Оригинальная статья / Original article
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-2-10-21

Анализ структурных схем с помощью сигнатур. Вычисление сигнатуры сложной структуры

Signature-based block diagram analysis. Calculating complex-structure signatures

Валерий А. Чепурко[1*], Алексей Н. Черняев[2]
Valery A. Chepurko[1*], Alexey N. Chernyaev[2]
[1]АО РАСУ, Москва, Российская Федерация, [2]МЭИ, Москва, Российская Федерация
[1]RASU, Moscow, Russian Federation, [2]MPEI, Moscow, Russian Federation
[*]VAChepurko@rasu.ru

Валерий А. Чепурко

Алексей Н. Черняев

Аннотация. Цель. *Теория сигнатур позволяет сравнивать структурную надежность сложных систем, состоящих из одинаковых компонентов с помощью определяемого по некоторому алгоритму числового вектора, называемого сигнатурой. Сигнатура описывает структуру системы и связана с порядковой статистикой наработок до отказа компонентов. Цель данной работы состоит в ознакомлении отечественного читателя с этой теорией, а также в построении простых алгоритмов, позволяющих найти сигнатуру произвольной системы со схемой голосования «VooL», в частности, последовательно-параллельной системы, с помощью известных сигнатур ее подсистем.* **Методы.** *Для выполнения расчетов и доказательства теорем, в основном, применяются комбинаторика с различными схемами выбора элементов. Кроме этого применяются классические методы теории вероятностей и математической теории надежности.* **Выводы.** *В статье вводится такое понятие математической теории надежности, как сигнатура технической системы. Основное предназначение этой характеристики состоит в сравнении структурной надежности нескольких, в частности, двух систем. При этом алгоритм достаточно прост и связан со сравнением по определенному правилу двух конечных числовых массивов. Под структурной надежностью понимается надежность схем соединения ряда одинаковых с точки зрения надежности компонентов. Это определенным образом существенно сужает спектр возможностей теории сигнатур, т.к. практически все технические системы состоят из компонент различной надежности. Однако с определенной долей консерватизма можно считать, что все компоненты системы имеют надежность идентичную худшему с точки зрения надежности компонента. При этом степень консерватизма будет определяться различием надежности компонентов, которое будет достаточно малой величиной для высоконадежных компонентов. Кроме этого необходимо отметить чисто научную, математическую красоту теории сигнатур, которая имеет достаточно бурное развитие в зарубежных научных изданиях в последнее время. Необходимо отметить, что построение сигнатуры технической системы по классическим законам комбинаторики резко возрастает по мере увеличения n – числа элементов, составляющих систему. Поэтому возникает необходимость в разработке достаточно простых алгоритмов вычисления сигнатуры произвольной системы. В предлагаемой работе получены аналитические способы получения сигнатуры как в простых случаях, когда к подсистеме добавляется последовательно или параллельно один компонент, так и в более сложных ситуациях, когда к подсистеме добавляется несколько подсистем, в частности, одна. Рассмотрен ряд примеров построения сигнатуры, как классическим, так и предложенным в данной работе способом. Разобран пример сравнения надежности систем с помощью их сигнатур. При этом разобран пример сравнения структурной надежности систем с различным числом компонентов. В предлагаемой работе доказан ряд теорем, позволяющих вычислить сигнатуру произвольной структурной схемы, состоящей из одинаковых с точки зрения надежности компонентов.*

Abstract. Aim. *The signature theory allows comparing the structural dependability of complex systems consisting of identical components using a numeric vector referred to as signature that is determined using a certain algorithm. The signature describes a system's structure and is associated with the order statistics of the components' times to failure. The paper aims to familiarize the Russian readers with the theory, as well as to build simple algorithms that would allow finding the signature of an arbitrary VooL system, including a series parallel system using the known signatures of its subsystems.* **Methods.** *Calculations and theorem proving primarily involve the use of combinatorics with various element selection patterns. Additionally, classical methods of the probability theory and mathematical theory of dependability are used.* **Conclusions.** *The paper introduces such concept of the mathematical dependability theory as technical system signature. The primary purpose of this characteristic consists in comparing the structural dependability of several, in particular, two systems. The algorithm is sufficiently* *simple and involves comparing two finite numeric arrays according to a certain rule. Structural dependability is understood as the dependability of connection circuits of components that are identical in terms of dependability. That significantly reduces the capabilities of the signature theory, as practically all technical systems consist of components with various dependability. However, with a certain conservatism, it can be considered that all of a system's components have a dependability identical to that of the least dependable one. The degree of conservatism will be determined by the difference in the component dependability that will be a sufficiently low value for highly dependable components. Additionally, we should note the purely mathematical beauty of the signature theory that has recently been gaining significant momentum in foreign scientific publications. It must be noted that according to the classical laws of combinatorics, as the number n of system component elements grows, the construction of a technical system signature speeds up significantly. Therefore, it becomes necessary to develop sufficiently simple algorithms for calculating the signature of a random system. As part of the presented work, analytical approaches to signature acquisition were developed for both simple cases when a single component is, in series or parallely, added to a subsystem, and more complex situations when one or more subsystems are added to another subsystem. A number of cases of signature construction were considered using both the classical method, and the one suggested in this paper. An example was analysed of system dependability comparison using their respective signatures. The structural dependability of systems with various numbers of components was compared. The paper proves a number of theorems that allow calculating the signature of a random structure diagram consisting of components that are identical in terms of dependability.*

Ключевые слова: *когерентная система, монотонная система, структурная функция, сигнатура, порядковая статистика, ранг, фатальная наработка, последовательное соединение, параллельное соединение, дублированная система, резервированная система, схема «m из n».*
Keywords: *coherent system, monotonic system, structural function, signature, order statistics, rank, fatal operation time, serial connection, parallel connection, duplicated system, redundant system, m-out-of-n arrangement.*

Для цитирования: *Чепурко В.А., Черняев А.Н. Анализ структурных схем с помощью сигнатур. Вычисление сигнатуры сложной структуры // Надежность. 2022. №2. С. 10-21. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-2-10-21*
For citation: *Chepurko V.A., Chernyaev A.N. Signature-based block diagram analysis. Calculating complex-structure signatures. Dependability 2022;2:10-21. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-2-10-21*

Поступила *06.04.2022 г.* / **После доработки** *12.05.2022 г.* / **К печати** *17.06.2022 г.*
Received on: *06.04.2022* / **Revised on:** *12.05.2022* / **For printing:** *17.06.2022.*

Введение

Теория сигнатур была введена как привлекательный инструмент для количественного определения надежности когерентных невосстанавливаемых систем (и сетей), состоящих из компонентов со случайными, независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.) наработками до отказа [1-15]. Эти компоненты можно назвать *однотипными*. В работе [1] автор теории сигнатур исследует интенсивность отказов неустойчивой когерентной системы с элементами, имеющими независимые времена жизни с одинаковым распределением F, и, фактически, определяет понятие сигнатуры. В [2] авторы доказали, что вероятность безотказной работы системы с однотипными элементами является функцией сигнатуры системы. Авторы предложили способ сравнения надежности двух систем с одинаковым числом компонентов. Работа [3] изучает характеристики сигнатуры когерентной системы, имеющей элементы с независимыми одинаково распределенными временами жизненного цикла. Автор пришел к выводу, что сигнатура является полезным методом сравнения различных свойств систем. В монографии [4] дается достаточно полное, на тот момент времени, введение и обзор возможностей теории сигнатур, которая может применяться не только к техническим системам, но и к сетям связи. Сигнатура описывает структуру системы и связана с порядковой статистикой наработок до отказа компонентов. Близкая к теме нашего исследования работа [5] определяет понятие хвостовой сигнатуры (*tail signature*). Важным результатом является аналитический способ нахождения сигнатуры сложной системы, состоящей из двух последовательных или параллельных подсистем, а также сигнатуры системы, состоящей из N идентичных подсистем. В работе [6], также близкой к теме нашего исследования, выводятся две основные формулы для вычисления сигнатуры системы, которая может быть разложена на две подсистемы с известными сигнатурами. В качестве непосредственного приложения получена формула для вычисления сигнатуры системной избыточности через сигнатуры исходной системы и резервной. Также авторами получена формула для вычисления сигнатуры системы покомпонентного резервирования. В [7] вводится понятие *сигнатуры выживаемости* (*survival signature*), тесно связанное с компонентами сигнатуры, и на ее основе предлагается способ сравнения систем с разнотипными компонентами. В [8] авторы рассматривают полукогерентные системы. Для таких систем приводятся формулы преобразования сигнатуры и функции надежности через соответствующий вектор доминирования. Выводятся эффективные алгоритмы для вычисления одного из этих понятий из другого. В работе показано, как можно легко вычислить сигнатуру из функции надежности с помощью основных математических действий, таких как дифференцирование, извлечение коэффициентов и интегрирование. В [9] исследуются статистические свойства оценки сигнатуры и связанных с этим понятием показателей надежности. Из этого весьма скудного обзора о современном состоянии теории сигнатур трудно сделать определенные выводы. Тем не менее, в зарубежной научной литературе такие обзоры уже делаются, хотя они являются труднодоступными, как и большинство работ по данной тематике. Интерес к теории сигнатур, по сути, начинающей свое развитие с работы [1], за последние годы ощутимо возрос, однако в отечественной литературе по теории надежности практически отсутствует. В связи с этим мы считаем необходимым продолжать знакомить читателя с этой новой и интересной темой, представив свою работу, в которой мы независимо от упомянутых работ выводим алгоритм получения сигнатуры системы «*VooL*», в частности, последовательно-параллельной технической системы на основе сигнатур ее подсистем.

