Надежность, том 22, №3, 2022 / Dependability 3, 2022
Системный анализ в задачах надежности и безопасности
УДК 519.248:62-192
Оригинальная статья / Original article
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-3-29-34

Анализ применимости байесовских оценок при решении практических задач надежности, использующих модели, предназначенные для групп однородной продукции

Analysis of the application of Bayesian estimates as part of practical problems in dependability that involve models intended for groups of homogeneous products

Храмов С.М.[1], Рудковский Д.М.[1], Михайлов В.С.[1]*,
Sergey M. Khramov[1], Dmitry M. Rudkovsky[1], Viktor S. Mikhailov[1]*
[1]Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева», Москва, Российская Федерация
[1]D.I. Mendeleev Central Research and Design Institute of Chemistry and Mechanics, Moscow, Russian Federation
**mvs1956@list.ru*


Храмов С.М.


Рудковский Д.М.


Михайлов В.С.

Резюме. *В настоящее время проявляется повышенный интерес к байесовской теории среди специалистов в области прикладной теории надежности. Однако байесовский подход не является общепринятым среди специалистов в области математической статистики и теории надежности. Сомнения в возможности его применения при решении практических задач вызваны в первую очередь тем, что он допускает использование субъективных вероятностей. На практике, как правило, рассматривают модели однородной продукции, т.е. каждое из изделий оцениваемой партии характеризуют одинаковой величиной выбранного параметра надежности. В случае байесовского метода статистического оценивания рассматривается уже модель неоднородной продукции, однако в процессе стабильного производства не считается нормальным выпуск изделий с различной надежностью, что ставит под сомнение адекватность применения методов байесовского статистического оценивания.* **Цель работы**. *Показать, что использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, является ошибочным.* **Методы исследования.** *Для нахождения в выделенных классах смещенных оценок эффективных использовались интегральные числовые характеристики точности оценки, а именно: суммарный квадрат смещения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от исследуемых параметров законов распределений и т.д.* **Выводы.** *1. Реализации байесовских оценок при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем* $1 - \tilde{p}_\alpha = 1 - \alpha/(\alpha + \beta)$, *в то время как классическая* $\tilde{P}_2 = 1 - R/N$ *и интегральная* $\tilde{P}_4$ *несмещенная оценки адекватно реагируют на любые внешние изменения. Использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется. 2. Байесовские оценки следует использовать только для групп неоднородной продукции. 3. Вместо байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, следует использовать интегральные смещенные оценки.*

Abstract. *Experts in applied dependability are showing an increasing interest in the Bayesian theory. However, the Bayesian approach is not generally accepted by mathematical statistics and dependability researchers. The doubts about its practical applicability are primarily due to the fact that it allows for subjective probabilities. In practice, homogeneous product models are normally considered, i.e., each item in the evaluated batch is characterized by the same selected dependability value. In the case of Bayesian statistical estimation, the model involves heterogeneous products, however, in the course of steady production, it is not considered normal to manufacture products with varied dependability, which calls into question the adequacy of Bayesian statistical estimation methods.* **Aim**. *It is demonstrated that using Bayesian estimators that employ models designed for homogeneous products in dependability is erroneous.* **Methods of research.** *For the purpose of finding effective estimates within a selected class, integral numerical characteristics of the accuracy of estimation were used, namely, total squared bias of the expected implementation of a certain variant estimate from the examined parameters of the distribution laws, etc.* **Conclusions.** *1. For any result, the realizations of Bayesian estimates are grouped within the dogma of mean* $1 - \tilde{p}_\alpha = 1 - \alpha/(\alpha + \beta)$, *while classical* $\tilde{P}_2 = 1 - R/N$ *and integral* $\tilde{P}_4$ *unbiased estimates respond adequately to any external changes. The use of*

Bayesian estimates in dependability, when models designed for homogeneous products are employed, is erroneous, and there is no need to use them. 2. Bayesian estimates should only be used for groups of heterogeneous products. 3. Instead of Bayesian estimates, integral biased estimates should be used in dependability, when models designed for homogeneous products are employed.

