\lambda_\chi^{(2)} - \lambda_\chi^{(3)}}, & \text{если} \quad y \in \left[\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(3)}}, \dfrac{1}{\lambda_\chi^{(2)}}\right] \\ 0, & \text{если} \quad y \notin \left[\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(3)}}, \dfrac{1}{\lambda_\chi^{(1)}}\right] \end{cases}.$$

Тогда меру правдоподобия можно записать в виде

$$Cr\left\{\theta\in\Theta\Big/\frac{1}{\lambda_\chi(\theta)}\geq r\right\}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad r\leq\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(3)}}\\ 1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{1}{r}-\lambda_\chi^{(3)}}{\lambda_\chi^{(2)}-\lambda_\chi^{(3)}}, & \text{если} \quad r\in\left[\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(3)}},\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(2)}}\right]\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{1}{r}-\lambda_\chi^{(1)}}{\lambda_\chi^{(2)}-\lambda_\chi^{(1)}}, & \text{если} \quad r\in\left[\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(2)}},\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(1)}}\right]\\ 0, & \text{если} \quad r>\dfrac{1}{\lambda_\chi^{(1)}}\end{cases}.$$

Следовательно, получаем

$$M\left[\frac{1}{\lambda_\chi}\right]=\int_0^{+\infty}Cr\left\{\theta\in\Theta\Big/\frac{1}{\lambda_\chi(\theta)}\geq r\right\}dr=\frac{1}{2}\ \frac{1}{\lambda_\chi^{(2)}-\lambda_\chi^{(1)}}\ln\left(\frac{\lambda_\chi^{(2)}}{\lambda_\chi^{(1)}}\right)+\frac{1}{2}\ \frac{1}{\lambda_\chi^{(3)}-\lambda_\chi^{(2)}}\ln\left(\frac{\lambda_\chi^{(3)}}{\lambda_\chi^{(2)}}\right). \qquad (3)$$

Математическое ожидание нечеткой величины $M\left[\frac{1}{\lambda_\gamma}\right]$ можно записать аналогично (3), а именно

$$M\left[\frac{1}{\lambda_\gamma}\right]=\frac{1}{2}\ \frac{1}{\lambda_\gamma^{(2)}-\lambda_\gamma^{(1)}}\ln\left(\frac{\lambda_\gamma^{(2)}}{\lambda_\gamma^{(1)}}\right)+\frac{1}{2}\ \frac{1}{\lambda_\gamma^{(3)}-\lambda_\gamma^{(2)}}\ln\left(\frac{\lambda_\gamma^{(3)}}{\lambda_\gamma^{(2)}}\right).$$

Определим теперь $M\nu$. Поскольку ν – дискретная случайная величина, то

$$M\nu=\sum_{k=1}^{\infty}kq(1-q)^{k-1}=q\ .$$

Подставляем полученные выражения $M\left[\frac{1}{\lambda_\gamma}\right]$, $M\left[\frac{1}{\lambda_\chi}\right]$ и $M\nu$ в формулу $M[\omega]$ имеем

$$\begin{gathered}M[\omega]=\frac{1}{2q}\left\{\frac{1}{\lambda_\chi^{(2)}-\lambda_\chi^{(1)}}\ln\left(\frac{\lambda_\chi^{(2)}}{\lambda_\chi^{(1)}}\right)+\ \frac{1}{\lambda_\chi^{(3)}-\lambda_\chi^{(2)}}\ln\left(\frac{\lambda_\chi^{(3)}}{\lambda_\chi^{(2)}}\right)\right\}+\\ +\frac{1-q}{2q}\left\{\frac{1}{\lambda_\gamma^{(2)}-\lambda_\gamma^{(1)}}\ln\left(\frac{\lambda_\gamma^{(2)}}{\lambda_\gamma^{(1)}}\right)+\ \frac{1}{\lambda_\gamma^{(3)}-\lambda_\gamma^{(2)}}\ln\left(\frac{\lambda_\gamma^{(3)}}{\lambda_\gamma^{(2)}}\right)\right\}\end{gathered}.$$

Заметим, что если $\lambda_\chi^{(1)} = \lambda_\chi^{(2)} = \lambda_\chi^{(3)}$ и $\lambda_\gamma^{(1)} = \lambda_\gamma^{(2)} = \lambda_\gamma^{(3)}$ полученное выражение сводится к выражению для вычисления математического ожидания в случае, когда параметры распределений являются четким величинами.