Определения и примеры

Введем известные определения из [10]. Пусть $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – структурная функция (надежности) некоторой системы с n элементами: e_1, e_2, …, e_n.

Определение 1. Система со структурной функцией $\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется когерентной [4] (монотонной [10]), если выполняются следующие условия:

• функция φ – неубывающая по каждому аргументу;

• каждый ее элемент является существенным, т.е. значение структурной функции изменяется при замене соответствующего элемента с абсолютно ненадежного на абсолютно надежный. Учитывая первое требование, понятно, что это изменение будет в сторону увеличения функции φ.

Из этого определения следует, что структурная функция произвольной когерентной системы должна удовлетворять условиям: $\varphi(\vec{0}) = 0$ и $\varphi(\vec{1}) = 1$. Если бы любое из этих условий нарушалось, то необходимо бы выполнялось равенство: $\varphi(\vec{0}) = \varphi(\vec{1})$, и из определения монотонности следовало бы, что каждый компонент системы несущественен.

Определим понятие сигнатуры в математической теории надежности [1-3].

Определение 2. Пусть τ – когерентная система порядка n. Пусть случайные наработки до отказа каждой из n компонент системы независимы и одинаково распределены (н.о.р.) согласно непрерывной функции распределения F. Сигнатурой системы τ с обозначением $\vec{s}^{(\tau)}$, или просто $\vec{s}$, в том случае, когда соответствующая система ясна из контекста, называется n-мерный вектор вероятностей с компонентами $s_i = P(T = X_{i:n})$, где T – наработка до отказа системы, $X_{i:n}$ – i-я порядковая статистика из n случайных наработок компонентов системы.

Пример 1. Основное (последовательное) соединение элементов. Соответствующая такой системе сигнатура будет выглядеть следующим образом: $\vec{s} = (1, 0, \ldots, 0)$. Первый отказавший элемент такой системы с вероятностью $s_1 = P(T = X_{1:n}) = 1$ вызовет отказ системы. Другими словами, первая по порядку наработка является *фатальной* для системы, т.е. *приводящей к отказу.* При этом, $s_i = P(T = X_{i:n}) = 0$, если $i \neq 1$ Можно результат записать через символ Кронекера: $s_i = \delta_{i,1} = \begin{cases} 1, i = 1, \\ 0, i \neq 1. \end{cases}$

Пример 2. Параллельное соединение элементов. Система будет функционировать до тех пор, пока не откажет ее последний элемент. Последняя наработка будет фатальной: $P(T = X_{n:n}) = 1$, $s_i = \delta_{i,n}$ и $\vec{s} = (0, \ldots, 0, 1)$.

Пример 3. Обобщающий случай – схема «m из n». Такая схема считается работоспособной пока работают хотя бы m элементов из n. В этом случае сигнатура состоит из компонент вида:

$$s_i = \delta_{i,n-m+1}.$$

В том случае, если произойдет n–m+1-й по порядку появления отказ какого-то компонента, работающими окажется (m–1) элемент системы, и это приведет к ее отказу.

Пример 4. Рассмотрим схему, представленную на рис. 1 и рассчитаем ее сигнатуру. Для удобства расчеты сведем в табл. 1. В столбце для упрощения приведены: нумерация строк, различные виды перестановок, ограничение на количество элементов системы, фатальная наработка, ранг наработки (индекс соответствующей порядковой статистики) и вероятность перестановки.

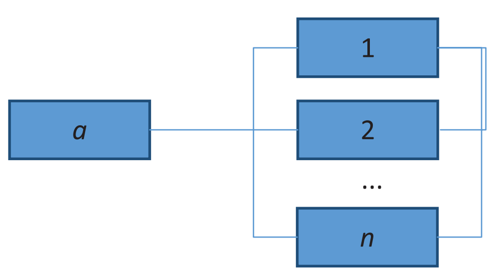

Рис. 1. Схема примера 4.

Табл. 1. Расчет сигнатуры примера 4.

№		Перестановка	Ограничение	Фатальная наработка	Ранг наработки	Вероятность
1		$X_a < X_{i_1} < \ldots < X_{i_n}$		X_a	1	1/(*n*+1)
2	а)	$X_{i_1} < X_a < \ldots < X_{i_n}$	*n*=1	X_{i_1}	1	1/(*n*+1)
	б)		*n*≥2	X_a	2	1/(*n*+1)
3	а)	$X_{i_1} < X_{i_2} < X_a < \ldots < X_{i_n}$	*n*=2	X_{i_2}	2	1/(*n*+1)
	б)		*n*≥3	X_a	3	1/(*n*+1)
4	а)	$X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_a < \ldots$	*n*=3	X_{i_3}	3	1/(*n*+1)
	б)		*n*≥4	X_a	4	1/(*n*+1)
…	…	…	…	…	…	…

Примечание. Вероятности в последнем столбце одинаковы, т.к. случайные наработки X_a, X_1, …, X_n независимы и одинаково распределены. В этом случае вероятность нахождения наработки X_a на фиксированном месте вариационного ряда всех наработок будет равна

$$\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1},$$

где (*n*+1)! – число всех равновозможных перестановок элементов структурной схемы, включая элемент *a*; *n*! – число всех перестановок элементов структурной схемы, без элемента *a*, занявшего определенную позицию.

Пусть *n*=1. В таблице этому ограничению соответствуют случаи 1 и 2а) . Ранг (порядок) фатальной наработки равен 1. Вероятность будет равна сумме 1/2+1/2=1 Сигнатура $\vec{s}=(1,0)$.

Пусть *n*=2. В таблице этому ограничению соответствуют случаи 1, 2б), 3а). Ранг (порядок) фатальной наработки в случае 1 равен 1, в случаях 2б) и 3а) – 2. Вероятность s_1 будет равна 1/3, s_2 – сумме 1/3+1/3=2/3. Сигнатура $\vec{s}=(1/3,2/3,0)$. И так далее.

Произвольное *n*. Окончательный вид сигнатуры:

$$\vec{s}=\left(\underbrace{\frac{1}{n+1},\dots\frac{1}{n+1}}_{1,\dots,n-1},\underbrace{\frac{2}{n+1}}_{n},\underbrace{0}_{n+1}\right).$$

Очевидное свойство сигнатуры: $\sum s_i=1$ – сумма всех компонент сигнатуры равна 1.

Будем применять следующие обозначения:

$$\bar{s}_k=\sum_{i=1}^{k}s_i$$

– для суммы первых *k* компонент сигнатуры,

$$\bar{S}_k=1-\bar{s}_k=\sum_{i=k+1}^{n}s_i$$

– сумма последних (*n*–*k*) компонент.

Авторами данной работы независимо были доказаны четыре ниже представленные теоремы, которые публикуются без доказательства, поскольку похожие результаты, полученные в несколько ином виде, но при таких же вводных, были получены в работах [5], [6].

