Надежность, том 22, №2, 2022 / Dependability 2, 2022
Системный анализ. Структурная надежность

УДК 519.248:62-192
Оригинальная статья / Original article
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-2-30-37

Улучшение эффективности оценок показателей надежности различных планов испытаний однородной продукции

Improving the efficiency of estimation of the dependability indicators of various test plans of homogeneous product

Виктор С. Михайлов, *Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева», Москва, Российская Федерация*
Viktor S. Mikhailov, *D.I. Mendeleev Central Research and Design Institute of Chemistry and Mechanics, Moscow, Russian Federation*
mvs1956@list.ru

Виктор С. Михайлов

Резюме. *Улучшение эффективности оценок различных планов испытаний однородной продукции основано на использовании критерия эффективности смещенных оценок C( ), где – некоторая оценка параметра. Процесс выбора эффективных смещенных оценок включает: предлагаемые оценки должны быть строго монотонны по всем своим параметрам; выбираются оценки с минимальным смещением A( ) = b^2 или близкими к таковым. Если в процессе выбора из числа предложенных оценок оказалась единственная несмещенная оценка, то она и является эффективной. Для того, чтобы эта оценка оказалась эффективной в классе несмещенных оценок, необходимо доказать неравенство Крамера-Рао для этой оценки; исключаются оценки для которых выполняется неравенство A = b^2 > D, т.е. смещение превалирует над разбросом значений этой оценки; выбираются оценки, для которых выполняется неравенство D/A > 4, т.е. оценки, для которых их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон; среди оставшихся оценок выбираются оценки с минимальным смещением A( ) = b^2. В случае единственной выбранной оценки с минимальным смещением A эта оценка признается эффективной; в случае с равными A в качестве эффективной среди них выбирается оценка с минимальной дисперсией. В качестве критерия эффективности смещенных оценок устанавливается характеристика C( ) = D·b^2. Предлагаемые оценки вероятности безотказной работы (вероятности отказа) должны быть: строго монотонны по всем своим параметрам, не равны нулю и единице.* **Цель работы.** *Целью работы является получение эффективных оценок вероятности безотказной работы для биномиального плана испытаний и плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением при использовании критерия эффективности смещенных оценок.* **Методы исследования.** *Для нахождения эффективной по смещению оценки использовались интегральные числовые характеристики точности оценки, а именно: суммарный квадрат смещения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от исследуемых параметров законов распределений и т.д.* **Выводы.** *Получены эффективные по смещению оценки вероятности безотказной работы для биномиального плана испытаний и плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением. Полученные оценки вероятности безотказной работы имеют направленность практического применения при испытаниях и эксплуатации изделий различного назначения, в процессе которых отказы не возникали.*

Abstract. *Improving the efficiency of comparison of various test plans for homogeneous products is based on the use of the efficiency criterion of biased estimates C( ), where is a certain parameter estimate. The process of selecting efficient biased estimates involves the following: all parameters of the submitted estimates are to be strictly monotone; the estimates with minimal bias A( ) = b^2 or close to it are chosen. If, in the process of selection out of the proposed estimates, there is a single unbiased estimate, then the latter is the efficient one. For this estimate to be efficient in the class of unbiased estimates, it is required to prove the Cram r-Rao inequality for such estimate; estimates, for which inequality A = b^2 > D is fulfilled, i.e., the bias prevails over the value scatter of such estimate, are excluded; estimates are selected, for which the inequality D/A > 4 is fulfilled, i.e., the estimates, for which the realizations are grouped around the true quantitative value of the estimated parameter from different sides; out of the remaining estimates, the estimate with the minimum bias A( ) = b^2 is selected. In case a single estimate with minimum bias A has been selected, such estimate is considered efficient; in case A are equal, the estimate with minimal variance is chosen as the efficient one. As the efficiency criterion of biased estimates, characteristic C( ) = D·b^2 is specified. The suggested probability of no-failure (failure) estimates are to be strictly monotone in terms of all parameters and not equal to zero or one.* **The Aim of the paper.** *The paper aims to obtain* *efficient estimates of the probability of no-failure for the binomial test plan and the test plan with limited time and recovery using the efficiency criterion of biased estimates.* **Methods of research.** *A bias-efficient estimate was found using integral numerical characteristics of estimation accuracy, i.e., total squared bias of the expected realization of a certain estimate off of the examined parameters of the distribution laws, etc.* **Conclusions.** *Bias-efficient estimates were obtained of the probability of no-failure for the binomial test plan and the test plan with limited time and recovery. The obtained probability of no-failure estimates are practically applicable as part of testing and operation of various products not associated with failures.*

Ключевые слова: *оценка, эффективная оценка, критерий эффективности, план испытаний, смещенные оценки.*
Keywords: *estimation, efficient estimation, criterion of efficiency, test plan, biased estimates.*