Ключевые слова: *оценка, эффективная оценка, критерий эффективности смещенных оценок, байесовские оценки, смещенные оценки.*
Keywords: *estimate, efficient estimate, efficiency criterion for biased estimates, Bayesian estimates, biased estimates.*

Для цитирования: *Храмов С.М., Рудковский Д.М., Михайлов В.С. Анализ применимости байесовских оценок при решении практических задач надежности, использующих модели, предназначенные для групп однородной продукции // Надежность. 2022. №3. С. 29-34. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-3-29-34*
For citation: *Khramov S.M., Rudkovsky D.M., Mikhailov V.S. Analysis of the application of Bayesian estimates as part of practical problems in dependability that involve models intended for groups of homogeneous products. Dependability 2022;3: 29-34. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-3-29-34*

Поступила *26.04.2022 г.* / **После доработки** *25.07.2022 г.* / **К печати** *19.09.2022 г.*
Received on: *26.04.2022* / **Revised on:** *25.07.2022* / **For printing:** *19.09.2022.*

В настоящее время проявляется повышенный интерес к байесовской теории среди специалистов в области прикладной теории надежности [1–3]. Однако байесовский подход не является общепринятым среди специалистов в области математической статистики и теории надежности. Сомнения в возможности его применения при решении практических задач вызваны в первую очередь тем, что он допускает использование субъективных вероятностей [1]. Т.е. в байесовских методах предполагается, что априорное распределение известно до начала наблюдений и не предлагается конструктивных способов его выбора. В байесовском подходе предполагается, что случайность есть мера нашего незнания, т.е. предварительные знания о случайном событии позволяют предсказать его с «большей» вероятностью. В противовес этому, в частотном подходе предполагается, что случайность есть объективная неопределенность, т.е. единственным возможным средством анализа является проведение серии испытаний [4, 5].

Суть байесовского подхода состоит в том, что неизвестный (оцениваемый) параметр θ рассматривается как случайная величина с некоторой плотностью распределения $q(t)$, где t – реализация с.в. θ [1, 4]. Плотность $q(t)$ называется априорной, т.е. данной до эксперимента. Байесовский подход предполагает, что неизвестный параметр θ был выбран случайным образом из распределения с плотностью $q(t)$.

В соответствии с формулой Байеса плотность апостериорного распределения имеет вид [4]:

$$q(x|t) = f_\theta(x)q(t)/f(x), \qquad (1)$$

где t – реализация случайного параметра θ с некоторой (априорной) плотностью распределения $q(t)$, $t \in \Theta$; $f_\theta(x) = f(x|\theta = t)$ – условная плотность распределения случайной величины X, $f(x) = \int f_\theta(x)q(t)dt$.

Само апостериорное распределение параметра θ будем обозначать через Q_x. Тогда байесовская оценка (апостериорная), соответствующая априорному распределению Q с плотностью $q(t)$, имеет вид:

$$\tilde{\theta}_Q(X) = E(\theta|x) = \int tq(t|X)dt = \int tQ_X(dt). \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что результат байесовской оценки $\tilde{\theta}_Q$ ограничен выбранным априорным распределением как неизменным постулатом [1], т.е. недостатком байесовского подхода является обязательное знание плотности априорного закона распределения случайного параметра θ. Ряд авторов исследует вопросы выбора априорного распределения, оставаясь в рамках априорного подхода [1]. Однако свойства байесовской оценки остаются ограниченными данным выбором. Примером могут служить сопряженные априорные распределения [1, стр. 46].