Последовательное соединение с однотипным компонентом

Обозначим $\vec{s}^{(n)}$ сигнатуру некоторой когерентной системы *x* порядка *n*. Соответствующие ее элементам наработки обозначим $X_1,\ldots,X_n$ см. рис. 2. Добавим к этой системе последовательно еще один элемент *y*, имеющий наработку *Y* н.о.р. с наработками $X_1,\ldots,X_n$ и определим сигнатуру $\vec{s}^{(n+1)}$ новой системы порядка *n*+1.

Рис. 2. Добавление последовательного элемента

Теорема 1. Пусть $\vec{s}^{(n)}$ – сигнатура некоторой когерентной системы *x* порядка *n*. При добавлении последовательно к системе *x* однотипного компонента *k*-й элемент сигнатуры будет определяться следующим выражением.

$$s_k^{(n+1)}=\frac{1-\bar{s}_{k-1}^{(n)}+(n-k+1)s_k^{(n)}}{n+1}=$$
$$=\frac{\bar{S}_{k-1}^{(n)}+(n-k+1)s_k^{(n)}}{n+1},k=1,2,\ldots,n+1.$$

При этом $\bar{S}_0^{(n)}=1$, $\bar{S}_n^{(n)}=0$, $\bar{s}_0^{(n)}=0$, $\bar{s}_n^{(n)}=1$.

Параллельное соединение с однотипным компонентом

Теперь добавим к той же когерентной системе *x* порядка *n* параллельно один элемент *y*, имеющий н.о.р.

наработку Y с наработками $X_1, \ldots, X_n$ и так же определим сигнатуру $\vec{s}^{(n+1)}$ новой системы порядка n+1 (рис. 3).

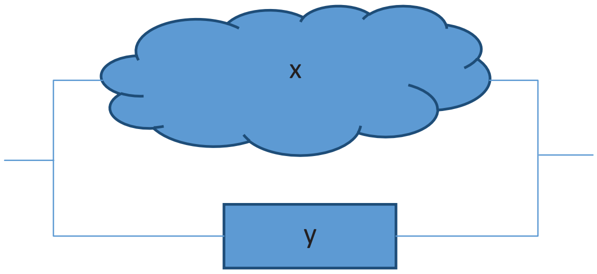

Рис. 3. Добавление резервного элемента

Теорема 2. Пусть $\vec{s}^{(n)}$ – сигнатура некоторой когерентной системы x порядка n. При добавлении параллельно к системе x однотипного компонента k-й элемент сигнатуры будет определяться следующим выражением.

$$s_k^{(n+1)} = \frac{(k-1)s_{k-1}^{(n)} + \overline{s}_{k-1}^{(n)}}{n+1}.$$

Последовательное соединение двух когерентных систем

Далее, пусть $\vec{s}^{(x)}$ будет сигнатурой некоторой когерентной системы x порядка n. Соответствующие ее элементам наработки обозначим $X_1, \ldots, X_n$ (рис. 4). Добавим к этой системе последовательно когерентную систему y с сигнатурой $\vec{s}^{(y)}$, имеющую наработки $Y_1, \ldots, Y_m$ н.о.р. с наработками $X_1, \ldots, X_n$ и определим сигнатуру $\vec{s}^{(z)}$ новой системы z порядка N=n+m.

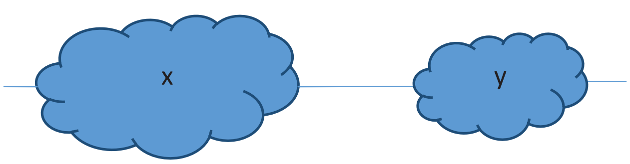

Рис. 4. Последовательное соединение двух систем

Теорема 3. Пусть $\vec{s}^{(x)}$ будет сигнатурой некоторой когерентной системы x порядка n, $\vec{s}^{(y)}$ – сигнатура когерентной системы y и эти системы соединены последовательно. В этом случае компоненты сигнатуры объединенной системы будут определяться выражением

$$s_k^{(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{k} A_m^i A_n^{k-i}\left(C_{k-1}^{i-1} s_i^{(y)}\left(1-\overline{s}_{k-i}^{(x)}\right)+C_{k-1}^{i}\left(1-\overline{s}_i^{(y)}\right)s_{k-i}^{(x)}\right)}{A_N^k},$$

где $A_m^i = \dfrac{m!}{(m-i)!}$ – число размещений из m элементов по i позициям, $C_m^i = \dfrac{m!}{i!(m-i)!}$ – число сочетаний из m по i.

Примечание. Здесь и далее для упрощения формулы предполагается, что число сочетаний $C_k^i = A_k^i = 0$ при $i \notin \{0,1,\ldots,k\}$.

Параллельное соединение двух когерентных систем

Пусть по прежнему $\vec{s}^{(x)}$ будет сигнатурой некоторой когерентной системы x порядка n. Соответствующие ее элементам наработки обозначим $X_1, \ldots, X_n$. Резервируем эту систему когерентной системой y с сигнатурой $\vec{s}^{(y)}$, имеющую наработки $Y_1, \ldots, Y_m$ н.о.р. с наработками $X_1, \ldots, X_n$ и определим сигнатуру $\vec{s}^{(x,y)}$ новой системы порядка N=n+m (рис. 5).

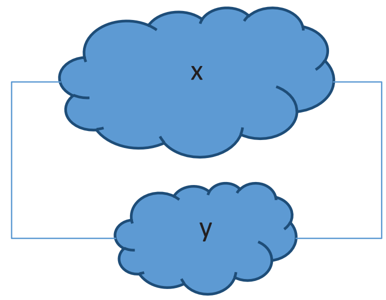

Рис. 5. Параллельное соединение двух систем

Теорема 4. Пусть $\vec{s}^{(x)}$ будет сигнатурой некоторой когерентной системы x порядка n, $\vec{s}^{(y)}$ – сигнатура когерентной системы y и эти системы соединены параллельно. В этом случае компоненты сигнатуры объединенной системы z будут равны

$$s_1^{(z)} = 0,$$

$$s_k^{(z)} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} A_m^i A_n^{k-i}\left(C_{k-1}^{k-i} s_i^{(y)}\overline{s}_{k-i}^{(x)} + C_{k-1}^{i}\overline{s}_i^{(y)} s_{k-i}^{(x)}\right)}{A_N^k}, k \ge 2.$$

Обобщение результата

Основная цель этой работы – получение более общего результата, т.е. нахождение сигнатуры системы «Voo$L$», в частности, последовательно-параллельной технической системы на основе сигнатур ее подсистем.

Рассмотрим L когерентных систем $x_1, \ldots, x_L$ с количеством однотипных элементов соответственно $n_1, \ldots, n_L$. Системы, вообще говоря, имеют различную структуру. Общее количество элементов будет равно

$$N = n_1 + \ldots + n_L.$$

Согласно определению 2, все N наработок до отказа – н.о.р. случайные величины. Обозначим $\vec{s}^{(x_j)}$ сигнатуру системы x_j, массив порядка n_j, j=1, …, L, в котором i-й компонент $s_i^{(x_j)}$, по сути, есть вероятность того, что i-й по порядку времени появления отказ является фатальным (приводящим к отказу) для системы x_j.

Последовательное соединение нескольких когерентных систем

Соединим последовательно L когерентных систем $x_1, \ldots, x_L$ в систему z (рис. 6). Объединенные наработки обозначим $Z_1, \ldots, Z_N$.

Структурная функция объединенной системы будет равна:

$$\varphi_z(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{L} \varphi_{x_i}\left(x_1,\ldots,x_{n_i}\right).$$

Поскольку каждая из функций φ_{x_i} неубывающая по каждому аргументу, то и φ_z будет неубывающей по соответствующему аргументу. Во-вторых, если каждый аргумент любой из функций φ_{x_i} был существенным, то он останется таковым и для φ_z. Таким образом, объединенная система z будет когерентной.

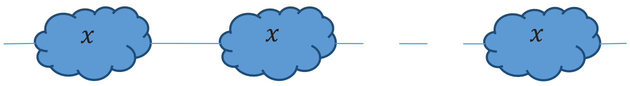

Рис. 6. Последовательное соединение L систем

Для определения сигнатуры системы z выдвинем вспомогательные гипотезы.

$H_{i_1,\ldots,i_L\leftarrow k}$: из первых k порядковых $Z_{1:N}, \ldots, Z_{k:N}$ наработок системы x_1 ровно i_1 ..., наработок системы x_L ровно i_L: $i_1+\ldots+i_L=k$; $k=1, \ldots, N$.

