

## Соотношения между состояниями и событиями при моделировании надежности Марковскими процессами

**Борис П. Зеленцов**, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Новосибирск, Российская Федерация  
[zelentsov@mail.ru](mailto:zelentsov@mail.ru)



Борис П. Зеленцов

**Резюме.** Рассмотрены соотношения между состояниями и событиями, которые используются при построении диаграмм процессов, описывающих надежность объектов. По построенной диаграмме состояний и событий формируются исходные данные и выбирается математический метод, который реализуется в соответствии с поставленной задачей. Приведены особенности и преимущества матричного метода. **Цель.** Совершенствование методов моделирования путем уточнения соотношений между состояниями и событиями и использования матричных методов расчета. **Методы.** Рассмотренные причинно-следственные связи между состояниями и событиями позволили сформулировать соотношения между ними: событие может быть причиной изменения состояния, тогда изменение состояния является следствием; состояние может быть причиной возникновения события, тогда событие является следствием состояния. При таком подходе событие может быть причиной изменения состояния, и в то же время событие является следствием какого-то состояния. Аналогичная ситуация складывается с состояниями: состояние может быть причиной события и в то же время состояние является следствием какого-то события. Отмечено также, что в условиях одного состояния могут произойти несколько событий, а событие также может приводить к нескольким состояниям. Приведены примеры таких соотношений. Отмечено, что продолжительность состояния может быть постоянной, случайной или нулевой. Рассмотренные соотношения между состояниями и событиями позволяют обоснованно формировать диаграмму состояний и переходов. Обоснованное формирование диаграммы состояний и переходов является результатом изложения концептуальной модели, в которой всем состояниям и событиям дается физическое и техническое толкование, переходящее затем в формальную диаграмму состояний и переходов. Особое внимание уделено матричным методам, которые характеризуются рядом преимуществ: компактностью и простотой преобразований исходных характеристик в выходные характеристики, наличием стандартного математического обеспечения, использованием проверочных процедур, возможностью реализации с помощью стандартных компьютерных средств. Исходные данные формируются также в матричном виде. Приведены характеристики диаграммы состояний и переходов, которые могут быть вычислены по исходным данным. Отмечено использование методов, основанных на полумарковских процессах. Отмечена целесообразность формирования циклов при использовании матричных методов. Затронута также актуальная тема, связанная с большим числом состояний и вытекающая из этого проблема укрупнения состояний. Приведены два подхода к укрупнению состояний, которые позволяют сохранить без изменения выходные характеристики системы. **Результаты.** Сформулировано предложение по формированию модели надежности, которая состоит в выполнении нескольких этапов: формулирование цели моделирования с указанием используемых показателей надежности, описание концептуальной модели, формирование обоснованной диаграммы состояний-переходов, выбор математического метода, проведение расчетов, обсуждение результатов, выводы и предложения на основании проведенного моделирования. **Обсуждение и выводы.** При формировании модели надежности следует учитывать причинно-следственные связи между состояниями и событиями, которые устанавливаются с учетом физических и инженерно-технических особенностей объекта. С учетом этих связей формируется диаграмма состояний, на основе которой составляются исходные данные модели. Одним из эффективных математических методов является матричный метод, который характеризуется рядом положительных особенностей. Изложенные соображения носят методический характер, они могут быть полезны при формировании моделей надежности технических систем и при изучении теории надежности в учебных заведениях.

**Ключевые слова:** надежность объекта, диаграмма состояний-переходов, матричные методы моделирования марковских процессов.

**Для цитирования:** Зеленцов Б.П. Соотношения между состояниями и событиями при моделировании надежности Марковскими процессами // Надежность. 2022. №1. С. 38-43.  
<https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-1-38-43>

Поступила 26.11.2021 г. / После доработки 21.01.2022 г. / К печати 18.03.2022 г.

## Введение

Одной из проблем исследования сложных систем является построение таких моделей реальных систем, которые пригодны для теоретического и экспериментального изучения их свойств. При этом модели надежности объектов должны адекватно отображать реальные процессы в существующих системах. Математическое моделирование является наиболее распространенным и перспективным методом изучения сложных систем, который позволяет проводить исследование на этапе проектирования, решать задачи анализа и синтеза, прогнозировать качество и эффективность функционирования систем, обосновывать необходимую или оптимальную структуру при проектировании новых и совершенствовании существующих систем и правильно интерпретировать статистические данные.

Как правило, модели надежности строят на базе дискретного множества состояний, переходы между которыми происходят в непрерывном времени. Эти процессы графически изображают в виде диаграммы состояний-переходов. В статье рассмотрены причинно-следственные соотношения между состояниями и событиями (переходами между состояниями), которые формируют диаграмму. Дальнейшее использование диаграммы связано с выбором математического метода и проведением расчетов в соответствии с поставленной задачей моделирования процессов надежности.