Для цитирования: *Михайлов В.С. Улучшение эффективности оценок показателей надежности различных планов испытаний однородной продукции // Надежность. 2022. №2. С. 30-37. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-2-30-37*
For citation: *Mikhailov V.S. Improving the efficiency of estimation of the dependability indicators of various test plans of homogeneous product. Dependability 2022;2:30-37. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-2-30-37*

Поступила *28.03.2022 г.* / **После доработки** *11.05.2022 г.* / **К печати** *17.06.2022 г.*
Received on: *28.03.2022* / **Revised on:** *11.05.2022* / **For printing:** *17.06.2022.*

Улучшение эффективности оценок различных планов испытаний однородной продукции [1] основано на использовании критерия эффективности смещенных оценок $C(\theta)$ [2], где θ – некоторая оценка параметра. Обозначим через $A(\theta)$ суммарное смещение оценки θ от оцениваемого параметра t, а через $B(\theta)$ – суммарное уклонение оценки θ от оцениваемого параметра t. Заметим, что суммирование происходит в рабочем диапазоне по всем значениям оцениваемого параметра t, так и по всем значениям параметров плана испытаний и иных параметров, например, время за которое оценивается вероятность безотказной работы (ВБР).

Для нужд построения критерия эффективности смещенных оценок будем произвольную статистическую оценку θ характеризовать смещением и дисперсией. Обозначим через $b = E(\theta) - t$ смещение оценки θ от параметра t, где E – математическое ожидание, а через D – дисперсию оценки θ. Тогда уклонение (в среднем квадратичном смысле) некоторой оценки θ от оцениваемого параметра t выражается формулой [2, 3, 4]:

$$B(\theta) = E(\theta - t)^2 = D + b^2. \quad (1)$$

Заметим, что уклонение, как характеристика эффективности, при изменении дисперсии тоже изменяется на эту величину (см. формулу (1)). Т.е. ее изменение происходит без учета зависимости от конкретной величины смещения оценки. Попытаемся связать дисперсию и квадрат смещения так, чтобы при изменении дисперсии уклонение менялось с учетом смещения. Учтем, что смещение является первичным фактором при выборе эффективной оценки в классе смещенных оценок. И потребуем от вновь построенной характеристики $C(\theta)$, чтобы при изменении дисперсии на величину δD для небольших смещений $b \approx 0 + \delta$ учет влияния смещения на характеристику был незначительным, и наоборот, для больших смещений $b >> 0$ учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был значительным. И потребуем, чтобы изменение характеристики $C(\theta)$ было линейным относительно характеристик D и b^2. Этим требованиям наиболее полно подходит произведение характеристик D и b^2, которое и является критерием эффективности смещенных оценок [2]:

$$C(\theta) = D \cdot b^2. \quad (2)$$

В случае несмещенных оценок такой характеристикой (критерием) служит уклонение $B(\theta)$ (см. формулу (1)).

Сформулируем требования к процессу выбора в классе смещенных оценок эффективных оценок:

– предлагаемые оценки должны быть строго монотонны по всем своим параметрам;

– выбираются оценки с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$ или близкими к таковым. Если в процессе выбора из числа предложенных оценок оказалась единственная несмещенная оценка, то она и является эффективной. Для того, чтобы эта оценка оказалась эффективной в классе несмещенных оценок, необходимо доказать неравенство Крамера-Рао для этой оценки;

– выбираются оценки, для которых выполняется неравенство $D > 4A$, т.е. оценки, для которых их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон; и исключаются оценки для которых выполняется обратное неравенство $4b^2 > D$, т.е. смещение превалирует над разбросом значений этой оценки;

– среди оставшихся оценок выбираются оценки с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$. В случае единственной выбранной оценки с минимальным смещением A эта оценка признается эффективной по смещению;

– в случае с равными A в качестве эффективной по смещению выбирается оценка с минимальной дисперсией.

В качестве критерия эффективности оценок по смещению устанавливается характеристика $C(\theta) = D \cdot A$ [2], т.е. в основе сравнения эффективности по смещению оценок показателей надежности лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \cdot D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$.

Цель работы. Целью работы является получение эффективных оценок показателей надежности для биномиального плана испытаний и плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением при использовании критерия эффективности смещенных оценок.