Очевидно, что вероятности таких гипотез будут подчиняться обобщенному гипергеометрическому распределению.

$$P\left(H_{i_1,\ldots,i_L\leftarrow k}\right) = \frac{C_{n_1}^{i_1}\cdot\ldots\cdot C_{n_L}^{i_L}}{C_N^k}, \text{ где } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Для расчета условных вероятностей $P\left(T = Z_{k:N} \mid H_{i_1,\ldots,i_L\leftarrow k}\right)$ будем последовательно предполагать, что $Z_{k:N}$ это наработка x_1, или x_2, … или x_L.

Пусть x_j оказался последним, k-ым по порядку. Вероятность этого события – i_j/k. В этом случае $s_{i_j}^{(x_j)}$ будет вероятностью того, что i_j наработок из x_j окажутся фатальными для системы x_j, и, следовательно, для объединенной последовательно системы z.

$$\prod_{\substack{m=1,\\ m\neq j}}^{L}\left(1-\overline{s}_{i_m}^{(x_m)}\right) = \prod_{\substack{m=1,\\ m\neq j}}^{L}\overline{S}_{i_m}^{(x_m)}$$

это вероятность того, что остальные случившиеся ранее отказы других систем не окажутся фатальными для всей системы. Получаем условную вероятность

$$P\left(T = Z_{k:N} \equiv x_j \mid H_{i_1,\ldots,i_L\leftarrow k}\right) = \frac{i_j}{k} s_{i_j}^{(x_j)} \prod_{\substack{m=1,\\ m\neq j}}^{L}\overline{S}_{i_m}^{(x_m)}.$$

Применив формулу полной вероятности, ***доказываем теорему***.

Теорема 5. Пусть $\vec{s}^{(x_j)}$ сигнатура некоторой когерентной системы x_j порядка n_j, $j=1, \ldots, L$. При последовательном соединении L систем с однотипными компонентами k-й элемент сигнатуры когерентной системы z будет определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{1}{k\cdot C_N^k} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_L\\ i_1+\ldots+i_L=k}} C_{n_1}^{i_1}\cdot\ldots\cdot C_{n_L}^{i_L} \sum_{j=1}^{L} i_j s_{i_j}^{(x_j)} \prod_{\substack{m=1,\\ m\neq j}}^{L}\overline{S}_{i_m}^{(x_m)}.$$

Предположим, что системы $x_1, x_2, \ldots, x_L$ идентичны структурно и количество элементов в каждой из них n, с помощью замены индексов суммирования легко показать, что компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{L}{k\cdot C_N^k} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_L\\ i_1+\ldots+i_L=k}} C_n^{i_1}\cdot\ldots\cdot C_n^{i_L}\cdot i_1\cdot s_{i_1}\cdot\prod_{m=2}^{L}\overline{S}_{i_m}.$$

Приведем формулы расчета сигнатур для L=2 и 3.

$$L=2: s_k^{(z)} = \frac{1}{kC_N^k}\sum_i C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i}\left(is_i^{(x_1)}\overline{S}_{k-i}^{(x_2)} + (k-i)s_{k-i}^{(x_2)}\overline{S}_i^{(x_1)}\right).$$

Для двух идентичных структур компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{\sum_{i+j=k} C_n^i C_n^j\left(is_i\overline{S}_j + j\overline{S}_i s_j\right)}{kC_N^k} = \frac{2\sum_{i=0}^{k} is_i\overline{S}_{k-i}C_n^iC_n^{k-i}}{kC_N^k}.$$

$$L=3: s_k^{(z)} = \frac{1}{kC_N^k}\sum_{i+j+l=k} C_{n_1}^i C_{n_2}^j C_{n_3}^l \times$$

$$\times\left(is_i^{(x_1)}\overline{S}_j^{(x_2)}\overline{S}_l^{(x_3)} + js_j^{(x_2)}\overline{S}_i^{(x_1)}\overline{S}_l^{(x_3)} + ls_l^{(x_3)}\overline{S}_i^{(x_1)}\overline{S}_j^{(x_2)}\right)$$

Для трех идентичных структур компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{3\sum_{i+j+l=k} is_i\overline{S}_j\overline{S}_l C_n^i C_n^j C_n^l}{kC_N^k}.$$

Пример 5. Произведем расчет сигнатуры системы z_1, представленной на рис. 7.

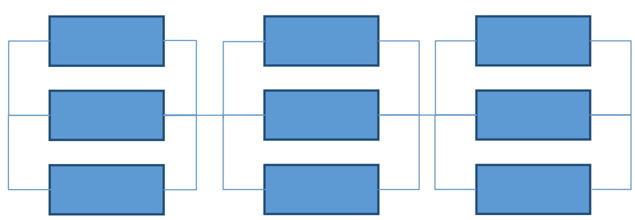

Рис. 7. Последовательное соединение 3 систем

Сигнатура каждой из трех систем будет равна $\vec{s} = (0,0,1)$, т.к. только третий отказ может быть фатальным. Суммы $\overline{S}_0 = \overline{S}_1 = \overline{S}_2 = 1$, $\overline{S}_3 = 0$. N=9. Легко заметить, что $s_k^{(z_1)}$ будут отличны от 0 при $7\geq k\geq 3$. Ненулевое значение у суммы получится в том случае, если i=3, т.к. только s_3 отличен от 0.

Пусть k=3. Т.к. i=3, то $j+l$=0. Следовательно, $j=l$=0.

$$s_3^{(z_1)} = \frac{3\cdot 3\cdot s_3\overline{S}_0^2 C_3^3\left(C_3^0\right)^2}{3\cdot C_9^3} = \frac{1}{28}.$$

Пусть k=4. Т.к. i=3, то $j+l$=1. Это возможно в двух случаях, если j=1, l=0 или j=0, l=1.

$$s_4^{(z_1)} = \frac{3\cdot 3\cdot s_3\cdot 2\overline{S}_0\overline{S}_1 C_3^3 C_3^1 C_3^0}{4\cdot C_9^4} = \frac{3}{28}.$$

Пусть k=5. Т.к. i=3, то j+l=2. Это возможно в трех случаях, если j=2, l=0 или j=1, l=1 или j=0, l=2.

$$s_5^{(z_1)} = \frac{3 \cdot 3 \cdot s_3 \cdot \left(2\overline{S}_0\overline{S}_2 C_3^2 C_3^0 + \overline{S}_1^2 \left(C_3^1\right)^2\right) C_3^3}{5 \cdot C_9^5} = \frac{3}{14}.$$

Пусть k=6. Т.к. i=3, то j+l=3. Это получится в четырех случаях, если j=3, l=0 или j=2, l=1 или j=1, l=2 или j=0, l=3.

$$s_6^{(z_1)} = \frac{3 \cdot 3 \cdot s_3 \cdot \left(2\overline{S}_1\overline{S}_2 C_3^2 C_3^1 + 2\overline{S}_0\overline{S}_3 C_3^3 C_3^0\right) C_3^3}{6 \cdot C_9^6} = \frac{9}{28}.$$

Пусть k=7. Т.к. i=3, то j+l=4. Так получится в трех возможных случаях, если j=3, l=1 или j=2, l=2 или j=1, l=3. Индексы $j,l \le 0$.

$$s_7^{(z_1)} = \frac{3 \cdot 3 \cdot s_3 \cdot \left(2\overline{S}_1\overline{S}_3 C_3^3 C_3^1 + \overline{S}_2^2 \left(C_3^2\right)^2\right) C_3^3}{7 \cdot C_9^7} = \frac{9}{28}.$$

Таким образом, сигнатура системы, представленной на рис. 7 будет равна:

$$\vec{s}^{\,z_1} = \left(0, 0, \frac{1}{28}, \frac{3}{28}, \frac{3}{14}, \frac{9}{28}, \frac{9}{28}, 0, 0\right).$$

Параллельное соединение нескольких когерентных систем

Соединим параллельно L когерентных систем $x_1,\dots,x_L$ в систему z (рис. 8) и определим сигнатуру объединенной системы.