Приведенные в статье соображения носят методический характер и отражают индивидуальное мнение автора в области моделирования надежности технических систем.

## Обзор источников

В государственном стандарте [1] установлено руководство по применению марковских методов для моделирования надежности систем с дискретными состояниями в непрерывном времени. Марковские методы могут использоваться при моделировании надежности различных технических систем. При применении марковского анализа используют диаграмму состояний-переходов, которая является графическим представлением концептуальной модели и моделирует поведение системы во времени. Изложены правила построения диаграмм состояний и переходов и приведены примеры применения этих правил. В соответствии с таким представлением применяют методологию анализа пространства состояний. Анализ пространства состояний применяют при исследовании надежности различных вариантов построения систем: резервированных систем, систем со сложными стратегиями обслуживания и др. Особо подчеркнуто, что ключевой задачей марковского анализа является корректное построение диаграммы состояний-переходов. При этом однородный марковский процесс полностью характеризуется матрицей интенсивностей переходов.

Далее в стандарте [1] отмечены преимущества методов марковского анализа: возможность моделирования

разных стратегий технического обслуживания. Предположение о постоянстве интенсивности восстановления должно быть обосновано в том случае, если среднее время восстановления не является пренебрежимо малой величиной по сравнению с соответствующим значением средней наработки до отказа. Отмечено также, что при использовании методов марковского анализа необходимы специальные меры предосторожности, связанные с возрастанием количества состояний системы. В случае большого количества состояний и переходов возрастает вероятность ошибок и искажений. Кроме того, расчетные методы также усложняются и могут требовать применения специальных компьютерных программ. Из практических соображений состояния с очень низкой вероятностью допускается исключать из модели функционирования системы.

В отечественной и зарубежной литературе имеются многочисленные публикации, связанные с исследованием свойств марковских процессов в дискретном и непрерывном времени и их применением для моделирования вероятностных систем различного назначения, например, [2, 3, 4]. Особо следует отметить широкое применение теории марковских процессов с использованием диаграмм состояний-переходов для решения задач в области надежности. Так, в [5] на основе марковских процессов в непрерывном времени составлены модели функционирования восстанавливаемых и невосстанавливаемых систем, приведены методы расчета показателей надежности (коэффициента готовности, среднего времени между отказами и др.) при различных условиях, связанных со спецификой оборудования. В частности, в [5] приведены модели надежности систем с периодическим контролем, который проводится со случайным периодом. В [6] исследованы методы расчета надежности на основе марковских процессов с учетом полноты контроля. В этих работах рассмотрены марковские модели, в которых будущее состояние системы не зависит от того, как проходил процесс смены состояний до существующего состояния.

В математических моделях надежности при использовании марковских методов четко прослеживается процесс смены состояний объекта (элемента, системы). Этот процесс отражает реальные процессы в технических системах. Прежде всего, определим термин «состояние объекта».

Техническое состояние объекта (техническое состояние, состояние объекта, состояние) – это совокупность свойств объекта, подверженных изменению в процессе его производства, эксплуатации, транспортировки и хранения, характеризующихся значениями параметров и/или качественными признаками, установленными в документации [7]. Из приведенного определения следует, что состояние характеризуется временем, которое отсчитывается от начала состояния до конца состояния, при этом начало и конец состояния являются событиями. Следует отметить, что в [1] использован термин «переход между состояниями», что является синонимом термина «событие». Термин «событие» (точнее «слу-

чайное событие») является базовым термином теории вероятностей. В дальнейшем будем использовать оба термина, имеющих одинаковый смысл.

В [8] восстановление рассматривается как процесс и как событие, заключающееся в переходе объекта из неработоспособного состояния в работоспособное. Из этого определения, а также из определения интенсивности восстановления следует, что здесь имеется в виду событие, связанное с завершением восстановления. При таком понимании с восстановлением связаны два события: начало восстановления и завершение восстановления. В математических моделях зачастую используется параметр «интенсивность восстановления», который является характеристикой завершения восстановления при условии, что имело место событие «начало восстановления». Следует отметить, что событие «начало восстановления» может происходить при разных условиях: непосредственно после отказа, с задержкой из-за ограниченных возможностей восстановления, использование объекта в неработоспособном состоянии после скрытого отказа и др.

## Соотношение между терминами «состояние» и «событие»

Для согласованного понимания процесса смены состояний отметим причинно-следственные связи между терминами «состояние» и «событие». В математических моделях, как правило, полагается, что события (переходы между состояниями) происходят мгновенно.