Для того чтобы вычислить $M\omega(\theta)$, как математическое ожидание нечеткой величины, нам необходимо получить соотношение для вероятности $q(\theta)$ при каждом фиксированном $\theta \in \Theta$, поскольку значения $M\chi(\theta)$ и $M\gamma(\theta)$ были вычислены выше. Рассмотрим более подробно процесс функционирования системы безопасности. Поскольку система безопасности функционирует в режиме ожидания отказа объекта защиты, то невозможно обнаружить ее отказы в момент их возникновения. Поэтому для обнаружения скрытых отказов вводится процедура периодического профилактического контроля системы безопасности. Период контроля исправности обозначим T, а его длительность – δ. Предполагаем, что во время периодического контроля система безопасности прекращает выполнять свои функции. Если система безопасности исправно функционировала время ξ_i на i–м цикле регенерации, то за это время было произведено $\left[\dfrac{\xi_i}{T+\delta}\right]$ ($[x]$, $\{x\}$ – соответственно целая и дробная часть числа x, $x^+ = \max(x,0)$) периодов контрольной профилактики. Причем за это время система находилась в рабочем состоянии время $\left[\dfrac{\xi_i}{T+\delta}\right]T$. Отказ СБ обнаруживается лишь в моменты времени $\left(\left[\dfrac{\xi_i}{T+\delta}\right]+1\right)(T+\delta)$, т.е. в моменты времени окончания процедуры контроля. После проведения соответствующих ремонтно-восстановительных работ продолжительностью η_i система безопасности начинает снова исправно функционировать. Таким образом, процесс функционирования системы безопасности с контрольными профилактиками есть случайный процесс с периодом регенерации

$$\tau_{СБ}(\xi,\eta) = (T+\delta)\left(\left[\frac{\xi}{T+\delta}\right]+1\right)+\eta.$$

Таким образом, авария комплекса происходит в том случае, когда отказ объекта защиты приходится на неработоспособное состояние системы безопасности. Моментами регенерации процесса функционирования комплекса будут моменты окончания восстановления объекта защиты.

Учитывая независимость рассматриваемых величин, соотношение (1) можно записать для каждого фиксированного $\theta \in \Theta$ так

$$\begin{aligned} E\left[\omega(\theta)\right] &= \frac{1}{q(\theta)} M\chi(\theta) + \frac{1-q(\theta)}{q(\theta)} M\gamma(\theta) = \\ &= \frac{1}{q(\theta)} \int_0^\infty \left(1 - F_\chi\left(t;\vec{\lambda}_\chi(\theta)\right)\right) dt + \frac{1-q(\theta)}{q(\theta)} \int_0^\infty \left(1 - F_\gamma\left(t;\vec{\lambda}_\gamma(\theta)\right)\right) dt, \end{aligned} \tag{4}$$

где $q(\theta)$ – вероятность аварии на цикле регенерации процесса функционирования комплекса, $F_\chi\left(t;\vec{\lambda}(\theta)\right)$, $F_\gamma\left(t;\vec{\lambda}_\gamma(\theta)\right)$ – вероятностные распределения для случайно-нечетких величин χ и γ соответственно.

Для вычисления вероятности $q(\theta)$ обозначим $Q^{+}(\theta)$ – множество моментов времени, на протяжении которых система безопасности способна парировать отказ объекта защиты и $Q^{-}(\theta)$ – множество моментов времени, на протяжении которых система безопасности не способна парировать отказ объекта защиты. Тогда вероятность $q(\theta)$ для каждого фиксированного $\theta \in \Theta$ будем вычислять следующим образом:

$$q(\theta) = \int_0^{\infty} P\left(t \in Q^{-}(\theta)\right) dF_{\chi}\left(t; \vec{\lambda}_{\chi}(\theta)\right).$$

Замечая, что

$$P\left(t \in Q^{-}(\theta)\right) = 1 - P\left(t \in Q^{+}(\theta)\right) = 1 - P^{+}(t;\theta).$$

Тогда в соответствии с формулой полной вероятности запишем

$$P^{+}(t;\theta) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P\left(t \in Q^{+}(\theta) \mid \xi(\theta) = x, \eta(\theta) = y\right) dF_{\eta}\left(y; \vec{\lambda}_{\eta}(\theta)\right) dF_{\xi}\left(x; \vec{\lambda}_{\xi}(\theta)\right).$$

