

Синтез новых более мощных статистических критериев через мультипликативное объединение классических критериев Фроцини и Мурота-Такеучи с критерием Херста для проверки гипотезы нормальности малых выборок

Александр И. Иванов¹, Евгений Н. Куприянов^{2*}

¹АО «Пензенский научно-исследовательский электротехнический институт» Пенза, Российская Федерация,

²ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет», Пенза, Российская Федерация

*tsib@pnzgu.ru



Александр И. Иванов



Евгений Н. Куприянов

Резюме. Цель. Рассматривается проблема анализа малых выборок путем синтеза новых статистических критериев, порождаемых объединением статистического критерия Херста с критерием Фроцини, а также с критерием Мурота-Такеучи. Решается задача по проверке гипотезы нормального распределения исследуемых данных на выборках объемом от 16 до 25 опытов. Столь значительные ограничения по объему выборки возникают в таких предметных областях, как биометрия, биология, медицина, экономика. При этом проблема может быть решена применением не одного, а нескольких статистических критериев к анализу одной и той же малой выборки. **Методы.** Предложено выполнить умножение результата оценки по критерию Херста на результат вычисления оценок по критерию Фроцини и/или по критерию Мурота-Такеучи. Мультипликативное объединение выполнено для пар исследуемых критериев и для их тройки. Показано, что для каждого известного статистического критерия может быть построен свой эквивалентный ему искусственный нейрон. Появляется возможность нейросетевого обобщения порядка 21 построенных в прошлом веке классических статистических критериев. Ожидается, что добавление новых статистических критериев в форме искусственных нейронов будет приводить к росту качества решений многокритериального анализа. Формально использование произведений не повторяющихся пар критериев, образованных из 21 исходного классического статистического критерия должно дать 210 новых вариантов статистических критериев. Это значительно больше, чем общее число, созданных в прошлом веке статистических критериев для проверки гипотезы нормальности. **Результаты.** При парном произведении исследуемых критериев удается снизить вероятности ошибок первого и второго рода более чем в 1,55 раза по отношению к базовому критерию Херста. При тройном произведении критериев вероятности ошибок снижаются по отношению к базовому критерию Херста и по отношению к сцепленному с ним второму критерию. Отмечается отсутствие монотонного повышения качества принимаемых мультипликативными математическими конструкциями решений. Вероятности ошибок нового критерия, полученного перемножением тройки рассматриваемых критериев, примерно на 1,5% хуже, чем вероятность ошибок у критериев, полученных перемножением пар исходных критериев. **Выводы.** По аналогии с рассматриваемыми критериями, предложенные методы обработки данных могут быть применены и для других известных статистических критериев. Появляется теоретическая возможность значительно увеличить число новых статистических критериев путем перемножения их итоговых значений. К сожалению, параллельно с ростом числа объединяемых статистических критериев растут взаимные корреляционные связи между новыми синтезированными критериями. Последнее ограничивает возможности предложенного в статье метода. Необходимы дополнительные исследования, способные выявить наиболее эффективные комбинации пар, троек или больших групп для известных статистических критериев.

Ключевые слова: статистический анализ малых выборок, проверка гипотезы нормальности, критерии Херста, критерий Фроцини, критерий Мурота-Такеучи.

Для цитирования: Иванов А.И., Куприянов Е.Н. Синтез новых более мощных статистических критериев через мультипликативное объединение классических критериев Фроцини и Мурота-Такеучи с критерием Херста для проверки гипотезы нормальности малых выборок // Надежность. 2022. №1. С. 52-55. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-1-52-55>

Поступила 08.10.2021 г. / После доработки 28.01.2022 г. / К печати 18.03.2022 г.

Введение

Обучение нейронных сетей преобразованию биометрии в код аутентификации по ГОСТ Р 52633.5 [1] выполняется на 16 примерах образа «Свой». При этом «хорошие» биометрические данные имеют нормальное распределение, а «плохие» данные с грубыми ошибками имеют распределение, близкое к равномерному. В итоге при оценке качества малых обучающих выборок нужно проверять гипотезу нормального распределения малой выборки из 16 примеров.

Одним из способов проверки гипотезы нормальности является использование критерия Херста (отношение размаха данных к стандартному отклонению выборки, обычно используемое в экономике [2]). К сожалению, для малых выборок этот статистический критерий плохо работает. Распределения данных иллюстрируются рис. 1.