Заметим, что оценки показателей надежности, предлагаемые для сравнения в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок, должны быть: строго монотонны по всем своим параметрам, для вероятности – строго больше нуля и строго меньше единицы, что соответствует случайной модели отказа изделий. Оценки, которые при $R = 0$ и любом объеме n реализуются константой $\theta(R,n) = \mathrm{Const}$ (например, нулем или единицей) не соответствуют случайной модели отказа изделий и, как не имеющие физической интерпретации, вызывают большие сомнения в своей эффективности при нулевом исходе. В качестве предлагаемых оценок следует использовать составные оценки, состоящие из двух частей: первая часть соответствует $R = 0$, вторая часть – $R > 0$. Именно такие составные оценки, как правило, в своем классе доставляют функционалу $A(\theta)$ минимум [5, 6]. В качестве примера можно привести эффективную смещенную оценку средней наработки до отказа для плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий (NВτ), где $N = n$ – число испытуемых изделий, В – признак восстановления изделий, τ – время испытаний [1]: $\approx T_0(R{=}0) = 2N\tau$, $\approx T_0(R > 0) = N\tau/(R + 1)$ [5, 6]. Оценка $\approx T_0$ в классе смещенных оценок вида $\approx\theta(N,R,\tau) = N\tau/(R + 1) + N\tau f(R)$, где $f(R)$ – произвольная функция, которая доставляет функционалу $A(\theta)$ минимум $A(\approx T_0) = 0{,}25$. А, следовательно, оценка $\approx T_0$ в этом классе является эффективной. Дальнейшее улучшение свойств оценок эффективных в данном классе смещенных оценок приводит к расширению класса, например, $\hat{\theta}(N,R,\tau) = N\tau/(R + \beta(R))$ [2]. Легко доказать, что класс оценок $\hat{\theta}(N,R,\tau)$ шире класса $\approx\theta(N,R,\tau)$ [2].

Биномиальный план испытаний. Средняя наработка до отказа

Будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей (з. р.) с параметром T_0, где последний совпадает со средней наработкой до отказа (СНДО). Время испытаний каждого из $N = n$ изделий обозначим через τ. Здесь и далее ограничим объем испытаний $0 < n \le 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат.

В основе сравнения эффективности смещенных оценок СНДО лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \cdot D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [2], где

$$A\left(\theta(n;R)\right) = \frac{1}{3}\sum_{\tau=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}\left\{E\theta(n;R,\tau) - t\right\}^2 dt$$

– функционал, основанный на суммировании нормированных квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\theta(R,n)$ от параметра t экспоненциального з. р. (СНДО) для всех возможных значений N, τ, $T_0 = t$ [2],

$$D\left(\theta(n;R)\right) = \frac{1}{3}\sum_{\tau=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^\infty \frac{1}{t^2}E\left\{\theta(n;R,\tau) - E\theta(n;R,\tau)\right\}^2 dt$$

– нормированная суммарная дисперсия.

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра (СНДО) t из $[0;\infty]$. В [2] приведены оценки условно эффективные в классе смещенных оценок параметра СНДО :

$T_{20} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0{,}4)/(n + 0{,}4))$;

$T_{60} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}75/\mathrm{Ln}(1 - \nu(R,n,\gamma = 0{,}62)$.

Однако применяя составные оценки, можно получить более эффективные смещенные оценки. С этой целью рассмотрим следующие составные оценки, а именно:

$T_\tau(R{=}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$,

$T_\tau(R{>}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$;

$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$,

$T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) - \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$.

Табл. 1. Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра СНДО	A	D	D / A	$C = D\cdot A\cdot 10000$
Оценки параметра СНДО, предложенные для биномиального плана испытаний в [2]				
$T_{20} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0{,}4)/(n + 0{,}4))$	4,62	7,06	1,52	32,61
$T_{60} = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}75/\mathrm{Ln}(1 - \nu(R,n,\gamma = 0{,}62))$	4,85	5,47	1,12	26,52
Оценки, предлагаемые для биномиального плана испытаний в настоящей статье				
$T_\tau(R{=}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}7/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3) / (n + 0{,}3))$, $T_\tau(R{>}0) = 400 + 0{,}015\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}8/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$	4,33	11,69	2,70	50,88
$T_{\tau 2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$, $T_{\tau 2}(R{>}0) = 400 + 0{,}01\cdot\tau - \tau\cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2)) - \tau^2\cdot 2\cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R{>}0) + 2)/(n + 2))$	2,43	72,46	29,86	176,0

В табл. 1 приведены результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний.

Здесь и далее вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial t = 10^{k=3,\ldots,6}$. При построении таблиц использовался вариант вычисления характеристики $C = D\cdot A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D\cdot A$.

Из табл. 1 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $T_{\tau 2}$ с величиной характеристики $C = 176$, т.к. остальные оценки, обладающие меньшими величинами характеристики C, как не удовлетворяющие критерию отбора $D > 4A$ не могут рассматриваться в качестве эффективных оценок.

Биномиальный план испытаний. Вероятность безотказной работы

Здесь и далее воспользуемся результатами работ [2]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний n изделий. В основе сравнения эффективности смещенных оценок ВБР лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n)\cdot D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [2], где

$$A\left(\theta(n;R)\right) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 \left(E\theta(n;R) - p\right)^2 dp$$ – суммарное смещение (в квадрате),

$$D\left(\theta(n;R)\right) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^1 E\left(\theta(n;R) - E\theta(n;R)\right)^2 dp$$ – суммарная дисперсия.

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний P_Σ монотонно убывает с ростом $w = p$ [4, 5], а следовательно уравнение $P_\Sigma\left(R = r\right) = \sum_{k=0}^{r} P_n\left(k, w\right) = \beta$, имеет единственное решение, где $P_n(k,p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Расчеты показывают, что оценке $w(\beta,n,R)$, минимизирующей функционал $A(\theta(n;R))$, соответствует вероятность $\beta = 0{,}81$ [2, 5]. Оценка $w(\beta = 0{,}81)$ для биномиального плана испытаний имеет смещение, которое можно уменьшить.