С одной стороны, эти заложенные в правило предварительные знания несут в себе однократные (или нет) финансовые издержки, а с другой – позволяют минимизировать объем испытаний [1], что в рамках стабильного производства дает им конкурентные преимущества [1]. В этих условиях вполне естественно возникает вопрос – есть ли необходимость в байесовских оценках в практических задачах надежности. Чтобы ответить на этот вопрос необходимо разобраться в частностях.

Рассмотрим пример [1, 4]. Пусть процесс Бернулли с параметром $\theta = p$ и выборкой объема $N = n$ имеет априорное бета-распределение с параметрами α и β. Тогда условная плотность $q(p|X = R)$, где $X = R$ – случайное число отказов, выразится формулой:

$$q(p|R)=(\Gamma(R + \alpha + \beta)/ /\Gamma(R + \alpha)\Gamma(N - R + \beta))p^{R+\alpha-1}(1 - p)^{N-R+\beta-1} \qquad (3)$$

где $\Gamma()$ – гамма-функция [1, 4].

Из формулы (3) следует, что апостериорное распределение является тоже бета-распределением с параметрами $R + \alpha$ и $N - R + \beta$. Байесовская оценка случайного параметра $\theta = p$ равна математическому ожиданию

$E(\theta = p|R)$, т.е. апостериорная оценка случайного параметра $\theta = p$ равна

$$\tilde{\theta}_Q(R,N) = (R + \alpha)/(N + \alpha + \beta). \qquad (4)$$

Заметим, что математическое ожидание априорного бета-распределения, т.е. априорная оценка случайного параметра $\theta = p$ до наблюдения, равна $\tilde{p}_\alpha = \alpha/(\alpha + \beta)$ [6], а оценка по наблюдению (классическая эффективная оценка уже неслучайного параметра p [5]), игнорирующая априорное распределение, равна $\tilde{p} = R/N$ [5].

Из формулы (4) следует, что апостериорная оценка вероятности безотказной работы (ВБР) $\tilde{P}_1$ будет иметь вид:

$$\tilde{P}_1 = 1 - \tilde{\theta}_Q(R,N) = 1 - (R + \alpha)/(N + \alpha + \beta) = \\ = (N + \beta - R)/(N + \alpha + \beta). \qquad (5)$$

Классическая эффективная оценка ВБР $\tilde{P}_2$ будет иметь вид:

$$\tilde{P}_2 = 1 - \tilde{p} = 1 - R/N = (N - R)/N.$$

Докажем, что байесовская оценка ограничена величинами, преодолеть, которые она не может. Обозначим через $\alpha_N = \alpha$ /N, $\beta_N = \beta/N$ и преобразуем $\tilde{P}_1$ к виду:

$$\tilde{P}_1 = (1 - R/N + \beta_N)/(1 + \alpha_N + \beta_N) = \\ = (\tilde{P}_2 + \beta_N)/(1 + \alpha_N + \beta_N). \qquad (6)$$

Из формулы (6) непосредственно следует, что байесовская оценка, словно догматами, ограничена величинами, преодолеть которые она не может:

при $R = 0$ оценка $\tilde{P}_1$ достигает своего максимума: $\tilde{P}_1 = (1 + \beta_N)/(1 + \alpha_N + \beta_N)$;

при $R = N$ оценка $\tilde{P}_1$ достигает своего минимума: $\tilde{P}_1 = \beta_N/(1 + \alpha_N + \beta_N)$;

при $N \to \infty$ байесовская оценка $\tilde{P}_1$ стремится по своим свойствам к классической эффективной оценке $\tilde{P}_2 = 1 - R/N$.

Байесовская оценка $\tilde{P}_1$ дает результаты, не выходящие за рамки дозволенного, определенного выбором вида распределения и его параметров α и β по результатам испытаний изделий предыдущих партий. Такая модель поведения оценки не отражает реальный мир и обслуживает период стабильной ситуации.

Зададимся вопросом – насколько сдерживается чувствительность апостериорной байесовской оценки к нарушению стабильности в зависимости от априорной оценки $\tilde{p}_\alpha = \alpha/(\alpha + \beta)$.

