К вопросу расчета состава запасных элементов, имеющих отказы двух типов

On the calculation of a set of spare parts that have two types of failures

Антонов А.В.[1], Чепурко В.А.[2]*
Alexander V. Antonov[1], Valery A. Chepurko[2]*
[1]АНО ДПО Техническая академия Росатома, Обнинск, Российская Федерация, [2]АО РАСУ, Москва, Российская Федерация
[1]Rosatom Technical Academy, Obninsk, Russian Federation, [2]MPEI, Moscow, Russian Federation
**VAChepurko@rasu.ru*


Антонов А.В.


Чепурко В.А.

Резюме. Цель. *Цель данной работы состоит в построении алгоритма, позволяющего найти необходимое количество запасных элементов (ЗИП) для сложной системы, элементы которой могут быть как ремонтопригодными, так и неремонтопригодными.* **Методы.** *Используются Марковские модели для описания системы. Уравнение Колмогорова для получения финальных вероятностей. Стационарное решение системы уравнений Колмогорова. Классические методы теории вероятностей и математической теории надежности.* **Выводы.** *В статье формализуется задача определения необходимого количества ЗИП для системы с элементами, которые имеют вероятность того, что они могут быть отремонтированы. Построен Марковский граф. Индукционно найдено стационарное решение системы уравнений Колмогорова. Приведен пример нахождения необходимого количества ЗИП.*

Abstract. Aim. *The paper aims to develop an algorithm that would allow finding the required number of items (SPTA) for a complex system, whose elements may or may not be maintainable.* **Methods.** *Markov models were used for describing the system. The final probabilities were obtained using the Kolmogorov equation. The Kolmogorov system of equations has a stationary solution. Classical methods of the probability theory and mathematical dependability theory were used.* **Conclusions.** *The paper formalizes the problem of determining the required number of SPTAs for a system with elements that have a probability of being repaired. A Markov graph is constructed. Using induction, a stationary solution was found for the Kolmogorov system of equations. An example of finding the required number of SPTAs is given.*

Ключевые слова: *Марковский анализ, граф, состояние графа, вероятность перехода, интенсивность отказов, интенсивность восстановления, стационарное решение.*
Keywords: *Markov analysis, graph, graph state, transition probability, failure rate, restoration rate, stationary solution.*

Для цитирования: *Антонов А.В., Чепурко В.А. К вопросу расчета состава запасных элементов, имеющих отказы двух типов // Надежность. 2022. №3. С. 21-28. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-3-21-28*
For citation: *Antonov A.V., Chepurko V.A. On the calculation of a set of spare parts that have two types of failures. Dependability 2022;3: 21-28. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-3-21-28*

Поступила *11.05.2022 г.* / **После доработки** *05.06.2022 г.* / **К печати** *19.09.2022 г.*
Received on: *11.05.2022* / **Revised on:** *05.06.2022* / **For printing:** *19.09.2022.*

Введение

В процессе эксплуатации оборудования объектов повышенного риска, таких как атомные электростанции, летательные аппараты, химические комплексы и т.п., необходимо обеспечить высокий уровень безопасности и надежности их функционирования. Для достижения высоких требований к надежности и безопасности разрабатывается система обеспечения их работоспособности, которая включает профилактическое обслуживание объектов, диагностические и ремонтные средства, комплекты запасных элементов (ЗИП), средства доставки запасных элементов и так далее.

В практике организации эксплуатации систем вопросы обоснования требуемого количества запасных изделий, необходимых для бесперебойного функционирования оборудования, имеют первостепенное значение. Современные подходы к организации эксплуатации, предъявляют требования оптимизации состава запасных изделий.

Вопросы определения оптимального состава ЗИП, а также расчета характеристик надежности систем с учетом запасных элементов, рассматривались в работах как отечественных, так и зарубежных авторов.

В нашей стране понятие запасного элемента впервые введено в работе [1] в 1964 году. Можно констатировать, что данный вопрос не потерял своей актуальности до сих пор. Отметим некоторые работы, опубликованные уже в XXI веке. В работе [2] рассматривается метод расчета надежности систем с наличием запасных элементов. Стратегия функционирования системы предполагает, что в случае отказа элемента он заменяется резервным, а отказавший элемент поступает в ремонтный орган для восстановления. После ремонта элемент пополняет комплект ЗИП. В работе [3] решается задача оптимизации состава запасных элементов с учетом сложной стратегии их функционирования, в предположении, что отказавшее изделие подвергается ремонту. В работах [4, 5] излагается решение задачи оптимизации состава ЗИП при наличии ограничений на стоимость приобретения, доставки и хранения запасных элементов. В работах [6, 7] рассматриваются динамические модели управления составом запасных элементов на предприятии. В статьях [8, 9] решается задача оптимизации комплекта запасных элементов с учетом выработки данными элементами части ресурса. На основе методов теории восстановления решена задача расчета характеристик надежности системы, в случае, когда запасные элементы могут находиться в холодном, теплом и горячем резерве. В работе [10] рассмотрена задача оптимизации комплекта ЗИП для элементов стареющего типа с учетом ограничений на стоимость запасных элементов. На основании методов теории восстановления получен коэффициент готовности системы, в состав которой входят элементы стареющего типа. В [11, 12] излагается задача расчета характеристик надежности систем, элементы которых в случае отказа заменяются работоспособными объектами из состава ЗИП, а отказавший элемент восстанавливается ремонтной бригадой и далее пополняет состав ЗИП. В данных работах учитывается старение объектов в процессе эксплуатации. В качестве модели, учитывающей старение элементов, используются геометрические процессы.