В [2] приведены оценки параметра p плана биномиальных испытаний:

$\hat{}w = w(\beta = 0{,}81;n,R) - 0{,}1 / ((R+1)n)$;

$\hat{}p_{20}(R = 0) = \hat{}w(\beta = 0{,}81;n)$, $\hat{}p_{20}(R > 0) = R / n$,

имеющие меньшее смещение в сравнении с оценкой w. Однако можно получить более эффективные смещенные оценки. С этой целью рассмотрим следующие составные оценки, а именно:

$\tilde{w}(\beta,R = 0) = w(\beta = 0{,}993;n,R)$,

$\tilde{w}(\beta,R > 0) = w(\beta = 0{,}75;n,R)$;

$\tilde{p}_{20}(R=0) = \tilde{w}(\beta,R = 0)$, $\tilde{p}_{20}(R > 0) = R / n$;

$\tilde{v}(\beta,R = 0) = w(\beta = 0{,}9999;n,R)$,

$\tilde{v}(\beta,R > 0) = w(\beta = 0{,}68;n,R)$;

$\tilde{p}_\tau(g = \tau;\ T_p(R,\tau,n)) = 1 - \mathrm{Exp}(-g = \tau / T_p)$,

где $g = \tau$ – время, за которое рассматривают вероятность, τ – время испытаний, $T_p(R = 0) = 60\cdot n\tau$, $T_p(R > 0) = (n\tau - R\tau/2)/(R + 0{,}4)$.

В табл. 2 приведены результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний. При построении предложенных оценок учитывалось, что их вторая часть близка $p_0 = (R > 0) / n$. Близость второй части предложенных составных оценок к классической, несмещенной и эффективной оценке $p_0 = R / n$ гарантирует их эффективность в классе смещенных оценок, что и отражено в табл. 2. Расчет проводился до третьей значащей цифры величины функционала $A(\theta(n;R))$. Здесь и далее вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial p = 10^{-3}$. А вычисления неявно заданных оценок вида $w(\beta;n,R)$ проводились с точностью 10^{-4}. При вычислении функци-

Табл. 2. Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид оценки параметра p	A	D	D / A	$C = D\cdot A\cdot 10000$
Оценки параметра p, предложенные для биномиального плана испытаний в [2]				
$\hat{}w = w(\beta = 0{,}81;n,R) - 0{,}1 / ((R+1)n)$	0,00303	0,0427	14,23	1,293
$\hat{}p_{20}(R = 0) = \hat{w}$, $\hat{}p_{20}(R > 0) = R / n$	0,000355	0,0443	124,7	0,157
Оценки, предлагаемые для биномиального плана испытаний в настоящей статье				
$\tilde{w}(\beta,R = 0) = w(\beta = 0{,}993;n,R)$, $\tilde{w}(\beta,R > 0) = w(\beta = 0{,}75;n,R)$	0,000730	0,0480	65,6	0,35
$\tilde{p}_{20}(R=0) = \tilde{w}(\beta,R = 0)$, $\tilde{p}_{20}(R > 0) = R / n$	2×10^{-6}	0,0484	1×10^4	0,00097
$\tilde{v}(\beta,R=0) = w(\beta = 0{,}9999;n,R)$, $\tilde{v}(\beta,R>0) = w(\beta = 0{,}68;n,R)$	0,000159	0,0483	303,6	0,0768
$\tilde{p}_\tau(g = \tau;T_p(R,\tau,n)) = 1 - \mathrm{Exp}(-g = \tau / T_p)$, $T_p(R = 0) = 60\cdot n\tau$, $T_p(R > 0) = (n\tau - R\tau/2)/(R + 0{,}4)$	0,00180	0,0407	22,63	0,732
$p_0 = n / R$ – классическая оценка (эффективная и несмещенная)	0	0,0488	∞	0

оналов $A(\tilde{p}_\tau)$ и $B(\tilde{p}_\tau)$ учитывалось дополнительно еще одно усреднение (суммирование) по времени ($g = \tau$), за которое рассматривают вероятность ($\tilde{p}_\tau(g = \tau; T_p(R,\tau,n))$) и одновременно проводят испытание.

Из таблицы 2 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок эффективной среди предложенных является составная оценка $\tilde{p}_{20}$ с минимальной величиной характеристики $C = 0{,}00097$. Несмещенную оценку $p_0 = R / n$, приведенную для сравнения, из рассмотрения в качестве эффективной исключаем, хотя именно она является эффективной, однако ее свойство (в случае $R = 0$ при любом $n > 0$) реализоваться нулем не соответствует случайной модели отказа изделий и она, как не имеющая физической интерпретации, вызывает большие сомнения в своей эффективности при нулевом исходе.