На практике, как правило, рассматривают модели однородной продукции, т.е. каждое из изделий оцениваемой партии характеризуют одинаковой величиной, выбранного параметра надежности. В случае байесовского метода статистического оценивания рассматривается уже модель неоднородной продукции, однако в процессе стабильного производства не считается нормальным выпуск изделий с различной надежностью, что ставит под сомнение адекватность применения методов байесовского статистического оценивания. Рассмотрим крайние модели, основанные на методах байесовского статистического оценивания.

Приведем позаимствованный из [9] пример, когда плотность априорного распределения параметра p одинаково максимальна и равномерна, что соответствует модели максимальной неоднородности выпускаемой продукции. Для этого рассмотрим биномиальный план испытаний и предположим, что величина параметра p равномерно распределена в интервале [0;1]. Это допущение соответствует полному отсутствию данных о надежности изделия, т.е. максимальной неопределенности относительно интервала величин, принимаемых параметром p. Априорная плотность равномерного закона распределения параметра p на отрезке $p = t \in [0;1]$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ имеет вид $q(t) = (t_2 - t_1)^{-1} = 1$. В соответствии с формулами (1) и (2) плотность совместного распределения случайных величин параметра p и числа отказов R для биномиальных испытаний выражается формулой ($t_1 = 0$, $t_2 = 1$) [4, стр. 54] $f(R = r, p = t) = f(r|p = t)q(t) = C(n,r) t^r(1 - t)^{n-r}$, где $C(n,r)$ – число сочетаний из n по r. Тогда в соответствии с формулой (2) имеем

$$f(R = r) = \int f(r|p = t)q(t)dt = \int_0^1 C(n,r)t^r(1 - t)^{n-r}dt.$$

Условная плотность апостериорного распределения для биномиального плана испытаний примет вид $q(p = t|R = r) = f(r|p = t)q(t)/f(r) = t^r(1 - t)^{n-r}/\int_0^1 C(n,r) t^r(1 - t)^{n-r}dt$. Учтем, что $\int_0^1 C(n,r)t^r(1 - t)^{n-r}dt = \Gamma(r + 1) \Gamma(n - r + 1)/\Gamma(n + 2)$ [4, ф. 1.4.35], тогда условная плотность апостериорного распределения с.в. p для биномиального плана испытаний $q(p = t|R = r)$ подобна плотности бета-распределения $f_p(t,a,b)$ с параметрами $p = t$, $a = r + 1$, $b = n - r + 1$, а именно [4, ф. 1.4.31]:

$$q(p = t|R = r) = f_p(t,r + 1,n - r + 1) = \\ = \Gamma(n + 2)(\Gamma(r + 1)\Gamma(n - r + 1))^{-1}t^r(1 - t)^{n-r}.$$

Для бета-распределения с параметрами $a = r + 1$, $b = n - r + 1$ математическое ожидание случайной величины p выражается через параметры a и b по формуле [4, ф. 1.4.37]:

$$E(p) = a/(a + b) = (r + 1)/(n + 2).$$

Заметим, что $E(p)$ является усреднением количественных значений случайной величины p, что может служить ее апостериорной оценкой по результатам испытаний при $R = r$, а именно: $\tilde{p}(R,n) = (R + 1)/(n + 2)$. Оценку $\tilde{p}(R,n) = (R + 1)/(n + 2)$ можно получить непосредственно из формулы (4) при α = 1 и β = 1. Тогда оценкой ВБР может служить

$$\tilde{P}_3(R,n) = 1 - (R + 1)/(n + 2) = (n - R + 1)/(n + 2).$$

В противовес оценке $\tilde{P}_3(R,n)$, т.е. максимальной неопределенности относительно интервала величин, принимаемых параметром p, ниже будет рассмотрен другой экстремальный пример, когда плотность априорного распределения параметра p максимально вырождена в одной точке или в небольшой области, что соответствует модели однородной продукции. Традиционно для биномиального плана испытаний на практике используют классическую несмещенную оценку $\tilde{P}_2 = 1 - R/N$.