Структурная функция объединенной системы будет равна:

$$\varphi_z\left(\vec{x}\right) = \coprod_{i=1}^{L} \varphi_{x_i}\left(x_1,\dots,x_{n_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{L}\left(1 - \varphi_{x_i}\left(x_1,\dots,x_{n_i}\right)\right).$$

Поскольку каждая из функций φ_{x_i} неубывающая по каждому аргументу, то $\left(1-\varphi_{x_i}\right)$ будет невозрастающей, как и произведение, следовательно, φ_z будет неубывающей по соответствующему аргументу. Далее, если каждый аргумент любой из функций φ_{x_i} был существенным, то он останется таковым и для φ_z. Таким образом, объединенная система z будет когерентной.

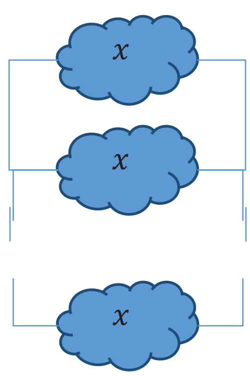

Рис. 8. Параллельное соединение L систем

Очевидно, что для объединенной системы

$$s_1^{(z)} = \ldots = s_{L-1}^{(z)} = 0.$$

Для определения остальных компонентов сигнатуры системы z выдвинем прежние вспомогательные гипотезы $H_{i_1,\dots,i_L \leftarrow k}$.

Для расчета условных вероятностей $P\left(T = Z_{k:N} \mid H_{i_1,\dots,i_L \leftarrow k}\right)$ как и прежде будем последовательно предполагать, что $Z_{k:N}$ это наработка x_1, или x_2, … или x_L.

Пусть x_j оказался последним, k-ым по порядку. Вероятность этого события – i_j/k. В этом случае $s_{i_j}^{(x_j)}$ будет вероятностью того, что i_j наработок из x_j окажутся фатальными для системы x_j, и, следовательно, для объединенной параллельно системы z

$$\prod_{\substack{m=1,\\ m\ne j}}^{L} \overline{s}_{i_m}^{(x_m)}$$

– это вероятность того, что остальные случившиеся ранее отказы других систем окажутся фатальными для каждой из них системы. Здесь $\overline{s}_{i_m}^{(x_m)}$ – это вероятность того, что не более i_m отказов оказались фатальными для системы x_m.

Получаем условную вероятность

$$P\left(T = Z_{k:N} \equiv x_j \mid H_{i_1,\dots,i_L \leftarrow k}\right) = \frac{i_j}{k} s_{i_j}^{(x_j)} \prod_{\substack{m=1,\\ m\ne j}}^{L} \overline{S}_{i_m}^{(x_m)}.$$

Применив формулу полной вероятности, ***доказываем теорему***.

Теорема 6. Пусть $\vec{s}^{(x_j)}$ сигнатура некоторой когерентной системы x_j порядка n_j, j=1,…,L. При параллельном соединении L систем с однотипными компонентами k-й элемент сигнатуры когерентной системы z будет определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{1}{k \cdot C_N^k} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_L\\ i_1+\ldots+i_L=k}} C_{n_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_L}^{i_L} \sum_{j=1}^{L} i_j s_{i_j}^{(x_j)} \prod_{\substack{m=1,\\ m\ne j}}^{L} \overline{s}_{i_m}^{(x_m)}, k \ge L.$$

При этом $s_1^{(z)} = \ldots = s_{L-1}^{(z)} = 0$.

Предположим, что системы x_1, x_1, …, x_L идентичны структурно и количество элементов в каждой из них n, с помощью замены индексов суммирования легко показать, что компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{L}{k \cdot C_N^k} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_L\\ i_1+\ldots+i_L=k}} C_n^{i_1} \cdot \ldots \cdot C_n^{i_L} \cdot i_1 \cdot s_{i_1} \cdot \prod_{m=2}^{L} \overline{s}_{i_m}.$$

Приведем формулы расчета сигнатур для L=2 и 3.

$$L = 2 : s_k^{(z)} = \frac{1}{kC_N^k} \sum_i C_{n_1}^i C_{n_2}^{k-i} \left(i s_i^{(x_1)} \overline{s}_{k-i}^{(x_2)} + \left(k-i\right) s_{k-i}^{(x_2)} \overline{s}_i^{(x_1)}\right).$$

Для двух идентичных структур компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{\sum_{i+j=k} C_n^i C_n^j \left(i s_i \overline{s}_j + j \overline{s}_i s_j\right)}{kC_N^k} = \frac{2\sum_{i=0}^{k} i s_i \overline{s}_{k-i} C_n^i C_n^{k-i}}{kC_N^k}.$$

$$L = 3 : s_k^{(z)} = \frac{1}{kC_N^k} \sum_{i+j+l=k} C_{n_1}^i C_{n_2}^j C_{n_3}^l \times$$
$$\times \left(i s_i^{(x_1)} \overline{s}_j^{(x_2)} \overline{s}_l^{(x_3)} + j s_j^{(x_2)} \overline{s}_i^{(x_1)} \overline{s}_l^{(x_3)} + l s_l^{(x_3)} \overline{s}_i^{(x_1)} \overline{s}_j^{(x_2)} \right)$$

Для трех идентичных структур компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{3\sum_{i+j+l=k} i s_i \overline{s}_j \overline{s}_l C_n^i C_n^j C_n^l}{kC_N^k}.$$

Пример 6. Произведем расчет сигнатуры системы z_2, представленной на рис. 9.

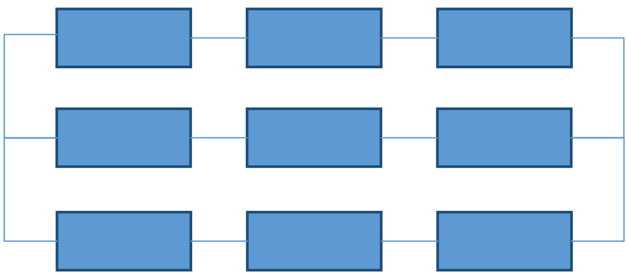

Рис. 9. Параллельное соединение 3 систем

Сигнатура каждой из трех систем будет равна $\vec{s} = (1,0,0)$, т.к. первый отказ является фатальным. Суммы $\overline{s}_1 = \overline{s}_2 = \overline{s}_3 = 1$, $\overline{s}_0 = 0$. N=9. Легко заметить, что $s_k^{(z_2)}$ будут отличны от 0 при $7 \ge k \ge 3$. Ненулевое значение у суммы в числителе дроби за счет s_1=1 получится в том случае, если i=1.

Пусть k=3. Т.к. i=1, то j+l=2. При этом j и l должны быть отличны от нуля, т.к. $\overline{s}_0 = 0$. Следовательно, j=l=1.

$$s_3^{(z_2)} = \frac{3 \cdot 1 \cdot s_1 \overline{s}_1^2 \left(C_3^1\right)^3}{3 \cdot C_9^3} = \frac{9}{28}.$$

Пусть k=4. Т.к. i=1, то j+l=3. Ненулевое значение у суммы получится в том случае, если j=1, l=2 или j=2, l=1.

$$s_4^{(z_2)} = \frac{3 \cdot 1 \cdot s_1 \cdot 2\overline{s}_1 \overline{s}_2 C_3^2 \left(C_3^1\right)^2}{4 \cdot C_9^4} = \frac{9}{28}.$$

Пусть k=5. Т.к. i=1, то j+l=4. Ненулевое значение у суммы получится в трех случаях, если j=3, l=1 или j=2, l=2 или j=1, l=3.

$$s_5^{(z_2)} = \frac{3 \cdot 1 \cdot s_1 \cdot \left(2\overline{s}_1 \overline{s}_3 C_3^1 C_3^3 + \overline{s}_2^2 \left(C_3^2\right)^2\right) C_3^1}{5 \cdot C_9^5} = \frac{3}{14}.$$

Пусть k=6. Т.к. i=1, то j+l=5. Ненулевое значение у суммы получится в двух возможных случаях (j,$l \le 3$), если j=3, l=2 или j=2, l=3.

$$s_6^{(z_2)} = \frac{3 \cdot 1 \cdot s_1 \cdot 2\overline{s}_2 \overline{s}_3 C_3^2 C_3^3 C_3^1}{6 \cdot C_9^6} = \frac{3}{28}.$$

Пусть k=7. Т.к. i=1, то j+l=6. Ненулевое значение у суммы получится в одном возможном случае, если j=l=3.

$$s_7^{(z_2)} = \frac{3 \cdot 1 \cdot s_1 \cdot \overline{s}_3 \overline{s}_3 \left(C_3^3\right)^2 C_3^1}{7 \cdot C_9^7} = \frac{1}{28}.$$

Таким образом, сигнатура системы, представленной на рисунке 9, будет равна:

$$\vec{s}^{\,z_2} = \left(0, 0, \frac{9}{28}, \frac{9}{28}, \frac{3}{14}, \frac{3}{28}, \frac{1}{28}, 0, 0\right).$$

Соединение нескольких когерентных систем с логикой голосования *VooL*

Соединим параллельно согласно логике *VooL* L когерентных систем $x_1, \ldots, x_L$ в систему z (рис. 10) и определим сигнатуру объединенной системы. Для успешного функционирования такой системы необходимо, чтобы работало не менее V систем.