И, наконец, отметим фундаментальную работу [13], в которой с одной стороны приведен достаточно подробный анализ публикаций на тему расчетов надежности систем с учетом запасных элементов, расчетов необходимого количества ЗИП, а с другой стороны приведено описание различных моделей расчета показателей надежности с учетом ЗИП, в том числе в условиях периодического и непрерывного пополнения запасов в комплекте ЗИП, при периодическом пополнении запасов с экстренными доставками, рассмотрены вопросы оптимизации комплекта ЗИП.

Постановка задачи

Рассмотрим функционирование объекта в составе сложной системы. В некоторый случайный момент времени объект может отказать. Отказ объекта приводит его в неработоспособное состояние. Будем предполагать, что отказы могут быть двух типов. Первый тип отказов приводит объект в неработоспособное ремонтопригодное состояние. Второй тип отказов более катастрофичный, приводит объект в неработоспособное неремонтопригодное состояние.

При первом типе отказа неработоспособный, но ремонтопригодный объект заменяется на работоспособный из состава ЗИП. Неработоспособный блок передается для восстановления в ремонтный орган. При втором типе отказа на место отказавшего объекта устанавливается работоспособный блок из комплекта ЗИП, а неработоспособный и неремонтопригодный блок направляется установленным порядком для ремонта на предприятие промышленности.

Естественно предположить, что интенсивность восстановления при первом типе отказа будет существенно выше, чем при втором типе.

Требуется определить объем необходимого комплекта ЗИП таким образом, чтобы вероятность исчерпания ЗИП была не выше заданного уровня.

Построение математической модели

Для расчета необходимого количества ЗИП на предполагаемом промежутке времени будем использовать математическую модель, состоящую в том, что процесс замены осуществляется с возможностью ремонта отказавших элементов.

Неремонтопригодный блок направляется установленным порядком для ремонта на предприятие промышленности, где он будет отремонтирован и возвращен на объект с некоторой известной интенсивностью τ_1.

Ремонтопригодный блок будет отремонтирован непосредственно на эксплуатирующем предприятии с интенсивностью τ_2. Естественно, что $\tau_2 > \tau_1$.

Данная модель соответствует случайному процессу гибели и размножения, который описывается «лавинообразным» графом состояний (рис. 1). Цветом выделены критические состояния, означающие исчерпание ЗИП.

Будем считать, что поток отказов подчиняется трем известным свойствам: ординарности, отсутствия последействия и стационарности.

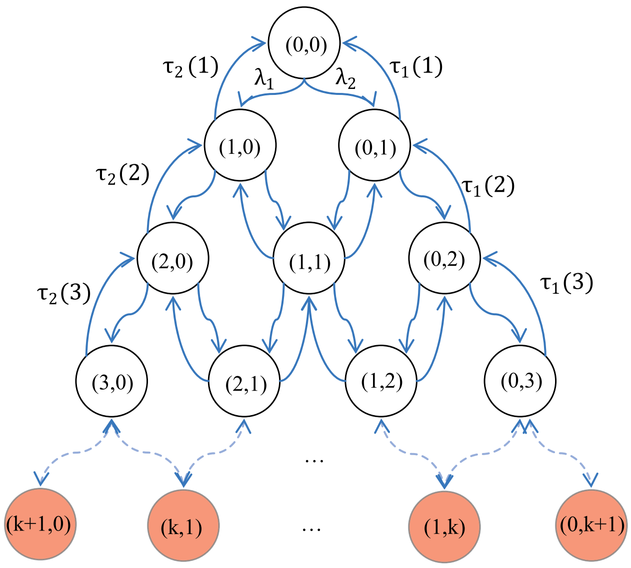

Рис. 1. Граф переходов процесса гибели и размножения

Состояния Марковского графа описываются двухкомпонентным вектором (a, b), в котором a – это количество неремонтопригодных элементов, которые будут отремонтированы на предприятии промышленности, b – количество ремонтопригодных элементов, которые восстанавливаются ремонтным органом предприятия.

Введем некоторые обозначения. Пусть

n – количество однотипных элементов в системе;

k – планируемый объем ЗИП;

λ – интенсивность отказов одного элемента;

q – вероятность ремонтопригодности (оценивается статистически);

T – планируемый промежуток времени обслуживания.

Определим интенсивности переходов в Марковском графе.

Интенсивность перехода «вниз и влево» – $\lambda_{(a,b)\to(a+1,b)}$, происходящего в случае отказа и выявления того факта, что элемент ремонтопригоден будет определяться выражением:

$$\lambda_{(a,b)\to(a+1,b)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1 \cdot R; t, \Delta t\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1; t, \Delta t\right)q}{\Delta t} = n\lambda q = \lambda_1.$$

Здесь A_1 – событие, состоящее в том, что на промежутке времени $(t, t+\Delta t)$ произошел один отказ, R – событие, обозначающее ремонтопригодность элемента.