В табл. 1 приведены сравнительные результаты байесовских и классической оценок на примере априорного бета-распределения [5].

Из табл. 1 следует, что реализации байесовских оценок при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем $1 - \tilde{p}_\alpha = 1 - \alpha/(\alpha + \beta)$, в то время как классическая оценка $\tilde{P}_2 = 1 - R/N$ адекватно реагирует на любые внешние изменения. Аналогичные результаты

Табл. 1. Сравнительные результаты байесовских и классической оценок

Вариант №	$1-\tilde{\tilde{p}}_\alpha = 1-\alpha/(\alpha+\beta)$	$\tilde{\tilde{P}}_1$	$\tilde{\tilde{P}}_2$	$\tilde{\tilde{P}}_3$	R	N	α	β
1	1 – 2/5 = 0,6	7/9 = 0,777	1	5/6 = 0,833	0	4	2	3
2	1 – 2/5 = 0,6	6/9 = 0,666	0,75	4/6 = 0,667	1	4	2	3
3	1 – 2/5 = 0,6	5/9 = 0,555	0,5	3/6 = 0,5	2	4	2	3
4	1 – 2/5 = 0,6	4/9 = 0,444	0,25	2/6 = 0,333	3	4	2	3
5	1 – 2/5 = 0,6	3/9 = 0,3333	0	1/6 = 0,167	4	4	2	3
6	1 – 8/12 = 0,333	8/16 = 0,5	1	5/6 = 0,833	0	4	8	4
7	1 – 8/12 = 0,333	7/16 = 0,4375	0,75	4/6 = 0,667	1	4	8	4
8	1 – 8/12 = 0,333	6/16 = 0,375	0,5	3/6 = 0,5	2	4	8	4
9	1 – 8/12 = 0,333	5/16 = 0,3125	0,25	2/6 = 0,333	3	4	8	4
10	1 – 8/12 = 0,333	4/16 = 0,25	0	1/6 = 0,167	4	4	8	4

Табл. 2. Сравнительные результаты байесовских, классической и интегральной оценок

R	N	β	α	$1-\tilde{\tilde{p}}_\alpha = \beta/(\alpha+\beta)$	$\tilde{\tilde{P}}_1$	$\tilde{\tilde{P}}_3$	$\tilde{\tilde{P}}_2$	$\tilde{\tilde{P}}_4$
0	4	94	2	94/96 = 0,979	98/100 = 0,98	5/6 = 0,833	1	0,973
1	4	94	2	94/96 = 0,979	97/100 = 0,97	4/6 = 0,666	0,75	0,75
2	4	94	2	94/96 = 0,979	96/100 = 0,96	3/6 = 0,5	0,5	0,5
3	4	94	2	94/96 = 0,979	95/100 = 0,95	2/6 = 0,333	0,25	0,25
4	4	94	2	94/96 = 0,979	94/100 = 0,94	1/6 = 0,167	0	0
0	4	20	2	20/22 = 0,909	24/26 = 0,9230	5/6 = 0,833	1	0,973
1	4	20	2	20/22 = 0,909	23/26 = 0,8846	4/6 = 0,667	0,75	0,75
2	4	20	2	20/22 = 0,909	22/26 = 0,8461	3/6 = 0,5	0,5	0,5
3	4	20	2	20/22 = 0,909	21/26 = 0,8076	2/6 = 0,333	0,25	0,25
4	4	20	2	20/22 = 0,909	20/26 = 0,7692	1/6 = 0,167	0	0