Заметим, что все предлагаемые оценки θ должны пройти проверку на строгую монотонность при любом объеме и количестве отказов (для вероятности отказа): $\theta(R + 1, n) > \theta(R,n)$, $\theta(R, n + 1) < \theta(R,n)$. В противном случае оценки, не прошедшие проверку на строгую монотонность, должны отвергаться, например, классическая оценка $p_0 = R / n$ в части событий «$R = 0$». Аналогично, оценка ВБР $1 - \tilde{v}(R = 0)$ в части событий «$R = 0$» при изменении n от 1 до 10 меняет свою величину от 0,9999 до 0,99999. Такое отличие величин ВБР (в пятом знаке после запятой в указанном диапазоне переменной n) для практики можно считать неразличимым, т.е. величину оценки ВБР $1 - \tilde{v}(R = 0)$ в части событий «$R = 0$» при изменении n от 1 до 10 с хорошим приближением можно считать постоянной и равной 0,9999, поэтому оценка $\tilde{v}(\beta,R,n)$ как и классическая оценка $p_0 = R / n$ должна быть отвергнута. Кроме того, для любого варианта составной оценки $\tilde{v}(\beta,R = 0,n) = w(\beta,R = 0,n)$ и $\tilde{v}(\beta,R > 0,n) = w(\beta = 0{,}68,R > 0,n)$, служащей для подстановки в функционалы $A(\tilde{v})$ и $D(\tilde{v})$, где β в первом члене варианта этой составной оценки при $R = 0$ варьируется от 0,9999 до 0,99999, величина функционала A (суммарного смещения) уменьшается на величину меньше чем 0,001%. Такое изменение функционала A можно считать несущественным, что подтверждает сделанные выводы.

Аналогично – для составной оценки $\tilde{p}_\tau(g = \tau; T_p(R,\tau,n)) = 1 - \mathrm{Exp}(-(g = \tau) / T_p(R,n,\tau))$, где $T_p(R = 0) = xn\tau$, $T_p(R > 0) = (n\tau - R\tau/2)/(R + 0{,}4)$ – некоторый вариант составной оценки СНДО, служащий для подстановки в функционалы A и D, x – переменная в первом члене варианта этой составной оценки, изменяющаяся от 60 до 10000 при $R = 0$, величина функционала A (суммарного смещения) уменьшается на величину меньше 0,0001%. Поэтому в двух последних случаях $\tilde{v}$ и $\tilde{p}_\tau$ ограничились составными оценками, первый член которых имеет вид $\tilde{v}(\beta,R = 0,n)) = w(\beta = 0{,}9999,R = 0,n)$ и $\tilde{p}_\tau(g = \tau; T_p(R = 0) = 60n\tau)$, чье влияние на изменение величины функционала $A(\tilde{v}) = 0{,}000159$ или $A(\tilde{p}_\tau) = 0{,}00180$ ограничено третьей значащей цифрой, описывающей целесообразное для практики суммарное смещение.

Отметим одно свойство оценок ВБР биномиального плана испытаний, а именно: их величины при $R = 0$ близки к единице, например, при $n = 1$

$1 - \tilde{v}(\beta,R = 0,n = 1) = 1 - w(\beta = 0{,}9999,R = 0,n = 1) = 0{,}9999$,

$1 - \tilde{w}(\beta,R = 0,n = 1) = 1 - w(\beta = 0{,}993,R = 0,n = 1) = 0{,}993$,

$1 - \tilde{p}_\tau(g = \tau; T_p(R = 0,\tau = g,n = 1)) = \mathrm{Exp}(-\tau / 60(n = 1)\tau) = 0{,}983$,

$1 - \tilde{p}_\tau(g = \tau; T_p(R = 0,\tau = g,n = 1)) = \mathrm{Exp}(-\tau/ 1000(n = 1)\tau) \approx 1$ (оценка исключена из дальнейшего рассмотрения).

С ростом $n > 1$ величины предложенных оценок возрастают, стремясь к единице. Т.е. в этом факте эти оценки близки по своим свойствам к несмещенной оценке $p_0 = R / n$.

Заметим тот факт, что для эффективных смещенных оценок $\tilde{w}$ и $\tilde{p}_{20}$ не только величина суммарного смещения близка к нулю, но и величина их суммарной дисперсии (0,0480 и 0,0484) близка к суммарной дисперсии классической, эффективной и несмещенной оценки $p_0 = R / n$ (0,0488), что соответствует неравенству Крамера-Рао [3, 4].

В тех задачах, когда по результатам испытаний n изделий необходимо сделать прогноз величины ВБР за более или менее длительный период, чем время испытаний τ (в пределах 30% изменения от τ), то следует использовать оценку ВБР $P_g = 1 - \tilde{p}_\tau(g; T_p(R,\tau,n))$.