Интенсивность перехода «вниз и вправо» – $\lambda_{(a,b)\to(a,b+1)}$, происходящего в случае отказа и выявления того факта, что элемент неремонтопригоден будет определяться выражением:

$$\lambda_{(a,b)\to(a,b+1)} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1 \cdot \bar{R}; t, \Delta t\right)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Pr\left(A_1; t, \Delta t\right)\left(1-q\right)}{\Delta t} = n\lambda\left(1-q\right) = \lambda_2.$$

Интенсивность перехода «вверх и влево» – $\lambda_{(a,b)\to(a,b-1)}$. Этот переход происходит в случае восстановления неремонтопригодного объекта:

$$\lambda_{(a,b)\to(a,b-1)} = \begin{cases} \min\left(b, c_1\right)\cdot \mu_0, \text{ если } c \text{ ремонтных бригад}, \\ b\mu_0, \text{ если число бригад неограничено}. \end{cases} =$$
$$= \tau_1\left(b\right), b = 1, 2, \ldots.$$

Интенсивность перехода «вверх и вправо» – $\lambda_{(a,b)\to(a-1,b)}$. Этот переход происходит в случае восстановления ремонтопригодного объекта:

$$\lambda_{(a,b)\to(a-1,b)} = \begin{cases} \min\left(a, c_2\right)\cdot \mu_1, \text{ если } c \text{ ремонтных бригад}, \\ a\mu_1, \text{ если число бригад неограничено}. \end{cases} =$$
$$= \tau_2\left(a\right), a = 1, 2, \ldots.$$

Самая нижняя последовательность состояний Марковского графа, по сути, является событием, связанным с исчерпанием ЗИП. Объем необходимого ЗИП подбирается так, чтобы вероятность исчерпания ЗИП (сумма вероятностей нижних состояний графа) была не выше заданного уровня.

Для данной стратегии напишем систему уравнений Колмогорова для вероятностей состояний вида $(i,0), i = 0,1,\ldots,k+1$:

$$\begin{cases} P'_{0,0} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)P_{0,0} + \tau_2\left(1\right)P_{1,0} + \tau_1\left(1\right)P_{0,1}; \\ P'_{1,0} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_2\left(1\right)\right)P_{1,0} + \lambda_1 P_{0,0} + \tau_2\left(2\right)P_{2,0} + \tau_1\left(1\right)P_{1,1}; \\ P'_{2,0} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_2\left(2\right)\right)P_{2,0} + \lambda_1 P_{1,0} + \tau_2\left(3\right)P_{3,0} + \tau_1\left(1\right)P_{2,1}; \\ \ldots \\ P'_{i,0} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_2\left(i\right)\right)P_{i,0} + \lambda_1 P_{i-1,0} + \tau_2\left(i+1\right)P_{i+1,0} + \\ \quad + \tau_1\left(1\right)P_{i,1}, i = 0,\ldots,k; \\ P'_{k+1,0} = -\tau_2\left(k+1\right)P_{k+1,0} + \lambda_1 P_{k,0}. \end{cases}$$

Система уравнений для вероятностей состояний вида $(i,1), i = 0,1,\ldots,k$:

$$\begin{cases} P'_{0,1} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_1\left(1\right)\right)P_{0,1} + \lambda_2 P_{0,0} + \tau_2\left(1\right)P_{1,1} + \tau_1\left(2\right)P_{0,2}; \\ P'_{1,1} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_1\left(1\right) + \tau_2\left(1\right)\right)P_{1,1} + \lambda_1 P_{0,1} + \lambda_2 P_{1,0} + \\ \quad + \tau_2\left(2\right)P_{2,1} + \tau_1\left(2\right)P_{1,2} \\ P'_{2,1} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_1\left(1\right) + \tau_2\left(2\right)\right)P_{2,1} + \lambda_1 P_{1,1} + \lambda_2 P_{2,0} + \\ \quad + \tau_2\left(3\right)P_{3,1} + \tau_1\left(2\right)P_{2,2} \\ \ldots \\ P'_{i,1} = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \tau_1\left(1\right) + \tau_2\left(i\right)\right)P_{i,1} + \lambda_1 P_{i-1,1} + \lambda_2 P_{i,0} + \\ \quad + \tau_2\left(i+1\right)P_{i+1,1} + \tau_1\left(2\right)P_{i,2}, i = 0,\ldots,k-1; \\ P'_{k,1} = -\left(\tau_1\left(1\right) + \tau_2\left(k\right)\right)P_{k,1} + \lambda_1 P_{k-1,1} + \lambda_2 P_{k,0}. \end{cases}$$