представлены в [7, 8, 9]. Полученные результаты показывают, что байесовская оценка не позволяет увидеть изменения надежности изделий, произошедшие в процессе нарушенного производства, так в случае одного отказа байесовская оценка занижает величину ВБР, показывая результат 0,666 (0,4375), в то время как оценка $\tilde{\tilde{P}}_2$ дает результат, равный 0,75 (см. варианты № 2 и № 7). В случае большого числа отказов $r = 3$ байесовская оценка завышает величину ВБР, показывая результат 0,444 (0,3125), в то время как оценка $\tilde{\tilde{P}}_2$ дает результат, равный 0,25 (см. варианты № 4 и № 9). Заметим, что величины ВБР, близкие к реальным, получены с использованием классической эффективной и несмещенной оценки $\tilde{\tilde{P}}_2 = 1 - R/N$ (случай биномиального плана испытаний). Из сказанного следует, что использование байесовских оценок является ошибочным и необходимости их использования в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для групп однородной продукции, не имеется.

Оптимальным вариантом замены байесовским оценкам служат интегральные смещенные оценки [10], которые наилучшим образом помогают избежать неопределенности при $R = 0$. Например, для биномиального плана испытаний эффективной в классе смещенных оценок является составная оценка вида

$$\tilde{\tilde{P}}_4 = 1 - p_4,\ p_4 = w(0{,}81;n) - 0{,}1/((R+1)n),$$
$$R = 0 \text{ и } p_4 = n/R,\ R > 0,$$

где $w(0{,}81;n,R)$ – решение уравнения

$$P_\Sigma(R = r) = \textstyle\sum_{k=0}^{r} P_n(k,w) = 0{,}5 + x,$$

где $P_n(k, w) = C_n^r w^r (1 - w)^{n-r}$ [9].

В табл. 2 приведены сравнительные результаты байесовских $\tilde{\tilde{P}}_1$ и $\tilde{\tilde{P}}_3$, классической $\tilde{\tilde{P}}_2$ и интегральной $\tilde{\tilde{P}}_4$ оценок на примере априорного бета-распределения. Для однородной продукции наиболее подходит априорное бета-распределение с параметрами $\beta >> \alpha$, что и взято за основу при сравнении в табл. 2.

Из табл. 2 следует, что апостериорная оценка $\tilde{\tilde{P}}_1$ соответствующая априорному бета-распределению с параметрами $\beta >> \alpha$ (модель однородной продукции) неадекватно оценивает ВБР, т.е. ее реализации при любых исходах близко группируются возле величины математического ожидания в рамках догмата, основанном на виде априорного распределения, что наглядно показано в сравнении с интегральной оценкой $\tilde{\tilde{P}}_4$.

Обоснуем сделанные выводы, используя критерий эффективности смещенных оценок, для этого воспользуемся результатами работы [10] и сравним предложенные оценки по эффективности. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний n изделий по схеме Бернулли (биномиальный план испытаний). В основе сравнения эффективности смещенных оценок ВБР лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [10], где

$$A\big(\theta(n;R)\big) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 \big(E\theta(n;R) - p\big)^2\, dp$$ – суммарное смещение (в квадрате),

Табл. 3. Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра p	A	D	D/A	$C = D\cdot A\cdot 10000$
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R + \alpha)/(N + \alpha + \beta)$, $\alpha = 2$, $\beta = 94$	0,2797	$8{,}6\times10^{-5}$	<<4	–
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R + \alpha)/(N + \alpha + \beta)$, $\alpha = 2$, $\beta = 20$	0,1653	0,00111	<<4	–
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R + \alpha)/(N + \alpha + \beta)$, $\alpha=2$, $\beta=3$	0,0271	0,00751	<<4	–
$\tilde{\theta}_Q(R) = (R + \alpha)/(N + \alpha + \beta)$, $\alpha=8$, $\beta=4$	0,0567	0,00269	<<4	–
$\tilde{p}(R,n) = (R + 1)/(n + 2)$	0,01046	0,0162	1,55	1,684
$\hat{w} = w(\beta = 0{,}81;n,R) – 0{,}1/((R + 1)n)$	0,00303	0,0427	14,23	1,293
$\hat{p}_{20}(R = 0) = \hat{w}$, $\hat{p}_{20}(R > 0) = R/n$	0,000355	0,0443	124,7	0,157
$p_0 = n/R$ – классическая оценка (эффективная и несмещенная)	0	0,0488	∞	0

$D\left(\theta(n;R)\right) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E\left(\theta(n;R) - E\theta(n;R)\right)^2 dp$ – суммарная дисперсия.