Структурная функция объединенной системы в общем случае будет громоздкой, но и в этом случае можно показать, что объединенная система z будет когерентной [10].

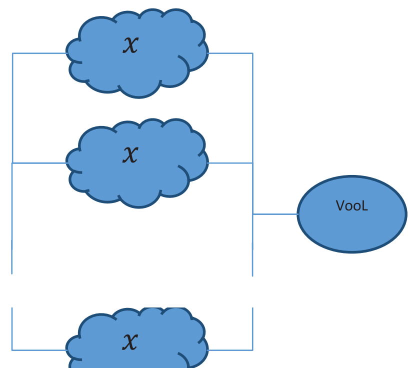

Рис. 10. Схема голосования VooL

Очевидно, что для объединенной системы

$$s_1^{(z)} = \ldots = s_{L-V}^{(z)} = 0.$$

Для определения остальных компонентов сигнатуры системы z выдвинем прежние вспомогательные гипотезы $H_{i_1,\ldots,i_L \leftarrow k}$. Вероятность их будет прежней.

Для расчета условных вероятностей $P\left(T = Z_{k:N} \mid H_{i_1,\ldots,i_L \leftarrow k}\right)$ как и прежде будем последовательно предполагать, что $Z_{k:N}$ это наработка x_1, или x_2, … или x_L.

Пусть x_j оказался последним, k-ым по порядку. Вероятность этого события – i_j / k. В этом случае $s_{i_j}^{(x_j)}$ будет вероятностью того, что i_j наработок из x_j окажутся фатальными для системы x_j, и, следовательно, для объединенной параллельно с логикой *VooL* системы z.

Нам необходимо выбрать из множества $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_L$ (L–V) систем, которые откажут, вероятность отказа каждой из них будет $\overline{s}_{i_m}^{(x_m)}$ с соответствующим системе индексом. При этом останется (V–1) систем, которые не откажут, вероятность работы каждой из них будет $\overline{s}_{i_m}^{(x_m)}$ с соответствующим системе индексом. Количество способов выбора таких систем будет определяться числом $M = C_{(L-1)}^{(V-1)}$. Обозначим F_i, i=1, …, M подмножество из (L–V) систем, каждое из которых отказало ранее.

Таким образом, условная вероятность будет определяться суммированием всевозможных вариантов выбора:

$$P\left(T = Z_{k:N} \equiv x_j \mid H_{i_1,\ldots,i_L \leftarrow k}\right) = \frac{i_j}{k} s_{i_j}^{(x_j)} \sum_{l=1}^{M} \prod_{m=1}^{L} \left(\overline{s}_{i_m}^{(x_m)}\right)^{\delta_{m,l}} \left(\overline{S}_{i_m}^{(x_m)}\right)^{1-\delta_{m,l}},$$

где $\delta_{m,l} = I\{x_m \in F_l\} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_m \in F_l \\ 0, \text{ если } x_m \notin F_l \end{cases}.$

Применив формулу полной вероятности, ***доказываем теорему***.

Теорема 7. Пусть $\vec{s}^{(x_j)}$ сигнатура некоторой когерентной системы x_j порядка n_j, $j=1, \ldots, L$. При параллельном соединении по схеме Voo$L$ L систем с однотипными компонентами k-й элемент сигнатуры когерентной системы z будет определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{1}{k \cdot C_N^k} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_L \\ i_1+\ldots+i_L=k}} C_{n_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_L}^{i_L} \times \sum_{j=1}^{L} i_j s_{i_j}^{(x_j)} \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{M} \prod_{m=1}^{L} \left(\overline{s}_{i_m}^{(x_m)}\right)^{\delta_{m,l}} \left(\overline{S}_{i_m}^{(x_m)}\right)^{1-\delta_{m,l}}, \; k \geq L - V + 1.$$

где $\delta_{m,l} = I\{x_m \in F_l\} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_m \in F_l \\ 0, \text{ если } x_m \notin F_l \end{cases}, \; M = C_{(L-1)}^{(V-1)}.$

При этом $s_1^{(z)} = \ldots = s_{L-V}^{(z)} = 0$.

Из этого результата следуют первые две теоремы, если положить $L=V$ для последовательного соединения и $L=1$ для параллельного. Однако мы решили оставить их доказательства независимыми для упрощения понимания.

Предположим, что системы x_1, x_2, …, x_L идентичны структурно и количество элементов в каждой из них n, с помощью замены индексов суммирования легко показать, что компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{L \cdot M}{k \cdot C_N^k} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_L \\ i_1+\ldots+i_L=k}} C_n^{i_1} \cdot \ldots \cdot C_n^{i_L} \cdot i_1 \cdot s_{i_1} \cdot \prod_{m=2}^{L-V+1} \overline{s}_{i_m} \cdot \prod_{m=L-V+2}^{L} \overline{S}_{i_m}.$$

Приведем формулы расчета сигнатур для $L=3$ и $V=2$.

$$s_k^{(z)} = \frac{1}{kC_N^k} \sum_{i+j+l=k} C_{n_1}^i C_{n_2}^j C_{n_3}^l \times$$

$$\times \begin{pmatrix} is_i^{(x_1)} \left(\overline{s}_j^{(x_2)} \overline{S}_l^{(x_3)} + \overline{S}_j^{(x_2)} \overline{s}_l^{(x_3)}\right) + js_j^{(x_2)} \left(\overline{s}_i^{(x_1)} \overline{S}_l^{(x_3)} + \overline{S}_i^{(x_1)} \overline{s}_l^{(x_3)}\right) + \\ + ls_l^{(x_3)} \left(\overline{s}_i^{(x_1)} \overline{S}_j^{(x_2)} + \overline{S}_i^{(x_1)} \overline{s}_j^{(x_2)}\right) \end{pmatrix}.$$

Для трех идентичных структур компоненты сигнатуры объединенной системы z будут определяться следующим выражением.

$$s_k^{(z)} = \frac{6 \sum_{i+j+l=k} i s_i \overline{s}_j \overline{S}_l C_n^i C_n^j C_n^l}{kC_N^k}.$$

Пример 7. Произведем расчет сигнатуры системы z_3, представленной на рис. 11.

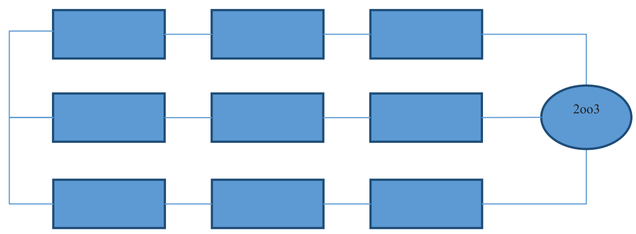

Рис. 11. Параллельное соединение 3 систем

Сигнатура каждой из трех систем будет равна $\vec{s} = (1,0,0)$, т.к. первый отказ является фатальным. Суммы $\overline{s}_1 = \overline{s}_2 = \overline{s}_3 = 1, \overline{s}_0 = 0$. Суммы $\overline{S}_1 = \overline{S}_2 = \overline{S}_3 = 0, \overline{S}_0 = 1$. $N=9$. Легко заметить, что $s_k^{(z_3)}$ будут отличны от 0 при $4 \geq k \geq 2$. Ненулевое значение у суммы в числителе дроби за счет $s_1=1$ получится в том случае, если $i=1$.