Система уравнений для вероятностей состояний вида $(i,2), i=0,1,\ldots,k-1$:

$$\begin{cases} P'_{0,2}=-\big(\lambda_1+\lambda_2+\tau_1(2)\big)P_{0,2}+\lambda_2P_{0,1}+\tau_2(1)P_{1,2}+\tau_1(3)P_{0,3}; \\ P'_{1,2}=-\big(\lambda_1+\lambda_2+\tau_1(2)+\tau_2(1)\big)P_{1,2}+\lambda_1P_{0,2}+ \\ \quad +\lambda_2P_{1,1}+\tau_2(2)P_{2,2}+\tau_1(3)P_{1,3}; \\ P'_{2,2}=-\big(\lambda_1+\lambda_2+\tau_1(2)+\tau_2(2)\big)P_{2,2}+\lambda_1P_{1,2}+\lambda_2P_{2,1}+ \\ \quad +\tau_2(3)P_{3,2}+\tau_1(3)P_{2,3}; \\ \quad \ldots. \\ P'_{i,2}=-\big(\lambda_1+\lambda_2+\tau_1(2)+\tau_2(i)\big)P_{i,1}+\lambda_1P_{i-1,2}+\lambda_2P_{i,1}+ \\ \quad +\tau_2(i+1)P_{i+1,2}+\tau_1(3)P_{i,3}, i=0,\ldots,k-2; \\ P'_{k-1,2}=-\big(\tau_1(2)+\tau_2(k)\big)P_{k-1,2}+\lambda_1P_{k-2,2}+\lambda_2P_{k-1,1}. \end{cases}$$

Видна общая тенденция в индексации и теперь можно сделать обобщение для общего случая. Уравнения для вероятностей состояний вида $(i,j), i=0,1,\ldots,k, j=0,\ldots,k$ так, что $i+j\le k$ определяются следующим образом:

$$P'_{i,j}=-\big(\lambda_1+\lambda_2+\tau_1(j)+\tau_2(i)\big)P_{i,j}+\lambda_1P_{i-1,j}+ \\ +\lambda_2P_{i,j-1}+\tau_2(i+1)P_{i+1,j}+\tau_1(j+1)P_{i,j+1}. \qquad (1)$$

При этом очевидно считать, что $\tau_1(0)=\tau_2(0)=P_{-1,j}=P_{i,-1}=0,\ i,j\in\{0,1\}$.

Уравнения для вероятностей критических состояний вида (i, j),

$i=0,1,\ldots,k+1, j=k+1-i$ определяются следующим образом:

$$P'_{i,j}=-\big(\tau_1(j)+\tau_2(i)\big)P_{i,j}+\lambda_1P_{i-1,j}+\lambda_2P_{i,j-1}. \qquad (2)$$

Будем искать стационарное решение системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Для этого обнулим левые части уравнений (1) и (2). Заметим, что $\lambda_1+\lambda_2=n\lambda$.

Для случая $i=0,1,\ldots,k, j=0,\ldots,k, i+j\le k$:

$$\big(n\lambda+\tau_1(j)+\tau_2(i)\big)P_{i,j}=\lambda_1P_{i-1,j}+ \\ +\lambda_2P_{i,j-1}+\tau_2(i+1)P_{i+1,j}+\tau_1(j+1)P_{i,j+1}. \qquad (3)$$

Для вероятностей критических состояний $i=0,1,\ldots,k+1, j=k+1-i$:

$$\big(\tau_1(j)+\tau_2(i)\big)P_{i,j}=\lambda_1P_{i-1,j}+\lambda_2P_{i,j-1}. \qquad (4)$$

Будем искать решение от простого к сложному.

Пусть k=0. Получаем $\frac{(k+2)(k+3)}{2}=3$ уравнения:

$$\begin{cases} n\lambda P_{0,0}=\tau_2(1)P_{1,0}+\tau_1(1)P_{0,1}; \\ \tau_1(1)P_{0,1}=\lambda_2P_{0,0}; \\ \tau_2(1)P_{1,0}=\lambda_1P_{0,0}. \end{cases} \qquad (5)$$

Нам необходимо найти сумму вероятностей $P_{1,0}+P_{0,1}$. Если сложить все уравнения, то получится тождество. Воспользуемся тем, что

$$P_{0,0}+P_{1,0}+P_{0,1}=1. \qquad (6)$$

Из второго и третьего уравнения системы (5) выражаем $P_{0,1}=\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)}P_{0,0}$, $P_{1,0}=\frac{\lambda_1}{\tau_2(1)}P_{0,0}$ и подставляем в (6), получаем:

$$P_{0,0}=\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)}+\frac{\lambda_1}{\tau_2(1)}\right)^{-1},$$

$$P_{1,0}+P_{0,1}=1-P_{0,0}=1-\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)}+\frac{\lambda_1}{\tau_2(1)}\right)^{-1}=$$

$$=\left.\left(\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)}+\frac{\lambda_1}{\tau_2(1)}\right)\middle/\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)}+\frac{\lambda_1}{\tau_2(1)}\right)\right..$$

Пусть k=1. Получаем $\frac{(k+2)(k+3)}{2}=6$ уравнений:

$$\begin{cases} n\lambda P_{0,0}=\tau_2(1)P_{1,0}+\tau_1(1)P_{0,1}; \\ \big(n\lambda+\tau_1(1)\big)P_{0,1}=\lambda_2P_{0,0}+\tau_2(1)P_{1,1}+\tau_1(2)P_{0,2}; \\ \big(n\lambda+\tau_2(1)\big)P_{1,0}=\lambda_1P_{0,0}+\tau_2(2)P_{2,0}+\tau_1(1)P_{1,1}; \\ \tau_1(2)P_{0,2}=\lambda_2P_{0,1}; \\ \big(\tau_1(1)+\tau_2(1)\big)P_{1,1}=\lambda_1P_{0,1}+\lambda_2P_{1,0}; \\ \tau_2(2)P_{2,0}=\lambda_1P_{1,0}. \end{cases} \qquad (7)$$