В табл. 3 приведены результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Из табл. 3 следует, что байесовские оценки $\tilde{\theta}_Q(R,n)$ и $\tilde{p}(R,n)$ имеют большое суммарное смещение A и вырожденную суммарную дисперсию D, т.е. в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок байесовские оценки не могут являться эффективными ($D << 4A$), что не позволяет реализациям этих оценок при различных исходах группироваться вокруг истинной величины оцениваемого параметра; и в этом они проигрывают остальным оценкам.

Заметим еще раз, что в данном случае рассматриваются модели однородной продукции [11], поэтому использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для групп однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется. Примерами такого ошибочного использования байесовских оценок являются работы [2, 3]. Байесовские оценки следует использовать только для групп неоднородной продукции. Попытка использования байесовских методов в рамках моделей однородной продукции приводит к значительному увеличению суммарного смещения апостериорных оценок $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_3$ и к вырождению их суммарной дисперсии, что не позволяет реализациям этих оценок группироваться вокруг истинной величины оцениваемого параметра в отличие от несмещенной классической оценки $\tilde{P}_2$ и интегральной смещенной оценки $\tilde{P}_4$, поэтому не следует в моделях однородной продукции использовать байесовские оценки, предназначенные для моделей неоднородной продукции, что и отражено в табл. 1–3. Вместо байесовских оценок в задачах надежности, использующих модели, предназначенные для однородной продукции, следует применять интегральные смещенные оценки. Преимущество интегральных смещенных оценок состоит в том, что эти оценки можно использовать по результатам испытаний, в процессе которых отказы не возникают. В этом случае отпадает необходимость в привлечении математических моделей доверительного оценивания, которые по своей эффективности проигрывают точечным оценкам [4].

Выводы

1. Реализации байесовских оценок при любом исходе группируются в пределах догмата о среднем $1 - \tilde{p}_\alpha = 1 - \alpha/(\alpha+\beta)$, в то время как классическая несмещенная $\tilde{P}_2 = 1 - R/N$ и интегральная смещенная $\tilde{P}_4$ оценки адекватно реагируют на любые внешние изменения. Использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется.

2. Байесовские оценки следует использовать только для групп неоднородной продукции.

3. Вместо байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, следует использовать интегральные смещенные оценки.

Библиографический список

1. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов. М.: Наука, 1989. 328 с.

2. ГОСТ РО 1410-001-2009. Системы и комплексы космические. Порядок задания требований, оценки и контроля надежности. М.: Стандартинформ, 2015. 105 с.

3. Колобов А.Ю., Дикун Е.В. Интервальные оценки безотказности единичных космических аппаратов // Надежность. 2017. № 4. С. 23-26.

4. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука; Издательство Института математики, 1997. 772 с.

5. Шуленин В.П. Математическая статистика. Часть 2. Непараметрическая статистика. Томск: Издательство НТЛ, 2012. 388 с.

6. Крупкина Т.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 2. Электронный курс лекций.

Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. 237 с.

7. Михайлов В.С. Исследование оценок на основе интегрального и байесовского подходов // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 1(21). С. 28-39.

8. Михайлов В.С., Юрков Н.К. Составные байесовские оценки // Надежность и качество сложных систем. 2019. № 4(28). С. 118-126.

9. Михайлов В.С., Юрков Н.К. Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. 149 с.