План испытаний типа NBτ. Вероятность безотказной работы

Здесь и далее обозначения плана испытаний соответствуют [1]. Для плана типа NBτ достаточной статистикой является число наблюденных отказов (r) [3, 4]. Обозначим случайное число отказов через R, тогда для плана испытаний типа NBτ случайная величина R (далее – с.в.) имеет пуассоновское распределение $L(r;\Delta)$ с параметром $\Delta = n\tau / T_0$, $n = N$ [1, 4]. Тогда, по определению, r – реализация с.в. R. С другой стороны, R – сумма с.в. X_i, каждая из которых есть случайное число отказов одного из N изделий ($1 < i < n$), поставленных на испытания. С.в. X_i имеют пуассоновское распределение с параметром Δ / n :

$$L(r;\Delta) = \sum_{k=0}^{X_1+\ldots+X_n=r} \exp\{-\Delta\} \cdot \frac{\Delta^k}{k!}. \qquad (3)$$

Воспользуемся формулой (3) и изучим свойства оценки параметра Δ, получаемой из уравнения:

$$L(r;\Delta) = \sum_{k=0}^{r} \exp\{-\Delta\} \cdot \frac{\Delta^k}{k!} = \alpha \text{ или}$$

$$\varepsilon(\Delta) = \ln(2) + \ln\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k}{k!}\right) - \Delta. \qquad (4)$$

Минимизируя абсолютную величину ε(Δ) в формуле (4) с необходимой точностью, получим искомую точечную оценку параметра Пуассона $\Delta = \Delta(R,\alpha)$. Имея оценку $\Delta(R,\alpha)$, легко получить оценку СНДО $T_5 = n\tau / \Delta(R,\alpha)$.

Введем обозначение $m = n\tau$. Рассмотрим оценки ВБР за временной отрезок g вида $\theta(m,g;R) = \exp\{-g / T_i\}$, где T_i – некоторая оценка СНДО.

В основе сравнения эффективности смещенных оценок ВБР лежит минимизация функционала вида

Табл. 3. Результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа NВτ

Вид оценки ВБР	A	D	D / A	$C=D\cdot A\cdot 1000$
Оценки, предложенные для плана испытаний типа NВτ в [2, 5]				
$P_9(T_9) = e^{-g/T_9}$, где $T_9(R = 0) = 4n\tau / \Delta(R,\alpha = 0,5)$, $T_9(R > 0) = n\tau / \Delta(R,\alpha=0,5)$	0,01251	0,15496	12,38	1,93
$P_4(T_4) = e^{-g/T_4}$, где $T_4(R = 0) = 6n\tau$, $T_4(R > 0) = n\tau / (R + 0,5)$	0,01200	0,15665	13,05	1,87
Оценка, предлагаемая для плана испытаний типа NВτ в настоящей статье				
$P_v(T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)}$, где $T_v(R = 0) = 5,2n\tau$, $T_v(R > 0) = n\tau / (R + 0,5)$	0,01180	0,15105	12,80	1,78

Табл. 4. Результаты расчета ВБР примера 1 (τ = g, R = 0)

$N = n$	$\tilde{\tilde{p}}_\tau(g = \tau;T_p(R = 0,\tau,n)) = 1–\mathrm{Exp}(–g = \tau / T_p)$, где $T_p(R = 0) = 60n\tau$	$1 – \tilde{\tilde{p}}_{20}(R = 0) = 1 – \tilde{\tilde{w}}(\beta = 0,993; R = 0)$	$P_v(T_v) = \exp\{–g / 5,2n\tau\}$, $g = \tau$, $R = 0$
	Биномиальный план испытаний		План испытаний типа NВτ
1	0,9834	0,9930	0,8251
2	0,9917	0,9950	0,9083
3	0,9944	0,9966	0,9379
4	0,9958	0,9975	0,9531
5	0,9966	0,9980	0,9623
6	0,9972	0,9983	0,9685
7	0,9976	0,9986	0,9729
8	0,9979	0,9987	0,9762
9	0,9981	0,9988	0,9789
10	0,9983	0,9990	0,9810

$C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [2], где

$$A(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty\frac{1}{t^2}\left\{E\theta(n;R,m,g)-\exp(-g\Delta/m)\right\}^2 d\Delta$$

– суммарное нормированное смещение (в квадрате),

$$D(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty\frac{1}{t^2}E\left\{\theta(n;R,m,g)-E\theta(n;R,m,g)\right\}^2 d\Delta$$

– суммарная нормированная дисперсия.

В [2] приведены эффективные смещенные оценки ВБР для плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением (NВτ):

$P_9(T_9) = e^{-g/T_9}$, где $T_9(R = 0) = 4n\tau / \Delta(R,\alpha = 0,5)$, $T_9(R > 0) = n\tau / \Delta(R,\alpha = 0,5)$ [2, 5];

$P_4(T_4) = e^{-g/T_4}$, где $T_4(R = 0) = 6n\tau$, $T_4(R > 0) = n\tau / (R + 0,5)$ [2, 5].

Представленные эффективные оценки все же обладают достаточно большим смещением, которое можно значительно уменьшить. С этой целью рассмотрим следующую составную оценку:

$$P_v(T_v(R)) = e^{-g/T_v(R)},$$

где $T_v(R = 0) = 5,2n\tau$, $T_v(R > 0) = n\tau / (R + 0,5)$.