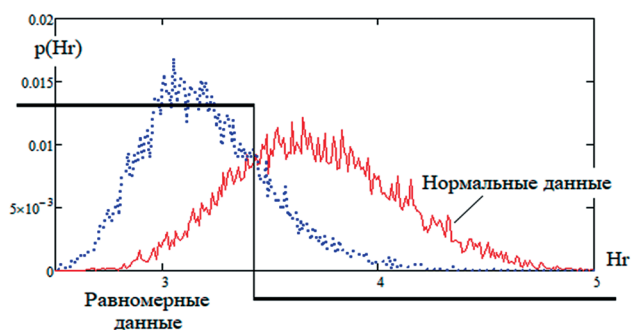


Рис. 1. Пример плохой линейной разделимости искусственным нейроном выходных состояний классического критерия Херста для малых выборок из 16 опытов

Очевидным является то, что для малых выборок вероятности ошибок первого и второго рода велики $P_1 = P_2 = P_{EE} \approx 0,228$. В связи с этим по стандартным рекомендациям [3, 4] для приемлемых значений доверительной вероятности классические критерии должны применяться для выборок в 200 и более опытов. Это условие невыполнимо для нейросетевой биометрии.

Похожая ситуация возникает и в том случае, когда мы попытаемся воспользоваться иным статистическим критерием. На рис. 2 отображены плотности вероятности выходных состояний критерия Фроцини.

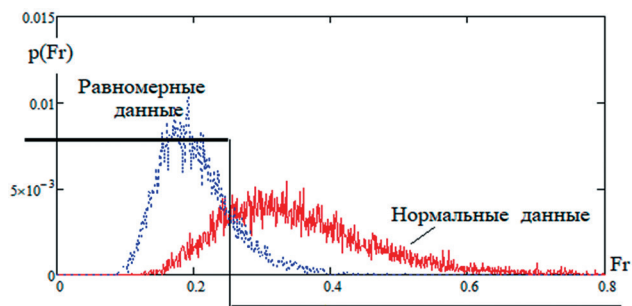


Рис. 2. Выходные состояния классического критерия Фроцини для малых выборок в 16 опытов

Сравнивая рис. 1 и рис. 2, нетрудно заметить, что линейная разделимость нормальных и равномерных данных малых выборок у критерия Фроцини существен-

но лучше $P_1 = P_2 = P_{EE} \approx 0,172$, чем у критерия Херста. Мы наблюдаем снижение вероятности ошибок первого и второго рода в 1,33 раза. Еще выше эффект линейной разделимости данных оказывается для критерия Муроты-Такеучи, рис. 3.

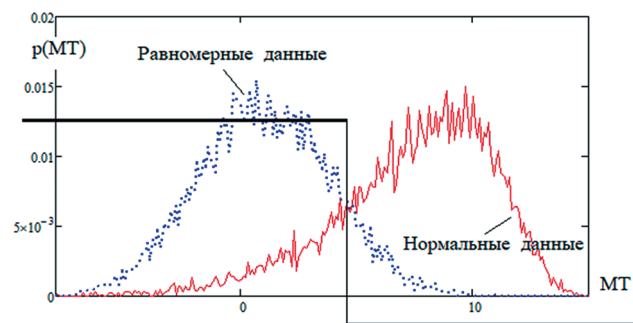


Рис. 3. Распределения выходных данных критерия Муроты-Такеучи

Для критерия Муроты-Такеучи вероятности ошибок первого и второго рода удастся снизить до величины $P_1 = P_2 = P_{EE} \approx 0,152$. Этот критерий является самым мощным из трех рассмотренных.

Очевидным является также то, что для каждого статистического критерия [5, 6] может быть построен эквивалентный искусственный нейрон, выполняющий квантование данных в точке равновероятных ошибок первого и второго рода $P_1 = P_2 = P_{EE}$, если квантователь дает состояние «0» для нормальных данных. В этом случае три рассматриваемых искусственных нейрона дадут с высокой вероятностью выходной код «000» с трехкратной избыточностью, если на их входы подать данные с распределением, похожим на нормальное.

Более того, в справочнике [7] описан 21 статистический критерий проверки гипотезы нормального распределения. То есть, мы можем получить 21 искусственный нейрон, параллельно решающий одну и ту же задачу. При этом формально мы будем получать выходные коды с 21-кратной избыточностью. Свернуть эту избыточность можно с использованием кодов, способных обнаруживать и исправлять ошибки [8].

К сожалению, большинство созданных в прошлом веке статистических критериев дают сильную коррелированность их выходных состояний. Учет влияния корреляционных связей [9] приводит к тому, что для обеспечения доверительной вероятности 0,99 созданных в прошлом веке статистических критериев недостаточно. Необходимо синтезировать порядка 40 новых статистических критериев в ближайшее время.