Из 4-го, 5-го и 6-го уравнений выразим вероятности критических состояний:

$$P_{0,2}=\frac{\lambda_2}{\tau_1(2)}P_{0,1},\quad P_{1,1}=\frac{\lambda_1}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{0,1}+\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0},$$

$$P_{2,0}=\frac{\lambda_1}{\tau_2(2)}P_{1,0}. \qquad (8)$$

Подставим это во 2-е уравнение.

$$\big(n\lambda+\tau_1(1)\big)P_{0,1}=\lambda_2P_{0,0}+\frac{\lambda_1\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{0,1}+ \\ +\frac{\lambda_2\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0}+\lambda_2P_{0,1}.$$

Преобразуем

$$\left(\lambda_1+\tau_1(1)-\frac{\lambda_1\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{0,1}=\lambda_2P_{0,0}+\frac{\lambda_2\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0},$$

$$\left(\tau_1(1)+\frac{\lambda_1\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{0,1}=\lambda_2P_{0,0}+\frac{\lambda_2\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0},$$

$$\tau_1(1)\left(1+\frac{\lambda_1}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{0,1}=\lambda_2 P_{0,0}+\frac{\lambda_2\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0},$$

$$\frac{\tau_1(1)}{\lambda_2}\left(1+\frac{\lambda_1}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{0,1}=P_{0,0}+\frac{\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0}. \quad (9)$$

Подставим (8) в 3-е уравнение

$$(n\lambda+\tau_2(1))P_{1,0}=\lambda_1 P_{0,0}+\lambda_1 P_{1,0}+$$
$$+\frac{\lambda_1\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{0,1}+\frac{\lambda_2\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0}.$$

Преобразуем

$$\left(\lambda_2+\tau_2(1)-\frac{\lambda_2\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{1,0}=\lambda_1 P_{0,0}+\frac{\lambda_1\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{0,1},$$

$$\left(\tau_2(1)+\frac{\lambda_2\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{1,0}=\lambda_1 P_{0,0}+\frac{\lambda_1\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{0,1},$$

$$\tau_2(1)\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{1,0}=\lambda_1 P_{0,0}+\frac{\lambda_1\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{0,1},$$

$$\frac{\tau_2(1)}{\lambda_1}\left(1+\frac{\lambda_2}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{1,0}=P_{0,0}+\frac{\tau_1(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{0,1}. \quad (10)$$

Вычитая из (9) и (10) получим

$$\frac{\tau_1(1)}{\lambda_2}\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{0,1}=\frac{\tau_2(1)}{\lambda_1}\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{1,0},$$

$$P_{0,1}=\frac{\tau_2(1)\lambda_2}{\tau_1(1)\lambda_1}P_{1,0}. \quad (11)$$

Подставим это в (9)

$$\frac{\tau_2(1)}{\lambda_1}\left(1+\frac{\lambda_1}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{1,0}=P_{0,0}+\frac{\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0},$$

$$\frac{\tau_2(1)}{\lambda_1}\left(1+\frac{\lambda_1}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}\right)P_{1,0}=P_{0,0}+\frac{\tau_2(1)}{\tau_1(1)+\tau_2(1)}P_{1,0},$$

$$P_{0,0}=\frac{\tau_2(1)}{\lambda_1}P_{1,0}. \quad (12)$$

Выразим все через $P_{0,0}$:

$$\begin{cases} P_{1,0}=\dfrac{\lambda_1}{\tau_2(1)}P_{0,0}; \\ P_{0,1}=\dfrac{\lambda_2}{\tau_1(1)}P_{0,0}; \\ P_{1,1}=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\tau_1(1)\tau_2(1)}P_{0,0}; \\ P_{0,2}=\dfrac{\lambda_2^2}{\tau_1(1)\tau_1(2)}P_{0,0}; \\ P_{2,0}=\dfrac{\lambda_1^2}{\tau_2(1)\tau_2(2)}P_{0,0}. \end{cases} \quad (13)$$

Из условия нормировки получаем:

$$P_{0,0}=\left(\begin{matrix}1+\dfrac{\lambda_1}{\tau_2(1)}+\dfrac{\lambda_2}{\tau_1(1)}+\dfrac{\lambda_1^2}{\tau_2(1)\tau_2(2)}+\\ +\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\tau_1(1)\tau_2(1)}+\dfrac{\lambda_2^2}{\tau_1(1)\tau_1(2)}\end{matrix}\right)^{-1}. \quad (14)$$

Вероятность попадания в критическое состояние –

$$P_{0,2}+P_{1,1}+P_{2,0}=\left(\begin{matrix}\dfrac{\lambda_1^2}{\tau_2(1)\tau_2(2)}+\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\tau_1(1)\tau_2(1)}+\\ +\dfrac{\lambda_2^2}{\tau_1(1)\tau_1(2)}\end{matrix}\right)P_{0,0}. \quad (15)$$