В табл. 3 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа NВτ. При вычислениях функционалов $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ диапазон суммирования по времени и объеме испытаний был несколько изменен в сравнении с предыдущим материалом [2], поэтому величины результатов изменились, что не отразилось на сути вещей.

Из табл. 3 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $P_v(T_v)$ с минимальной величиной характеристики $C = 1,78$.

Пример 1. В процессе испытаний на надежность ряда из 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний и время, за которое оценивается ВБР, равны $\tau = g$. Результаты расчета приведены в табл. 4.

Из примера 1 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 1 результаты эффективных смещенных оценок $1 - \tilde{\tilde{p}}_{20}$ и $P_v(T_v)$ различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

Пример 2. В рамках примера 1 возник один отказ. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний и время, за которое оценивается ВБР, равны $\tau = g$. Результаты расчета приведены в табл. 5.

Табл. 5. Результаты расчета ВБР примера 2 ($\tau = g$, $R = 1$)

$N = n$	$1-\tilde{p}_\tau(g{=}\tau;T_p(R{=}1))= \mathrm{Exp}(-g = \tau / T_p)$, где $T_p(R = 1) = (n\tau - (R{=}1)\tau/2)/1{,}4$	$1 - \tilde{w}(\beta = 0{,}75; R = 1)$	$1 - \tilde{p}_{20}(R{=}1) = 1 - (R{=}1) / n$	$P_v(T_v) = \exp\{-g\,(R{+}0{,}5) / n\tau\}$, $g = \tau$, $R = 1$
	Биномиальный план испытаний			План испытаний типа NBτ
1	0,061	0,000	0,000	0,223
2	0,393	0,500	0,500	0,472
3	0,571	0,673	0,666	0,606
4	0,670	0,756	0,750	0,687
5	0,733	0,806	0,800	0,740
6	0,775	0,839	0,833	0,779
7	0,806	0,862	0,857	0,807
8	0,830	0,879	0,875	0,829
9	0,848	0,893	0,888	0,846
10	0,863	0,903	0,900	0,860

Табл. 6. Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n,R))$, $D(\theta(n,R))$ для плана испытаний типа NBτ

Вид оценки СНДО	A	D	D / A	$C{=}D{\cdot}A{\cdot}1000$
Оценка, предложенная для плана испытаний типа *N*Bτ в [2]				
$T_{11} = 2{,}2n\tau$, при $R = 0$ и $T_{11} = n\tau / (R + 1 + 1 / R)$, при $R > 0$	0,214	3,93	18,36	0,841
Оценка, предлагаемая для плана испытаний типа *N*Bτ в настоящей статье				
$T_{\text{В}} = 2{,}4n\tau + 0{,}24\tau$, при $R = 0$ и $T_{\text{В}} = n\tau / (R + 0{,}8 + 1{,}8 / R)$, при $R > 0$	0,200	3,83	19,14	0,767
$T_{\text{В}2} = 2{,}5n\tau + 0{,}1\tau$, при $R = 0$, $T_{\text{В}2} = n\tau / (R + 0{,}9 + 7{,}5e^{-R})$, при $R > 0$	0,188	3,92	20,85	0,736

План испытаний типа *NB*τ. СНДО

В основе сравнения эффективности смещенных оценок СНДО лежит минимизация функционала вида $C(\theta(R,n)) = A\theta(R,n) \bullet D\theta(R,n)$ на предложенных оценках $\theta(R,n)$ при условии, что должно выполняться соотношение $D > 4A$ [2], где

$A\big(\theta(n;R)\big) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\big\{E\theta(n;R) - t\big\}^2\, d\Delta$ – суммарное нормированное смещение (в квадрате),

$D\big(\theta(n;R)\big) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2} E\big\{\theta(n;R) - E\theta(n;R)\big\}^2\, d\Delta$ – суммарная нормированная дисперсия.

В [2] приведена эффективная смещенная оценка СНДО для плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением (*N*Bτ)

$T_{11} = 2{,}2n\tau$, при $R = 0$ и $T_{11} = n\tau / (R + 1 + 1 / R)$, при $R > 0$.

Представленная эффективная смещенная оценка все же обладает достаточно большим смещением, которое можно значительно уменьшить. С этой целью рассмотрим следующие составные оценки:

$T_{\text{В}} = 2{,}4n\tau + 0{,}24\tau$, при $R = 0$ и $T_{\text{В}} = n\tau / (R + 0{,}8 + 1{,}8 / R)$, при $R > 0$;

$T_{\text{В}2} = 2{,}5n\tau + 0{,}1\tau$, при $R = 0$ и $T_{\text{В}2} = n\tau / (R + 0{,}9 + 7{,}5e^{-R})$, при $R > 0$.

В табл. 6 приведены результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n,R))$, $D(\theta(n,R))$ для плана испытаний типа *N*Bτ.