Напомним, что ξ – случайная наработка до первого скрытого отказа СБ, а η – случайное время восстановления системы безопасности после первого скрытого отказа. При вычислении $P^{+}(t;\theta)$ возможны только два взаимоисключающихся варианта: $\tau_{СБ}(\xi,\eta) > t$ и $\tau_{СБ}(\xi,\eta) \le t$. Следовательно, представим $P^{+}(t)$ в виде суммы двух слагаемых [2]:

$$\begin{aligned}P^{+}(t;\theta) = &\iint\limits_{\tau_{СБ}(x,y)\le t} P\left(t \in Q^{+}(\theta) \mid \xi(\theta) = x, \eta(\theta) = y\right) dF_{\eta}\left(y; \vec{\lambda}_{\eta}(\theta)\right) dF_{\xi}\left(x; \vec{\lambda}_{\xi}(\theta)\right) + \\ &+ \iint\limits_{\tau_{СБ}(x,y)> t} P\left(t \in Q^{+}(\theta) \mid \xi(\theta) = x, \eta(\theta) = y\right) dF_{\eta}\left(y; \vec{\lambda}_{\eta}(\theta)\right) dF_{\xi}\left(x; \vec{\lambda}_{\xi}(\theta)\right) = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Вычислим сначала второе слагаемое. Условие $\tau_{СБ}(x,y) > t$ означает, что момент регенерации процесса функционирования системы безопасности наступил после момента времени t. Учитывая это условие, I_2 преобразуем так:

$$\begin{aligned}I_2 = &\iint\limits_{\tau_{СБ}(x,y)> t} \left(\sum_{m=0}^{\left[\frac{x}{T+\delta}\right]-1} J_{t \in [m(T+\delta, m(T+\delta)+T)} + J_{t \in \left[\left[\frac{x}{T+\delta}\right](T+\delta), x\right)} \right) dF_{\eta}\left(y; \vec{\lambda}_{\eta}(\theta)\right) dF_{\xi}\left(x; \vec{\lambda}_{\eta}(\theta)\right) = \\ = &\int_0^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\left[\frac{x}{T+\delta}\right]-1} J_{t \in [m(T+\delta, m(T+\delta)+T)} + J_{t \in \left[\left[\frac{x}{T+\delta}\right](T+\delta), x\right)} \right) \left(1 - F_{\eta}\left(t - \left(\left[\frac{x}{T+\delta}\right] + 1\right)(T+\delta); \vec{\lambda}_{\eta}(\theta)\right)\right) dF_{\xi}\left(x; \vec{\lambda}_{\eta}(\theta)\right),\end{aligned}$$

где $J_{t \in A}$ – индикатор события $t \in A$.

Опуская некоторые несложные, но громоздкие преобразования, приведем сразу конечный результат:

$$I_2 = \left(1 - F_\xi\left(t; \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)\right) - \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - F_\xi\left(m(T+\delta); \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)\right)\left(J_{(m-1)(T+\delta)+T\le t} - J_{m(T+\delta)\le t}\right).$$

Заметим, что $1 - \sum_{m=1}^{\infty}(1 - F_\xi(m(T+\theta)))(J_{(m-1)(T+\theta)\le t} - J_{m(T+\theta)\le t})$ представляет собой функцию распределения $F_\zeta(t)$ некоторой случайной величины ζ, что позволяет представить I_2 так

$$I_2 = F_\zeta\left(t; \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right) - F_\xi\left(t; \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь I_1. При рассмотрении случая $\tau_{СБ} \le t$ будем учитывать, что после проведения соответствующих ремонтно-восстановительных работ в момент времени $\tau_{СБ}$ система безопасности снова будет функционировать с теми же вероятностными характеристиками, что и в момент времени $t = 0$. Тогда

$$I_1 = \iint\limits_{\tau_{СБ}(x,y)\le t} P^+(t - \tau_{СБ}(x,y))\, dF_\eta\left(y; \vec{\lambda}_\eta(\theta)\right) dF_\xi\left(x; \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right) = \int_0^t P^+(t-z)\, dF_{\tau_{СБ}}\left(z; \vec{\lambda}_\eta(\theta), \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right). \tag{6}$$