Пусть k=2. Получаем $\dfrac{(k+2)(k+3)}{2}=10$ уравнений:

$$\begin{cases} n\lambda P_{0,0}=\tau_2(1)P_{1,0}+\tau_1(1)P_{0,1} \\ (n\lambda+\tau_1(1))P_{0,1}=\lambda_2 P_{0,0}+\tau_2(1)P_{1,1}+\tau_1(2)P_{0,2} \\ (n\lambda+\tau_2(1))P_{1,0}=\lambda_1 P_{0,0}+\tau_2(2)P_{2,0}+\tau_1(1)P_{1,1} \\ (n\lambda+\tau_1(2))P_{0,2}=\lambda_2 P_{0,1}+\tau_2(1)P_{1,2}+\tau_1(3)P_{0,3} \\ (n\lambda+\tau_1(1)+\tau_2(1))P_{1,1}= \\ =\lambda_1 P_{0,1}+\lambda_2 P_{1,0}+\tau_2(2)P_{2,1}+\tau_1(2)P_{1,2} \\ (n\lambda+\tau_2(2))P_{2,0}=\lambda_1 P_{1,0}+\tau_2(3)P_{3,0}+\tau_1(1)P_{2,1} \\ \tau_1(3)P_{0,3}=\lambda_2 P_{0,2} \\ (\tau_1(2)+\tau_2(1))P_{1,2}=\lambda_1 P_{0,2}+\lambda_2 P_{1,1} \\ (\tau_1(1)+\tau_2(2))P_{2,1}=\lambda_1 P_{1,1}+\lambda_2 P_{2,0} \\ \tau_2(3)P_{3,0}=\lambda_1 P_{2,0} \end{cases} \quad (16)$$

Предположение. Если выражения (13) неизменны при увеличении k, то это позволит легко найти решение

$$\begin{cases} P_{1,0}=\dfrac{\lambda_1}{\tau_2(1)}P_{0,0}; \\ P_{0,1}=\dfrac{\lambda_2}{\tau_1(1)}P_{0,0}; \\ P_{1,1}=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\tau_1(1)\tau_2(1)}P_{0,0}; \\ P_{0,2}=\dfrac{\lambda_2^2}{\tau_1(1)\tau_1(2)}P_{0,0}; \\ P_{2,0}=\dfrac{\lambda_1^2}{\tau_2(1)\tau_2(2)}P_{0,0}; \\ P_{0,3}=\dfrac{\lambda_2^3}{\tau_1(1)\tau_1(2)\tau_1(3)}P_{0,0}; \\ P_{1,2}=\dfrac{\lambda_1\lambda_2^2}{\tau_1(1)\tau_1(2)\tau_2(1)}P_{0,0}; \\ P_{2,1}=\dfrac{\lambda_1^2\lambda_2}{\tau_1(1)\tau_2(1)\tau_2(2)}P_{0,0}; \\ P_{3,0}=\dfrac{\lambda_2^3}{\tau_2(1)\tau_2(2)\tau_2(3)}P_{0,0}. \end{cases}$$

Общее решение

$$P_{i,j}=\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{0,0}, \qquad (17)$$

при условии $\prod_{m=1}^{0}\tau_k(m)=1$.

Следовательно

$$P_{0,0}=\left(\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\le k+1}}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}\right)^{-1} \qquad (18)$$

Тогда вероятность попадания в совокупность критических состояний:

$$\sum_{i=0}^{k+1}P_{i,k+1-i}=P_{0,0}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k+1-i}}{\left(\prod_{m=1}^{k+1-i}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}. \qquad (19)$$

Осталось доказать предположение.

Доказательство. Подставим решение в (3) и (4). Сначала в (3)

$$\lambda_1P_{i-1,j}+\lambda_2P_{i,j-1}+\tau_2(i+1)P_{i+1,j}+\tau_1(j+1)P_{i,j+1}=$$

$$=\left(\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i-1}\tau_2(m)\right)}+\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j-1}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_1^{i+1}\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}+\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{j+1}}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}\right)P_{0,0}=$$

$$=\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j\left(\tau_1(j)+\tau_2(i)+\lambda_1+\lambda_2\right)}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{0,0}=\left(n\lambda+\tau_1(j)+\tau_2(i)\right)P_{i,j}.$$

Доказано. Теперь в (4).

$$\lambda_1P_{i-1,j}+\lambda_2P_{i,j-1}=$$

$$=\left(\begin{array}{c}\dfrac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i-1}\tau_2(m)\right)}+\\ +\dfrac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j-1}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}\end{array}\right)P_{0,0}=$$

$$=\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j\left(\tau_1(j)+\tau_2(i)\right)}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}P_{0,0}=\left(\tau_1(j)+\tau_2(i)\right)P_{i,j}.$$

Что и требовалось доказать.

В случае неограниченного восстановления выражения (18) и (19) можно упростить. Входящие в них суммы будут выглядеть следующим образом. Первая сумма:

$$\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j\le k+1}}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{\left(\prod_{m=1}^{j}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}=\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{j=0}^{k+1-i}\frac{1}{j!\times i!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^j=$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{(k+1-i)!\times i!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1-i}+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(k-i)!\times i!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k-i}+\ldots+$$

$$+\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{1!\times i!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{1-i}+\sum_{i=0}^{0}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i=\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k}+\ldots+1=e_{k+1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right),$$

где $e_n(x)=\sum_{0}^{n}\frac{x^n}{n!}$ – конечная сумма разложения экспоненты e^x в ряд.