10. Михайлов В.С. Критерий эффективности смещенных оценок. Новый взгляд на старые проблемы // Надежность. 2022. № 1. С. 30-37.

11. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.

References

1. Savchuk VP. [Bayesian methods of statistical evaluation: Dependability of technical facilities]. Moscow: Nauka; 1989. (in Russ.)

2. GOST RO 1410-001-2009. [Space systems. Procedure for dependability requirements definition, estimation and supervision]. Moscow: Standartinform; 2015. (in Russ.)

3. Kolobov A.Yu., Dikoun E.V. Interval estimation of reliability of one-off spacecraft. *Dependability* 2017;4:23-26.

4. Borovkov AA. [Mathematical statistics]. Novosibirsk: Nauka; 1997. (in Russ.)

5. Shulenin V.P. [Mathematical statistics. Part 2. Nonparametric statistics]. Tomsk: Izdatelstvo NTL; 2012. (in Russ.)

6. Krupkina T.V. [Probability theory and mathematical statistics. Part 2. Electronic series of lectures]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University; 2011. (in Russ.)

7. Mikhaylov V.S. [Study of estimates based on the integral and Bayesian methods]. *Reliability & Quality of Complex Systems* 2018;1(21):28-39. (in Russ.)

8. Mikhaylov V.S., Yurkov N.K. [Composite Bayesian estimates]. *Reliability & Quality of Complex Systems* 2019;4(28):118-126. (in Russ.)

9. Mikhailov V.S., Yurkov N.K. [Integral estimation in the dependability theory. Introduction and main findings]. TEKHNOSFERA; 2020. (in Russ.)

10. Mikhailov V.S. Efficiency criterion of biased estimates. A new take on old problems. *Dependability* 2022;1:30-37.

11. Gnedenko B.V., Beliaev Yu.K., Soloviev A.D. [Mathematical methods in the dependability theory]. Moscow: Nauka; 1965. (in Russ.)

Сведения об авторах

Храмов Сергей Михайлович – кандидат технических наук, главный специалист, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» (ФГУП «ЦНИИХМ»), ул. Нагатинская, д. 16а, Москва, Российская Федерация, 115487, e-mail: khramov_sm@mail.ru

Рудковский Дмитрий Михайлович – кандидат технических наук, начальник отдела, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» (ФГУП «ЦНИИХМ»), ул. Нагатинская, д. 16а, Москва, Российская Федерация, 115487, e-mail: dimond20@mail.ru

Виктор Сергеевич Михайлов – ведущий инженер, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» (ФГУП «ЦНИИХМ»), ул. Нагатинская, д. 16а, Москва, Российская Федерация, 115487, e-mail: Mvs1956@list.ru

About the authors

Sergey M. Khramov, Candidate of Engineering, Chief Specialist, D.I. Mendeleev Central Research and Design Institute of Chemistry and Mechanics (FGUP CNIIHM), 16a Nagatinskaya St., Moscow, 115487, Russian Federation, e-mail: khramov_sm@mail.ru.

Dmitry M. Rudkovsky, Candidate of Engineering, Chief Specialist, D.I. Mendeleev Central Research and Design Institute of Chemistry and Mechanics (FGUP CNIIHM), 16a Nagatinskaya St., Moscow, 115487, Russian Federation, e-mail: dimond20@mail.ru.

Viktor S. Mikhailov, Lead Engineer, D.I. Mendeleev Central Research and Design Institute of Chemistry and Mechanics (FGUP CNIIHM), 16a Nagatinskaya St., Moscow, 115487, Russian Federation, e-mail: Mvs1956@list.ru.

Вклад авторов в статью

Храмов С.М. – идея статьи;

Рудковский Д.М. – написание статьи;

Михайлов В.С. – вычисления**.**

Показано, что использование байесовских оценок в задачах надежности, применяющих модели, предназначенные для однородной продукции, является ошибочным, а необходимости в их использовании не имеется.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.