Таким образом, суммируя (5) и (6) при каждом фиксированном $\theta \in \Theta$ получаем интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода для вероятности $P\left(t \in Q^+(\theta)\right)$:

$$P^+(t;\theta) = f(t;\theta) + \int_0^t P^+(t-z)\, dF_{\tau_{СБ}}\left(z; \vec{\lambda}_\eta(\theta), \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right), \tag{7}$$

где $f(t;\theta) = F_\zeta\left(t; \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right) - F_\xi\left(t; \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)$, $F_{\tau_{СБ}}\left(z; \vec{\lambda}_\eta(\theta), \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right) = P\left(\left(\left[\dfrac{\xi(\theta)}{T+\delta}\right] + 1\right)(T+\delta) + \eta(\theta) \le z\right)$.

Так как уравнение (7) является уравнением в свертках, то для его решения используем преобразование Лапласа-Стилтьеса. Решение уравнения (7) в терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса имеет вид

$$\tilde{P}^+(s;\theta) = \frac{\tilde{f}(s;\theta)}{1 - \tilde{F}_{\tau_{СБ}}\left(s; \vec{\lambda}_\eta(\theta), \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)} = \frac{Me^{-s\zeta(\theta)} - Me^{-s\xi(\theta)}}{1 - Me^{-s\tau_{СБ}(\theta)}},$$

где $\tilde{P}^+(s;\theta) = \int_0^\infty e^{-st} dP^+(t;\theta)$, $\tilde{F}_{\tau_{СБ}}\left(s; \vec{\lambda}_\eta(\theta), \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right) = \int_0^\infty e^{-st} dF_{\tau_{СБ}}\left(t; \vec{\lambda}_\eta(\theta), \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)$

и $\tilde{f}(s;\theta)=\int\limits_0^\infty e^{-st}df(t;\theta)=\int\limits_0^\infty e^{-st}dF_\zeta\left(t;\vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)-\int\limits_0^\infty e^{-st}dF_\xi\left(t;\vec{\lambda}_\xi(\theta)\right).$

Из-за трудностей нахождения обратного преобразования Лапласа-Стилтьеса в аналитическом виде, найдем асимптотическое соотношение для $P^+(t;\theta)$, применив известное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}P^+(t;\theta)=\lim\limits_{s\to 0}\tilde{P}^+(s;\theta)$. Применяя указанное соотношение, получаем

$$\lim_{t\to\infty}P^+(t;\theta)=\frac{M\xi(\theta)-M\zeta(\theta)}{M\tau_{\text{ÑÁ}}(\theta)}.$$

Очевидно, что теперь необходимо вычислить выражения для математических ожиданий $M\zeta(\theta)$, $M\xi(\theta)$ и $M\tau_{СБ}(\theta)$. Поскольку $M\zeta(\theta)=\int\limits_0^\infty\left(1-F_\zeta\left(t;\vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)\right)dt$, то

$$M\zeta(\theta)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=1}^\infty(1-F_\xi(k(T+\delta);\vec{\lambda}_\xi(\theta)))(J_{(m+1)(T+\delta)+T\le t}-J_{m(T+\delta)\le t})dt=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty k\delta\left(F_\xi\left((k+1)(T+\delta);\vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)-F_\xi\left(k(T+\delta);\vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)\right)=\sum_{k=0}^\infty k\delta P\left(\left[\frac{\xi(\theta)}{T+\delta}\right]=k\right)=\delta M\left[\frac{\xi(\theta)}{T+\delta}\right].$$

Поскольку $\xi(\theta)>>T+\delta$, то $\left[\frac{\xi(\theta)}{T+\delta}\right]\cong\frac{\xi(\theta)}{T+\delta}-\frac{1}{2}$ [1], что позволяет переписать $M\zeta(\theta)$ для каждого фиксированного $\theta\in\Theta$ так $M\zeta(\theta)=M\xi(\theta)\frac{\delta}{T+\delta}-\frac{\delta}{2}$. Тогда

$$M\xi(\theta)-M\zeta(\theta)=M\xi(\theta)\frac{T}{T+\delta}+\frac{\delta}{2}\ \text{ и }\ M\tau_{\text{ÑÁ}}(\theta)=M\eta(\theta)+\frac{T+\delta}{2}+M\xi(\theta).$$

$$\lim_{t\to\infty}P^+(t;\theta)=\frac{M\xi(\theta)\frac{T}{T+\delta}+\frac{\delta}{2}}{M\xi(\theta)+\frac{T+\delta}{2}+M\eta(\theta)}.$$