Вторая сумма – это разложение степени бинома с точностью до множителя.

$$\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k+1-i}}{\left(\prod_{m=1}^{k+1-i}\tau_1(m)\right)\times\left(\prod_{m=1}^{i}\tau_2(m)\right)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{(k+1-i)!\times i!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1-i}=$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}.$$

Тогда

$$P_{0,0}=e_{k+1}^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right). \qquad (20)$$

Вероятность попадания в совокупность критических состояний:

$$\sum_{i=0}^{k+1}P_{i,k+1-i}=\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}\cdot e_{k+1}^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right) \qquad (21)$$

Критерий определения необходимого объема ЗИП – k формулируется классическим образом. Объем k увеличивается до тех пор, пока не выполнится неравенство:

$$\sum_{i=0}^{k+1}P_{i,k+1-i}\le\varepsilon, \qquad (22)$$

где ε – задаваемая вероятность нехватки ЗИП.

Пример расчета необходимого числа запасных элементов

В качестве примера расчета необходимого числа запасных элементов рассмотрим некоторые электронные компоненты, функционирующие в составе сложной системы. Рассмотрим исходные данные для расчета:

- количество однотипных объектов в системе – $n = 30$ единиц,

- интенсивность отказов одного объекта – $\lambda = 2{,}92\cdot10^{-5}$ 1/час,

- интенсивность восстановления неремонтопригодного объекта – $\mu_0 = 1{,}389\cdot10^{-3}$ 1/час,

Табл. 1. Вероятность нехватки ЗИП при различных *k*.

k	0	1	2	3
$\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}$	$2{,}12\cdot10^{-1}$	$2{,}24\cdot10^{-2}$	$1{,}58\cdot10^{-3}$	$8{,}35\cdot10^{-5}$
$e_{k+1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)$	1,21	1,23	1,24	1,24
$\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)^{k+1}\cdot e_{k+1}^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_0}\right)$	$1{,}75\cdot10^{-1}$	$1{,}81\cdot10^{-2}$	$1{,}28\cdot10^{-3}$	$6{,}75\cdot10^{-5}$

- интенсивность восстановления ремонтопригодного объекта – $\mu_1 = 4{,}167\cdot10^{-2}$ 1/час,

- вероятность ремонтопригодности – $q = 0{,}6875$,

- число ремонтных бригад – неограниченно,

- вероятность достаточности ЗИП – $1 - \varepsilon = 0{,}999$.

Для расчетов будем использовать выражение (21). Приведем вспомогательные выкладки:

$$\lambda_1 = n\lambda q = 6{,}02\cdot10^{-4}\ \text{1/ч};$$

$$\lambda_2 = n\lambda q = 2{,}74\cdot10^{-4}\ \text{1/ ч};$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = 1{,}45\cdot10^{-2};$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_0} = 1{,}97\cdot10^{-1};$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_0} = 2{,}12\cdot10^{-1}.$$

Для вычисления $e_n(x) = \sum_0^n \frac{x^n}{n!}$ был написан макрос. Результат расчетов необходимого объема ЗИП при различных k приведен в табл. 1.

Расчет по разработанной методике показывает, что необходимое количество запасных электронных компонентов, удовлетворяющее заданной вероятности достаточности ЗИП, равно 3 единицам, поскольку $6{,}75\cdot10^{-5}<10^{-3}$.

В случае ограниченного восстановления авторами был также разработан соответствующий макрос, рассчитывающий (19). Так, в случае наличия одной обслуживающей бригады необходимый объем ЗИП увеличивается до 4 единиц при тех же остальных исходных данных. При двух и более бригадах достаточно 3 единиц ЗИП.

Заключение

Таким образом, рассмотрена задача обеспечения запасными элементами сложного дорогостоящего оборудования, подверженного двум типам отказов. В одном случае в результате отказа объект переходит в неработоспособное ремонтопригодное состояние и его восстановление возможно в ремонтном подразделении предприятия, на котором объект эксплуатируется. Во втором случае в результате отказа объект переходит в неработоспособное неремонтопригодное состояние и его восстановление возможно только на предприятии изготовителе или на специализированных ремонтных предприятиях. Ввиду высокой стоимости объекта его экономически целесообразнее доставить на специализированное предприятие и выполнить восстановление.

Библиографический список

1. Шишонок Н.А., Репкин В.Ф., Барвинский Л.Л. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры. М.: Сов. радио, 1964. 552 с.

2. Антонов А.В., Пляскин А.В. К вопросу расчета надежности системы с ограниченным количеством запасных элементов // Известия вузов. Ядерная энергетика. 2000. № 2. С. 12-23.

3. Антонов А.В., Пляскин А.В., Чепурко В.А. Оптимизация числа запасных элементов оборудования, важных для безопасности АЭС // Методы менеджмента качества. 2001. № 8. С. 27-31.

4. Антонов А.В., Пляскин А.В. Определение оптимального количества запасных элементов системы с учетом ограничений на стоимость // Надежность. 2003. № 4. С. 9-16.

5. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. Оптимизация состава запасных изделий энергоблоков АЭС методом нелинейного программирования // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18. Вып. 1. С. 100-101.

6. Чепурко В.А., Унщиков А.П. Об одной динамической модели управления запасами на предприятии // Надежность. 2009. № 4. С. 22-28.

7. Чепурко В.А., Унщиков А.П. Исследование динамических моделей управления запасами на предприятии // Надежность. 2010. № 3. С. 40-47.

8. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. К вопросу оптимизации комплекта запасных изделий с учетом частичной выработки их ресурса // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 1. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=5547 (дата обращения: 03.06.2022).

9. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. Повышение качества функционирования систем управления за счет оптимизации состава запасных элементов // Качество, инновации, образование. 2012. № 7. С. 51-56.

10. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. Оптимизация состава запасных изделий энергоблоков АЭС

с учетом частичной выработки их ресурса // Ядерная физика и инжиниринг. 2012. Т. 3. № 5. С. 408-415.

11. Антонов А.В., Пляскин А.В., Татаев Х.Н. К вопросу расчета надежности резервированных структур с учетом старения элементов // Надежность. 2013. № 1(44). С. 55-61.

12. A. Antonov, A. Plyaskin and Kh. Tataev. Calculation of the Redundant Structure Reliability for Aging type Elements. Pp. 383-390 / In book: Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis, Wiley-ISTE, Nov. 2013, 416 p.

13. Черкесов Г.Н. Оценка надежности систем с учетом ЗИП: учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 480 с.: ил. + CD-ROM.

References

1. Shishonok N.A., Repkin V.F., Barvinsky L.L. [Foundations of the theory of

2. dependability and operation of electronic equipment]. Moscow: Sovetskoye radio; 1964. (in Russ.)

3. Antonov A.V., Plyaskin A.V. On a Question of Calculation of Reliability of a System with Restricted Number of Spare Elements. *Izvestiya vuzov. Yadernaya Energetika* 2000;2:12-23. (in Russ.)

4. Antonov A.V, Plyaskin A.V., Chepurko V.A. [Optimizing the number of spare parts of safety-critical nuclear power plant equipment]. *Methods of quality management* 2001;8:27-31. (in Russ.)

5. Antonov A.V., Plyaskin A.V. [Identifying the optimal number of spare elements of a system subject to cost restrictions]. *Dependability* 2003;4:9-16. (in Russ.)

6. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tatayev Kh.N. [Optimizing spare components of nuclear power plant reactors using nonlinear programming]. *Surveys on Applied and Industrial Mathematics* 2011;1(18):100-101. (in Russ.)

7. Chepurko V.A., Unshchikov A.P. [On a dynamic stock management model]. *Dependability* 2009;4:22-28. (in Russ.)

8. Chepurko V.A., Unshchikov A.P. [Study of dynamic stock management models]. *Dependability* 2010;3:40-47. (in Russ.)

9. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tatayev K.N. Optimization of Spare Products and Devices Complete Sets Taking into Account the Reduction of its Resource. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* 2012;1:1-8. [accessed 03.06.2022]. Available at: https://science-education.ru/ru/article/view?id=5547. (in Russ.)

10. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tataev Kh.N. Improving Functioning of Control Systems by Force of Spare Elements Optimization. *Kachestvo, innovatsii, obrazovanie* 2012;7:51-56. (in Russ.)

11. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tataev H.N. [Optimizing the Spare Component Kit of Nuclear Power Plant Reactors Providing for Partial Depletion]. *Nuclear Physics and Engineering* 2012;3(5):408-415. (in Russ.)

12. Antonov A.V., Plyaskin A.V., Tataev H.N. On the Issue of Reliability Calculation for Redundant Structures in View of Ageing Elements. *Dependability* 2013;1:55-61. (in Russ.)

13. Antonov A., Plyaskin A., Tataev Kh. Calculation of the Redundant Structure Reliability for Aging Type Elements. In: Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis; 2013. Pp. 383-390.

14. Cherkesov G.N. [System dependability assessment with STPA taken into consideration: a textbook]. Saint Petersburg: BHV-Peterburg; 2012. (in Russ.)

Сведения об авторах

Антонов Александр Владимирович – доктор технических наук, профессор, главный эксперт департамента международного сотрудничества и развития международного бизнеса Автономной некоммерческой организации дополнительного профессионального образования «Техническая академия Росатома», Обнинск, Российская Федерация, e-mail: AVAntonov@rosatomtech.ru

Чепурко Валерий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, главный специалист отдела расчетных обоснований проектных решений АО РАСУ, Москва, Российская Федерация, e-mail: VAChepurko@rasu.ru

About the authors

Alexander V. Antonov, Doctor of Engineering, Professor, Chief Expert, Department for International Cooperation and Global Business Development, Rosatom Technical Academy, Obninsk, Russian Federation, e-mail: AVAntonov@rosatomtech.ru

Valery A. Chepurko, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Chief Specialist, Division for Computational Substantiation of Design Solutions, RASU, Moscow, Russian Federation, e-mail: VAChepurko@rasu.ru

Вклад авторов в статью

Антонов А.В. провел обзор литературы, формализовал Марковский граф и нашел частные решения.

Чепурко В.А. нашел общее решение.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.