Способ увеличения числа статистических критериев за счет попарного перемножения их итоговых результатов

Следует отметить, что перемножение между собой результатов вычисления по формуле того или иного статистического критерия должно приводить к росту

```

sx := | x ← sort(mom(16,0,1))
      | m ← mean(x)
      | σ ← stdev(x)
      | Hr ← (x15 - x0) / σ
      | Fr ← ∑i=015 [ |(pnorm(xi,m,σ) - (i-0.5)/16)| · dnorm(xi,m,σ) ]
      | MT ← ∑i=015 (cos((xi - x15) / 1.8))
      | (Hr Fr MT Hr·Fr Hr·MT Hr·Fr·MT)T

sxr := | x ← sort(runif(16,-3,3))
       | m ← mean(x)
       | σ ← stdev(x)
       | Hr ← (x15 - x0) / σ
       | Fr ← ∑i=015 [ |(pnorm(xi,m,σ) - (i-0.5)/16)| · dnorm(xi,m,σ) ]
       | MT ← ∑i=015 (cos((xi - x15) / 1.8))
       | (Hr Fr MT Hr·Fr Hr·MT Hr·Fr·MT)T
    
```

Рис. 4. Программа для численного моделирования трех рассматриваемых в статье статистических критериев и их мультипликативных комбинаций

линейной разделимости малых выборок с нормальным и равномерным распределением. Этот факт легко проверяется численным экспериментом. Вычисление критерия Херста, критерия Фроцини и критерия Муроты-Такеучи и их мультипликативных объединений выполняется программным обеспечением, написанным на языке программирования MathCAD и представленным на рис. 4.

Приведенное выше программное обеспечение в частности позволяет вычислять мультипликативный критерий Херста&Фроцини. Данные о плотностях распределения выходных состояний этого критерия приведены на рис. 5.

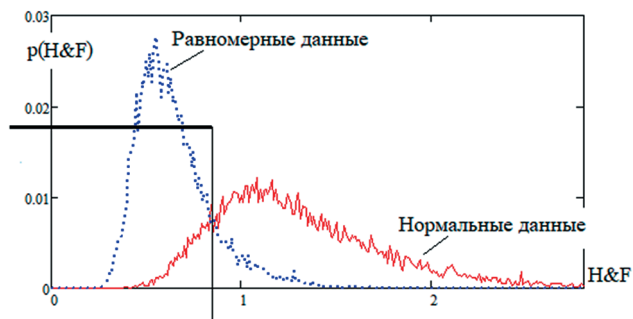


Рис. 5. Плотности распределения выходных состояний мультипликативного критерия Херста&Фроцини

Мультипликативный гибрид Херста&Фроцини имеет меньшую на 28% вероятность ошибок первого и второго рода $P_1 = P_2 = P_{EE} \approx 0,134$ в сравнении с наиболее

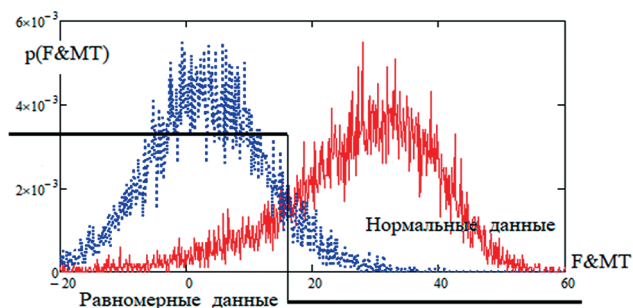


Рис. 6. Плотности распределения выходных состояний мультипликативного критерия Херста&(Мурота-Такеучи) с вероятностью ошибок $P_1 = P_2 = P_{EE} \approx 0,133$

мощным из них критерием Фроцини. Еще один вариант нового мультипликативного статистического критерия Херста&(Мурота-Такеучи) также имеет ощутимое снижение на 14% вероятности ошибок первого и второго рода в сравнении с наиболее мощным из них критерием Мурота-Такеучи. Распределения плотностей вероятности откликов синтезированного мультипликативного критерия отображены на рис. 6.

Синтез еще одного критерия перемножением выходных состояний всех трех, рассматриваемых статистических критериев

Как видно из предыдущих преобразований, умножение откликов двух статистических критериев дает заметное снижение вероятности появления ошибок первого и второго рода. Тот же эффект теоретически должен усиливаться, если перейти к перемножению более двух результатов вычисления статистических критериев. На рис. 7 приведены данные о вероятностях появления ошибок первого и второго рода, полученных от произведения всех трех исследуемых статистических критериев.