Заметим, что $M\eta(\theta)$ и $M\xi(\theta)$ могут быть вычислены аналогично как математические ожидания $M\chi(\theta)$ и $M\gamma(\theta)$. Для вероятности $q(\theta)$ для каждого фиксированного $\theta\in\Theta$ можем записать следующую асимптотическую оценку:

$$q(\theta)\approx 1-\lim_{t\to\infty}P^+(t;\theta)=\frac{M\xi(\theta)\frac{\delta}{T+\delta}+\frac{T}{2}+M\eta(\theta)}{M\xi(\theta)+\frac{T+\delta}{2}+M\eta(\theta)}.$$

Таким образом, мы получили соотношения для всех величин, входящих в (1). Теперь можем вычислить $M\left[\omega(\theta)\right]$ при каждом фиксированном $\theta \in \Theta$ по формуле

$$M\left[\omega(\theta)\right] = \frac{\left(M\xi(\theta) + \frac{T+\delta}{2} + M\eta(\theta)\right) M\chi(\theta) + \left(M\xi(\theta)\frac{T}{T+\delta} + \frac{\delta}{2}\right) M\gamma(\theta)}{M\xi(\theta)\frac{\delta}{T+\delta} + \frac{T}{2} + M\eta(\theta)},$$

где $M\chi(\theta) = \int_0^\infty \left(1 - F_\chi\left(t; \vec{\lambda}_\chi(\theta)\right)\right) dt$, $M\xi(\theta) = \int_0^\infty \left(1 - F_\xi\left(t; \vec{\lambda}_\xi(\theta)\right)\right) dt$, $M\gamma(\theta) = \int_0^\infty \left(1 - F_\gamma\left(t; \vec{\lambda}_\gamma(\theta)\right)\right) dt$ и $M\eta(\theta) = \int_0^\infty \left(1 - F_\eta\left(t; \vec{\lambda}_\eta(\theta)\right)\right) dt$.

Следовательно, в соответствии с определением функции от нечетких величин [4,5], мы задали нечеткое математическое ожидание наработки до первой аварии как функцию от нечетких параметров модели.

Используемся принципом расширения Заде [6]:

$$\mu(x) = \sup_{x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \min_{1 \le i \le n} \mu_i(x_i)$$

и запишем соотношение для функции принадлежности $M\omega(\theta)$:

$$\mu_{M\omega}(y) = \sup_{y = f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)} \min\left(\mu_{\vec{\lambda}_\chi}(\vec{x}_1), \mu_{\vec{\lambda}_\gamma}(\vec{x}_2), \mu_{\vec{\lambda}_\xi}(\vec{x}_3), \mu_{\vec{\lambda}_\eta}(\vec{x}_4)\right),$$

где $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4) = \frac{\left(M\xi(\vec{x}_3) + \frac{T+\delta}{2} + M\eta(\vec{x}_4)\right) M\chi(\vec{x}_1) + \left(M\xi(\vec{x}_3)\frac{T}{T+\delta} + \frac{\delta}{2}\right) M\gamma(\vec{x}_2)}{M\xi(\vec{x}_3)\frac{\delta}{T+\delta} + \frac{T}{2} + M\eta(\vec{x}_4)}$.

Таким образом, нам удалось записать соотношение для функции принадлежности ожидаемого значения наработки комплекса до аварии через функции принадлежности параметров модели.

Рассмотрим теперь процедуру дефаззификации, т.е. преобразование нечеткого множества в четкое число, для чего воспользуемся определением среднего ожидаемого значения случайно-нечетких величин [6]:

$$M\left[\omega(\theta)\right] = \int_0^\infty Cr\{\theta \in \Theta \mid M\omega(\theta) \ge r\} dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\theta \in \Theta \mid M\omega(\theta) \le r\} dr.$$

Найдем соответствующую меру правдоподобия, используя соотношение, связывающее меру правдоподобия и функцию принадлежности [5]:

$$Cr\{M\omega \in B\} = \frac{1}{2}\left(\sup_{y\in B}\mu_{M\omega}(y) + 1 - \sup_{y\in R\setminus B}\mu_{M\omega}(y)\right).$$

Тогда запишем

$$M[\omega] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\sup_{y\geq r}\mu_{M\omega}(y) + 1 - \sup_{y<r}\mu_{M\omega}(y)\right)dr .$$

Предполагая, что случайные нечеткие величины $\xi(\theta)$ и $\eta(\theta)$ распределены по экспоненциальному закону, параметры которых являются треугольными нечеткими величинами, замечаем, что ожидаемые значения $M[\xi(\theta)]$ и $M[\eta(\theta)]$ можно записать аналогично соотношению (3).