Пусть $k=2$. Т.к. $i=1$, то $j+l=1$ При этом j должно быть отличны от нуля, т.к. $\overline{s}_0 = 0$. Следовательно, $j=1$, $l=0$.

$$s_2^{(z_3)} = \frac{6 \cdot 1 \cdot s_1 \cdot \overline{s}_1 \overline{S}_0 \left(C_3^1\right)^2 C_3^0}{2 \cdot C_9^2} = \frac{3}{4}.$$

Пусть $k=3$. Т.к. $i=1$, то $j+l=2$ Ненулевое значение у суммы получится в том случае, если $j=2$, $l=0$.

$$s_3^{(z_3)} = \frac{6 \cdot 1 \cdot s_1 \cdot \overline{s}_2 \overline{S}_0 C_3^1 C_3^2 C_3^0}{3 \cdot C_9^3} = \frac{3}{14}.$$

Пусть $k=4$. Т.к. $i=1$, то $j+i=3$ Ненулевое значение у суммы получится в том случае, если $j=3$, $l=0$.

$$s_4^{(z_3)} = \frac{6 \cdot 1 \cdot s_1 \cdot \overline{s}_3 \overline{S}_0 C_3^1 C_3^3 C_3^0}{4 \cdot C_9^4} = \frac{1}{28}.$$

Таким образом, сигнатура системы, представленной на рис. 11, будет равна:

$$\vec{s}^{z_3} = \left(0, \frac{3}{4}, \frac{3}{14}, \frac{1}{28}, 0, 0, 0, 0, 0\right).$$

Сравнение надежности систем с помощью сигнатур

В последней части нашей статьи рассмотрим вопрос сравнения надежности различных систем с помощью сигнатур. В работах [2]-[4] доказан следующий результат.

Пусть есть две системы x и y, каждая с одинаковым количеством компонент- n, наработки до отказа $2n$ компонент независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(t)$. Пусть $\vec{s}^{(x)}$, $\vec{s}^{(y)}$ – сигнатуры систем x и y соответственно, а их наработки до отказа $T^{(x)}$, $T^{(y)}$. Если

$$\sum_{i=j}^{n} s_i^{(x)} \geq \sum_{i=j}^{n} s_i^{(y)}$$

для всех $j=1, \ldots, n$, то $P\left(T^{(x)} > t\right) \geq P\left(T^{(y)} > t\right)$ для всех $t>0$.

При этом, если хотя бы одно из неравенств, при каком-то j, строгое, то $T^{(x)}$ будет стохастически больше $T^{(y)}$, или система x будет надежнее y.

Если в системе неравенств присутствуют строгие неравенства обоих типов, как «<», так и «>», то такие системы несравнимы с точки зрения надежности. В этом случае при определенной надежности элементов будет «выигрывать» одна система, при другой – другая.

Вероятность $P\left(T^{(x)}>t\right)$ по сути есть функция надежности или вероятность безотказной работы. Этот результат следует напрямую из теоремы 3.1 и формулы (3.2) из [4]:

$$P(T>t)=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n}s_i\right)C_n^j\left(F(t)\right)^j\left(\bar{F}(t)\right)^j,$$

где $\bar{F}(t)=1-F(t)=P(T>t)$ – функция надежности компонента.

В наших обозначениях для сравнения надежности систем мы должны сравнить соответствующие суммы сигнатур $\bar{S}_{j-1}=\sum_{i=j}^{n}s_i$ для всех j=1, …, n.

Для системы из примера 5 суммарные сигнатуры приведены ниже. Заметим, что индексация массива начинается с 0, первый элемент массива $\bar{S}_0$, второй – $\bar{S}_1$ и т.д. до $\bar{S}_{n-1}$:

$$\bar{\vec{S}}^{z_1}=\left(1,1,1,\frac{27}{28},\frac{24}{28},\frac{18}{28},\frac{9}{28},0,0\right).$$

Система из примера 6:

$$\bar{\vec{S}}^{z_2}=\left(1,1,1,\frac{19}{28},\frac{10}{28},\frac{4}{28},\frac{1}{28},0,0\right).$$

Система из примера 7:

$$\bar{\vec{S}}^{z_3}=\left(1,1,\frac{7}{28},\frac{1}{28},0,0,0,0,0\right).$$

Сравним надежности первой и второй системы:

$$\bar{S}_i^{z_1}=\bar{S}_i^{z_2},\ i=1,2,3,8,9;\ \bar{S}_i^{z_1}>\bar{S}_i^{z_2},\ i=4,5,6,7.$$

Следовательно, первая система надежнее второй.

Сравним надежности второй и третьей системы:

$$\bar{S}_i^{z_2}=\bar{S}_i^{z_3},\ i=1,2,8,9;\ \bar{S}_i^{z_2}>\bar{S}_i^{z_3},\ i=3,\ldots,7.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что самая надежная система из первого примера, затем система из второго примера и самая ненадежная система из третьего примера.

Сравнивать надежности систем с помощью сигнатур можно и в том случае, если они состоят из разного количества компонент, но с одинаково надежными компонентами. Для этого есть несложный рекуррентный алгоритм выравнивания количества компонент, точнее говоря, повышения меньшего числа компонент до большего [4]. При этом функция надежности остается прежней.

Алгоритм выравнивания основан на следующем результате [4]. Пусть $\vec{s}=\left(s_1,\ldots,s_m\right)$ – сигнатура некоторой системы x с m элементами, имеющей случайную наработку T_x. Определим новую систему x^*, имеющей случайную наработку T_x^*, с сигнатурой $\vec{s}^*=\left(s_1^*,\ldots,s_m^*,s_{m+1}^*\right)$, элементы которой определяются следующим образом:

$$s_j^*=\frac{j-1}{m+1}s_{j-1}+\frac{m+1-j}{m+1}s_j\ \ j=1,\ldots,m+1,s_0=s_{m+1}=0.$$

В этом случае, функции надежности систем x и x^* будут равны: $P\left(T_x>t\right)=P\left(T_x^*>t\right)$ для всех t>0.

Для демонстрации этого результата рассмотрим следующий пример.

Пример 8. Резервируем самую ненадежную систему, представленную на рисунке 11, одним элементом, имеющим такую же по распределению наработку, как и остальные 9 элементов. Т.е. добавим параллельно 1 элемент к этой системе. Определим сигнатуру такой системы, которую обозначим $z_3(+1)$. Для этого проще всего воспользоваться результатом теоремы 2. При добавлении параллельно к системе x однотипного компонента k-й элемент сигнатуры будет определяться следующим выражением.

$$s_k^{(n+1)}=\frac{(k-1)s_{k-1}^{(n)}+\bar{s}_{k-1}^{(n)}}{n+1},k=1,\ldots,n+1.$$

Система из примера 7 имеет следующую сигнатуру:

$$\vec{s}^{z_3}=\left(0,\frac{3}{4},\frac{3}{14},\frac{1}{28},0,0,0,0,0\right).$$

Вектор суммы первых компонент: $\left(0,\frac{3}{4},\frac{27}{28},1,1,1,1,1,1\right)$.

Сигнатура резервированной дополнительным элементом системы:

$$\vec{s}^{z_3(+1)}=\left(0,0,\frac{9}{40},\frac{9}{56},\frac{8}{70},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right).$$

Суммарная сигнатура резервированной дополнительным элементом системы:

$$\bar{\vec{S}}^{z_3(+1)}=\left(1,1,1,\frac{217}{280},\frac{172}{280},\frac{140}{280},\frac{112}{280},\frac{84}{280},\frac{56}{280},\frac{28}{280}\right).$$

Теперь сравним надежность резервированной дополнительным элементом системы с надежностью первых двух систем z_1 и z_2, представленных на рис. 7 и 9, которые имеют на один элемент меньше. Для этого необходимо «выровнять» количества элементов, т.е. дополнить системы z_1 и z_2 одним элементом по указанному выше алгоритму. После несложных вычислений получим сигнатуры «выровненных» систем z_1^* и z_2^*:

$$\vec{s}^{z_1^*}=\left(0,0,\frac{1}{40},\frac{3}{40},\frac{3}{20},\frac{33}{140},\frac{81}{280},\frac{9}{40},0,0\right),$$

$$\vec{s}^{z_2^*}=\left(0,0,\frac{9}{40},\frac{81}{280},\frac{33}{140},\frac{3}{20},\frac{3}{40},\frac{1}{40},0,0\right).$$