Из табл. 6 следует, что в соответствии с критерием эффективности смещенных оценок в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку $T_{\text{В}2}$ с минимальной величиной характеристики $C = 0{,}736$.

Пример 3. В процессе испытаний на надежность ряда из 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Время испытаний равно $\tau = 1000$ ч. Результаты расчета приведены в табл. 7.

Из примера 3 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 3 результаты эффективных смещенных оценок $T_{\tau2}$ и $T_{\text{В}2}$ различаются. Выбор, какие оценки следует использовать, остается за испытателем.

Табл. 7. Результаты расчета СНДО примера 3 ($\tau = 1000$ ч, $R = 0$)

$N = n$	$T_{\tau2}(R{=}0) = 400 + 0{,}6\tau - \tau\cdot 0{,}6/\mathrm{Ln}(1 - ((R{=}0) + 0{,}3)/(n + 0{,}3))$	$T_{\text{В}2} = 2{,}5n\tau + 0{,}1\tau$, при $R = 0$
	Биномиальный план испытаний	План испытаний типа *N*Bτ
1	3287	2600
2	5293	5100
3	7295	7600
4	9296	10100
5	11297	12600
6	13298	15100
7	15298	17600
8	17298	20100
9	19298	22600
10	21299	25100

Пример 4. В рамках примера 3 возник один отказ. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные смещенные оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Результаты расчета приведены в табл. 8.

Табл. 8. Результаты расчета СНДО примера 4 (τ = 1000 ч, R = 1)

$N = n$	$T_{\tau 2}(R > 0) = 400 + 0{,}01 \cdot \tau - \tau \cdot 0{,}2/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2)) - \tau^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}/\mathrm{Ln}(1 - ((R>0) + 2)/(n + 2))$	$T_{B2} = n\tau / /(R + 0{,}9 + 7{,}5e^{-R})$, при $R = 1$
	Биномиальный план испытаний	План испытаний типа NBτ
1	424	215
2	699	429
3	847	644
4	987	859
5	1125	1073
6	1261	1288
7	1397	1502
8	1531	1717
9	1666	1932
10	1800	2146

Послесловие

Новые знания определяют развитие в начале использования и сдерживают его в конце. Чтобы определять развитие, следует отказаться от старых догм и приобрести новые.

Выводы

Получены эффективные смещенные оценки различных показателей надежности для биномиального плана испытаний и плана с ограниченным временем испытаний и восстановлением отказавших изделий. Полученные оценки показателей надежности имеют направленность практического применения при испытаниях и эксплуатации однородной продукции различного назначения, в процессе которых отказы не возникали.

Библиографический список

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. Изд.2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 584 с.

2. Михайлов В.С. Критерий эффективности смещенных оценок. Новый взгляд на старые проблемы // Надежность. 2022. № 1. С. 30-37.

3. Ясногородский Р.М. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. Санкт-Петербург: Наукоемкие технологии, 2019. 320 с.

4. Шуленин В.П. Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика. Томск: Издательство НТЛ, 2012. 540 с.

5. Михайлов В.С., Юрков Н.К. Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты. Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2020. 149 с.

6. Михайлов В.С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ // Надежность. 2016. № 4. С. 40-42.

References

1. Gnedenko B.V., Beliaev Yu.K., Soloviev A.D. [Mathematical methods in the dependability theory. Primary dependability characteristics and their statistical analysis: Second edition, corrected and extended]. Moscow: Knizhny dom LIBROKOM; 2013. (in Russ.)

2. Mikhailov V.S. Efficiency criterion of biased estimates. A new take on old problems. *Dependability* 2022;1:30-37.

3. Yasnogorodsky R.M. [Probability theory and mathematical statistics. Textbook]. Saint Petersburg: Naukoyomkiye tekhnologii; 2019. (in Russ.)

4. Shulenin V.P. [Mathematical statistics. Part 1. Parametric statistics]. Tomsk: Izdatelstvo NTL; 2012. (in Russ.)

5. Mikhailov V.S., Yurkov N.K. [Integral estimation in the dependability theory. Introduction and main findings]. Moscow: TEKHNOSFERA; 2020. (in Russ.)

6. Mikhailov V.S. Efficient estimation of mean time to failure. *Dependability* 2016;4:40-42.

Сведения об авторе

Михайлов Виктор Сергеевич – ведущий инженер, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» (ФГУП «ЦНИИХМ»). Адрес: ул. Нагатинская, д. 16а, Москва, Российская Федерация, 115487, e-mail: Mvs1956@list.ru

About the author

Viktor S. Mikhailov, Lead Engineer, D.I. Mendeleev Central Research and Design Institute of Chemistry and Mechanics (FGUP CNIIHM). Address: 16a Nagatinskaya St., Moscow, 115487, Russian Federation, e-mail: Mvs1956@list.ru.

Вклад автора в статью

Получены эффективные по смещению оценки вероятности безотказной работы для биномиального плана испытаний и плана испытаний с ограниченным временем и восстановлением.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.