Пример. Пусть случайные нечеткие величины χ, ξ, γ и η распределены по экспоненциальным законам, т.е.

$$F_\chi\{t;\lambda(\theta)\} = 1 - e^{-\lambda_\chi(\theta)t},\ F_\xi\{t;\lambda(\theta)\} = 1 - e^{-\lambda_\xi(\theta)t},\ F_\gamma\{t;\lambda(\theta)\} = 1 - e^{-\lambda_\lambda(\theta)t} \text{ и } F_\eta\{t;\lambda(\theta)\} = 1 - e^{-\lambda_\eta(\theta)t}.$$

Здесь будем строить функцию принадлежности на основе доверительных интервалов параметров распределения методом, предложенным Бакли [8]. Его сущность заключается в том, что функция принадлежности искомого параметра распределения определяется своими множествами α–уровня. При этом в качестве множества α–уровня берется интервальная оценка искомого параметра распределения с уровнем доверия $(1-\alpha)$. Доверительные границы для интенсивности отказов рассчитываются по следующим формулам [12]:

$$\lambda_i = \frac{\chi^2(1-\alpha_1, 2d)}{2nt_0},\ \lambda_{\hat{a}} = \frac{\chi^2(\alpha_2, 2d)}{2nt_0},$$

где d – количество отказов за время t_0, n – общее количество элементов данного наименования, t_0 – период эксплуатации (в часах). В данном случае t_0=289080 ч, λ_i – нижняя граница доверительного интервала, $\lambda_{\hat{a}}$ – верхняя граница доверительного интервала, α_1 – вероятность события $\lambda \geq \lambda_i$, α_2 – вероятность события $\lambda \leq \lambda_{\hat{a}}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$ – вероятность события $\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{\hat{a}}$, $\chi^2(s,r)$ – квантиль χ^2 распределения с параметром s числом степеней свободы r.

В этом случае функцию принадлежности ожидаемого значения наработки комплекса до аварии комплекса запишем так:

$$\mu_{M\omega}(y) = \sup_{y=f(x_1,x_2,x_3,x_4)}\min\left(\mu_{\lambda_\chi}(x_1), \mu_{\lambda_\gamma}(x_2), \mu_{\lambda_\xi}(x_3), \mu_{\lambda_\eta}(x_4)\right),$$

где $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{q(x_3,x_4)}\frac{1}{x_1} + \frac{1-q(x_3,x_4)}{q(x_3,x_4)}\frac{1}{x_2}$, $q(x_3,x_4) \approx \dfrac{\frac{1}{x_3}\frac{\delta}{T+\delta} + \frac{T}{2} + \frac{1}{x_4}}{\frac{1}{x_3} + \frac{T+\delta}{2} + \frac{1}{x_4}}$.

Простейшими методами дефаззификации являются: метод центра тяжести, метод центра площадей, метод левого модального значения, метод правого модального значения [11].

Причем $\mu_{\lambda_\chi}(x) = \Delta\left(1\times10^{-6}ч^{-1}, 1.5\times10^{-6}ч^{-1}, 2\times10^{-6}ч^{-1}\right)$, $\mu_{\lambda_\gamma}(x) = \Delta\left(1ч^{-1}, 1.5ч^{-1}, 2ч^{-1}\right)$, $\mu_{\lambda_\chi}(x) = \Delta\left(1\times10^{-4}ч^{-1}, 1.5\times10^{-4}ч^{-1}, 2\times10^{-4}ч^{-1}\right)$, $\mu_{\lambda_\eta}(x) = \Delta\left(1ч^{-1}, 1.5ч^{-1}, 2ч^{-1}\right)$, $T = 500ч$, $\delta = 0.1ч$. Здесь Δ обозначает треугольную функцию принадлежности. Тогда