Суммарные сигнатуры систем z_1^* и z_2^*:

$$\bar{\vec{S}}^{z_1^*}=\left(1,1,1,\frac{273}{280},\frac{252}{280},\frac{210}{280},\frac{144}{280},\frac{63}{280},0,0\right),$$

$$\overline{\overline{S}}^{z_2^*} = \left(1,1,1,\frac{217}{280},\frac{136}{280},\frac{70}{280},\frac{28}{280},\frac{7}{280},0,0\right).$$

Сравнивая суммарные сигнатуры систем z_1^* и $z_3(+1)$ легко заметить, что

$$\overline{S}_i^{z_1^*} = \overline{S}_i^{z_3(+1)},\ i = 1,2,3;\ \overline{S}_i^{z_1^*} > \overline{S}_i^{z_3(+1)},\ i = 4,\ldots,7;$$
$$\overline{S}_i^{z_1^*} < \overline{S}_i^{z_3(+1)},\ i = 8,\ldots,10.$$

Таким образом, системы z_1^* (а значит, и z_1) и $z_3(+1)$ несравнимы с точки зрения надежности. Т.е. при определенной надежности элемента схемы выигрывает одна схема, при другой – другая. Теперь сравним систем z_2^* и $z_3(+1)$:

$$\overline{S}_i^{z_2^*} = \overline{S}_i^{z_3(+1)},\ i = 1,\ldots,4;\ \overline{S}_i^{z_2^*} < \overline{S}_i^{z_3(+1)},\ i = 5,\ldots,10.$$

Можно сделать вывод о том, что резервированная дополнительным элементом система $z_3(+1)$ стала надежнее системы z_2.

Теория сигнатур активно развивается, и, при этом, многие вопросы остаются пока неразрешенными. Один из них состоит в том, как определить сигнатуру системы, компоненты которой имеют различную надежность. В [7] предложен один из подходов. При том вопрос сравнения таких систем с помощью сигнатур пока не решен.

Заключение

В статье приводятся основные сведения о достаточно новом для отечественной науки понятии в структурной надежности – сигнатура технической системы. Необходимо отметить несколько ограничений применения теории сигнатур. Во-первых, сравниваемые системы должны состоять из одинаковых с точки зрения надежности невосстанавливаемых элементов, наработки до отказа которых независимы. Во-вторых, сами системы должны быть монотонными (когерентными) структурами. Сложность построения сигнатуры технической системы по законам комбинаторики резко возрастает по мере увеличения n – числа элементов, составляющих систему. Поэтому необходимы инструменты, позволяющие находить сигнатуру не прибегая к законам комбинаторики.

В статье даются основные определения, рассматривается ряд примеров нахождения сигнатур. Впервые предложен способ построения сигнатур последовательно-параллельной систем и систем по схеме голосования «Voo$L$» на основе сигнатур ее подсистем. Разобран пример сравнения надежности систем с помощью их сигнатур. В дальнейших планах исследования сигнатур авторы предлагают рассмотреть способы построения сигнатур средствами языка программирования R, обобщения сигнатур на системы с компонентами, имеющими различную надежность и другие вопросы.

Библиографический список

1. Samaniego F.J. On closure of the IFR class under formation of coherent systems // IEEE Trans. Reliability. 1985. Vol. 34. Pp. 69–72.
2. Kochar S., Mukerjee H., Samaniego F.J. The “Signature” of a Coherent System and Its Application to Comparisons among Systems. Naval Research Logistics, 1999. DOI: 10.1002/(SICI)1520-6750(199908)46:5<507::AID-NAV4>3.0.CO;2-D
3. Boland P.J. Signatures of indirect majority systems // J. Appl. Prob. 2001. Vol. 38. Pp. 597–603. DOI: https://doi.org/10.1239/jap/996986765
4. Samaniego F.J. System signatures and their applications in engineering reliability. Springer, New York, 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-71797-5
5. Gertsbakh I., Shpungin Y., Spizzichino F. Signatures of coherent systems built with separate modules // J. Appl. Probab. 2011. Vol. 48(3). Pp. 843–855. DOI: https://doi.org/10.1239/jap/1316796919
6. Da G., Ben Zheng, Taizhong Hu. On computing signatures of k-out-of-n systems consisting of modules // Methodology and Computing in Applied Probability. 2014. Vol. 16(1). Pp. 223–233. DOI:10.1016/j.jmva.2011.06.015
7. Coolen F.P.A., Coolen-Maturi T. Generalizing the Signature to Systems with Multiple Types of Components. In: Zamojski W., Mazurkiewicz J., Sugier J., Walkowiak T., Kacprzyk J. (eds) Complex Systems and Dependability. Advances in Intelligent and Soft Computing, vol 170. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. DOI: 10.1007/978-0-387-71797-5
8. Marichal J. Algorithms and Formulae for Conversion Between System Signatures and Reliability Functions // Journal of Applied Probability. 2015. Vol. 52(2). Pp. 490-507. DOI:10.1239/jap/1437658611
9. Jin Y., Hall P.G., Jiming Jiang et al. Estimating component reliability based on failure time data from a system of unknown design // Statistica Sinica. 2017. Vol. 27. doi:http://dx.doi.org/10.5705/ss.202015.0209
10. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: Пер. с нем. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.

References

11. Samaniego F.J. On closure of the IFR class under formation of coherent systems. *IEEE Trans. Reliability*1985;34:69-72.
12. Kochar S., Mukerjee H., Samaniego F.J. The “Signature” of a Coherent System and Its Application to Comparisons among Systems. *Naval Research Logistics* 1999. DOI: 10.1002/(SICI)1520-6750(199908)46:5<507::AID-NAV4>3.0.CO;2-D.
13. Boland P.J. Signatures of indirect majority systems. *J. Appl. Prob.* 603;2001:597-38. DOI: https://doi.org/10.1239/jap/996986765.
14. Samaniego F.J. System signatures and their applications in engineering reliability. New York: Springer; 2007. DOI: 10.1007/978-0-387-71797-5.

15. Gertsbakh I., Shpungin Y., Spizzichino F. Signatures of coherent systems built with separate modules. *J. Appl. Probab.* 2011;48(3):843–855. DOI: https://doi.org/10.1239/jap/1316796919.

16. Da G., Zheng B., Hu T. On computing signatures of k-out-of-n systems consisting of modules. *Methodology and Computing in Applied Probability* 2014;16(1):223-233. DOI:10.1016/j.jmva.2011.06.015.

17. Coolen F.P.A., Coolen-Maturi T. Generalizing the Signature to Systems with Multiple Types of Components. In: Zamojski W., Mazurkiewicz J., Sugier J., Walkowiak T., Kacprzyk J., editors. *Complex Systems and Dependability. Advances in Intelligent and Soft Computing* 2013;170. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-0-387-71797-5.

18. Marichal J. Algorithms and Formulae for Conversion Between System Signatures and Reliability Functions. *Journal of Applied Probability* 2015;52(2):490-507. DOI:10.1239/jap/1437658611.

19. Jin Y., Hall P.G., Jiang J. et al. Estimating component reliability based on failure time data from a system of unknown design. *Statistica Sinica* 2017;27. doi:http://dx.doi.org/10.5705/ss.202015.0209.

20. Beichelt F., Franken P. Reliability and Maintenance – Mathematical Methods. Moscow: Radio i sviaz; 1988.

Сведения об авторах

Чепурко Валерий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, главный специалист отдела расчетных обоснований проектных решений АО РАСУ, Москва, Российская Федерация, e-mail: VAChepurko@rasu.ru, тел. +7(903)815-97-37

Черняев Алексей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизированных систем управления тепловыми процессами, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Российская Федерация, e-mail: ChernyaevAN@mpei.ru, тел. +7(495)362-77-20, +7(495)362-70-29.

About the authors

Valery A. Chepurko, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Chief Specialist, Division for Computational Substantiation of Design Solutions, RASU, Moscow, Russian Federation, e-mail: VAChepurko@rasu.ru, phone: +7 (903) 815 97 37.

Alexey N. Chernyaev, Candidate of Engineering, Associate Professor, Head of the Department of Automated Thermal Management Systems, MPEI, Moscow, Russian Federation, e-mail: ChernyaevAN@mpei.ru, phone: +7 (495) 362 77 20, +7 (495) 362 70 29.

Вклад авторов в статью

Чепурко В.А. провел обзор литературы, доказал теоремы 2, 4, 6, 7, разобрал примеры 5-7.

Черняев А.Н. доказал теоремы 1, 3, 5, разобрал примеры 1-4, 8.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.