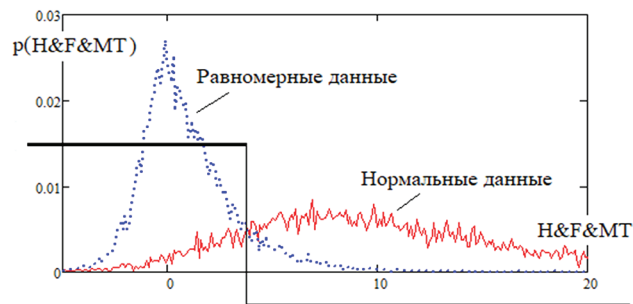


Рис. 7. Плотности распределения выходных состояний мультипликативного критерия Херста&F&MT, полученного перемножением трех исследуемых критериев

Умножение группы из трех статистических критериев дает вероятности ошибок первого и второго рода $P_1 = P_2 = P_{EE} \approx 0,136$, что хуже на 1,5% по сравнению с критериями парных мультипликативных критериев. По-

лучается, что снижение вероятностей ошибок с ростом числа перемножаемых частных параметров происходит далеко не всегда. Параллельно с повышением числа перемножаемых критериев (параллельно с ростом показателя мультипликативности), к сожалению, растет коррелированность их откликов. Именно это обстоятельство, видимо, и ограничивает снижение вероятностей при попытках увеличения числа мультипликативно объединяемых первичных критериев.

Заключение

Все известные статистические критерии могут быть разделены на два класса. В рассматриваемом случае все три критерия относятся к одному классу. Они похожи друг на друга по отношению к точке равновероятных ошибок разделяемых данных $P_1 = P_2 = P_{EE}$. Распределения нормальных данных малых выборок для критерия Херста, Фрацини, Мурота-Такеучи располагаются всегда справа от точки $P_1 = P_2 = P_{EE}$ (см. непрерывные графики на рис. 1–3, 5, 6). Распределения равномерных данных для этих критериев располагаются всегда слева от точки $P_1 = P_2 = P_{EE}$ (см. графики с точками на рис. 1–3, 5, 6). Именно это и позволяет объединять критерии мультипликативно.

С одной стороны, мультипликативное объединение уже известных статистических критериев позволяет синтезировать достаточно много новых критериев. Однако при попытках идти этим путем растет коррелированность новых данных, что является негативным фактором. В целом решать задачу синтеза новых статистических критериев путем мультипликативного объединения старых критериев нельзя без учета роста корреляционных связей между новыми критериями.

Библиографический список

1. ГОСТ Р 52633.5-2011. Защита информации. Техника защиты информации. Автоматическое обучение нейросетевых преобразователей биометрия-код доступа. М.: Стандартинформ, 2018. IV, 15 с.
2. Мандельброт Б., Хадсон З.Л. (НЕ)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. Москва, Санкт-Петербург, Киев: Изд-во «Вильямс», 2006. 408 с.
3. Р 50.1.037-2002. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа χ^2 . М.: Госстандарт России, 2001. 140 с.
4. Р 50.1.037-2002 Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. М.: Госстандарт России, 2002. 123 с.

5. Иванов А.И., Куприянов Е.Н., Туреев С.В. Нейросетевое обобщение классических статистических критериев для обработки малых выборок биометрических данных // Надежность. 2019. № 2. С. 22–27. DOI: 10.21683/1729-2646-2019-19-2-22-27

6. Иванов А.И., Банных А.Г., Безяев А.В. Искусственные молекулы, собранные из искусственных нейронов, воспроизводящих работу классических статистических критериев // Вестник пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. № 1 (48). С. 26-32.

7. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

8. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования М.: Техносфера, 2007. 320 с.

9. Иванов А.И., Банных А.Г., Серикова Ю.И. Учет влияния корреляционных связей через их усреднение по модулю при нейросетевом обобщении статистических критериев для малых выборок // Надежность. 2020. № 20(2). С. 28-34. DOI: 10.21683/1729-2646-2020-20-2-28-34

Сведения об авторах

Александр Иванович Иванов – доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории биометрических и нейросетевых технологий АО «Пензенский научно-исследовательский электротехнический институт». Адрес: ул. Советская 9, г. Пенза, Российская Федерация, 440026, тел. (841-2)59-33-10, e-mail: ivan@pniei.penza.ru

Евгений Николаевич Куприянов – аспирант кафедры «Технические средства информационной безопасности» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет», Адрес: ул. Красная, 40, Пенза, Российская Федерация, 440026, e-mail: tsib@pnzgu.ru

Вклад авторов в статью

Иванов А.И., Куприянов Е.Н. Совместно предложили использовать перемножение результатов вычислений по известным статистическим критериям в рамках гипотезы монотонного повышения качества решений, принимаемых с ростом числа перемножаемых компонент (критериев).

Куприянов Е.Н. Проведение численного эксперимента, обнаружившего отсутствие монотонности снижения вероятности ошибок первого и второго рода по мере увеличения перемножаемых при синтезе компонент.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.