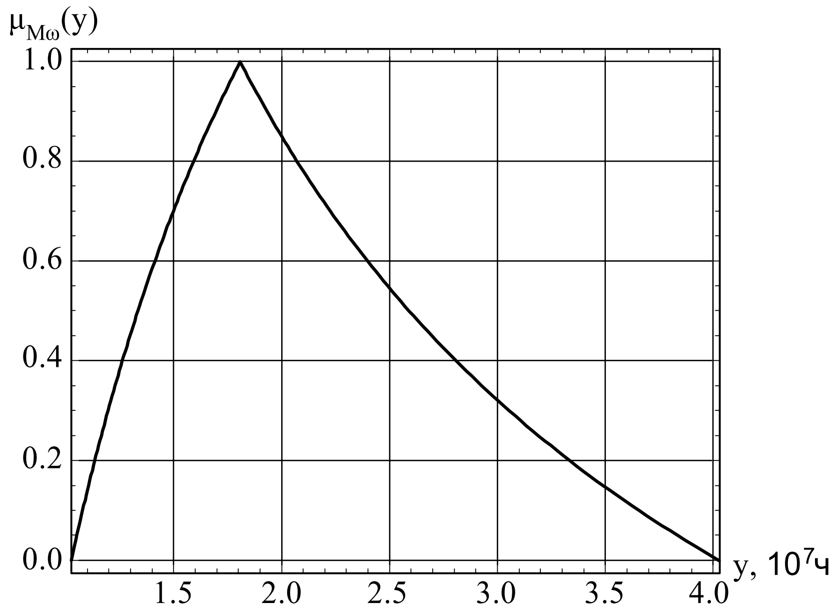

Рис. 1. Функция принадлежности средней наработки до аварии комплекса

При этом значение $M\omega$, вычисленное классическим способом, составляет $1.808\times10^7 ч$, что совпадает с максимумом функции принадлежности, а значение $M[\omega]$, полученное в результате процедуры дефаззификации, составляет $2.029\times10^7 ч$, что отражает асимметричность полученной функции принадлежности. Также оценили вклад каждого из нечетких параметров в неопределенность результата в соответствии с [8]. Так для параметра λ_χ получили 0.506858, для λ_γ – 0.4×10^{-7}, для λ_ξ – 0.491839, а для λ_η получили 0.00130296.

Заключение

Таким образом, в данной работе предложен подход к оценке средней наработки до аварии комплекса «объект защиты – система безопасности» с учетом неопределенности в задании неопределенностью исходных данных. Рассматривая процесс функционирования комплекса как случайно-нечеткий процесс восстановления, получены соотношения, позволяющие записать функцию принадлежности для средней наработки до аварии комплекса. Зная функцию принадлежности параметров комплекса, применяя процедуру дефаззификации, оценена средней наработки до аварии комплекса.

Литература

1. **Малашинин И.И., Перегуда А.И**. Расчет и оптимизация надежности систем аварийной защиты ядерных реакторов. – М.: Энергоатомиздат, 1985 – 112 с.

2. **Перегуда А. И., Тимашов Д. А.** Математическая модель процесса функционирования автоматизированного технологического комплекса «объект защиты – система безопасности» с восстанавливаемыми элементами и периодическим контролем системы безопасности // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2007. – №3, вып. 2. – С. 101-109.

3. **Пытьев Ю. П.** Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение. – М.: Физматлит, 2007 – 464 с.

4. **Liu B.** Uncertainty Theory. – 2nd edition. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 255 pp.

5. **Liu B.** Uncertainty Theory: An Introduction to Its Axiomatic Foundations. – Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 411 pp.

6. **Kwakernaak H.** Fuzzy random variables – I. Definitions and theorems // Information Sciences. – 1978. – Vol. 15 – Pp. 1-29.

7. **Hanss M.** Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications. – Springer-Verlag, 2005. – 256 pp.

8. **Buckley J. J.** Fuzzy Probability and Statistics. – Springer-Verlag, 2006. – 270 p.

9. **Zhao R., Tang W., Yun H.** Random fuzzy renewal process // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 169. – Pp. 189-201.

10. **Shen Q., Zhao R., Tang W.** Random fuzzy alternating renewal processes // Soft Computing. – 2008. – Vol. 13, no. 2. – Pp. 139-147.

11. **Леоненко А.В.** Нечеткое моделирование в среде Matlab и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005.– 736 с.

12. **Байхельт Ф., Франкен П.** Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.