Событие может быть причиной изменения состояния, тогда измененное состояние является следствием события. Примеры:

- отказ является причиной изменения работоспособного состояния на неработоспособное, то есть неработоспособное состояние является следствием отказа;
- завершение восстановления является причиной перехода от восстановления к работоспособному состоянию, то есть работоспособное состояние является следствием завершения восстановления;
- обнаружение отказа может быть причиной начала восстановления или блокирования объекта, то есть начало восстановления или блокирование объекта являются следствиями обнаружения отказа.

Состояние может быть причиной возникновения события. В этом случае событие является следствием состояния. Примеры:

- использование объекта по назначению является причиной отказа, то есть отказ является следствием использования объекта;
- ремонт (восстановление) объекта является причиной событий «начало функционирования» или «начало хранения», то есть «начало функционирования» или «начало хранения» являются следствиями ремонта (восстановления);
- операция недоверного контроля технического состояния может быть причиной таких событий, как

ошибка контроля I рода и ошибка контроля II рода, то есть ошибки контроля I и II рода являются следствиями операции недоверного контроля.

Итак, событие может быть причиной изменения состояния и в то же время событие является следствием какого-то состояния. Аналогичная ситуация складывается с состоянием: состояние может быть причиной события и в то же время состояние является следствием какого-то события.

Следует отметить, что одно и то же событие является, как правило, концом одного состояния и началом другого состояния. Поэтому события могут иметь разные названия в зависимости от того, к какому состоянию их относят при формировании модели.

В примерах, приведенных в стандарте [1], начало восстановления совпадает с отказом объекта. В реальных системах могут быть ситуации, отличные от этой. Переход в состояние восстановления может произойти при следующих событиях:

- восстановление после ожидания в очереди (при ограниченном восстановлении);
- обнаружение скрытого отказа при диагностировании объекта;
- в результате ошибки контроля происходит ложное восстановление работоспособного объекта.

Можно отметить случаи, когда отказ не приводит к восстановлению в момент отказа:

- происходит скрытый отказ;
- происходит явный отказ и объект становится в очередь на восстановление (при ограниченном восстановлении);
- после проверки технического состояния отказ не обнаружен.

Следует иметь в виду, что в условиях одного состояния могут произойти несколько событий, например, при использовании объекта по назначению могут произойти скрытые отказы, явные отказы, предотказы, повреждения. Событие также может приводить к нескольким состояниям: операция контроля технического состояния может быть достоверной или может привести к ошибкам контроля I и II рода.

Итак, состояния и события связаны между собой во времени причинно-следственными отношениями. Новое состояние объекта (элемента системы или самой системы) является следствием определенного события, а любое событие является следствием предшествовавшего состояния. Каждому состоянию соответствуют два события: начало состояния и его завершение.

Продолжительность состояния может быть трех видов: она может быть постоянной (установленной, регулярной, детерминированной), случайной или нулевой. При нулевой продолжительности состояния начало и конец состояния совпадают. Такое состояние можно назвать как состоянием, так и событием.

Пример состояния с постоянной продолжительностью: диагностирование объекта с постоянным временем диагностирования. Пример состояния со случайной



продолжительностью: случайное время восстановления (ремонта) объекта. Пример нулевой продолжительностью: операция диагностирования объекта проводится за время, которое существенно меньше продолжительности других состояний, поэтому в моделях продолжительность операции диагностирования полагается нулевой.

При построении моделей надежности учитывают особенности систем, которые невозможно перечислить в одной статье. Тем не менее можно отметить следующие факторы:

- наличие скрытых отказов, явных отказов, предотказов;
- применение системы мониторинга технического состояния;
- использование системы технического обслуживания;
- применение технического обслуживания с периодическим или непрерывным контролем;
- возможность ошибок контроля I и II рода и многое другое.

Итак, переход между состояниями  $s_i \rightarrow s_j$  представляет собой событие, которое является следствием состояния  $s_i$  и причиной состояния  $s_j$ , то есть состояние  $s_j$  является следствием этого события. Следует отметить, что в [1] переходы между состояниями (события) зачастую приведены без необходимого пояснения. При этом используются выражения «переход между состояниями», «переход из одного состояния в другое», «возвращение из одного состояния в другое».

Для обоснованного формирования диаграммы следует дать полное описание состояниям и переходам (событиям). Для каждого состояния следует указать:

- 1) название;
- 2) переход в состояние как следствие некоторого события;
- 3) завершение состояния как следствие какого-то другого события.

Для каждого события (перехода) целесообразно отметить:

- 1) название;
- 2) состояние, являющееся причиной события;
- 3) состояние, являющееся следствием события.

При применении математических методов на основе цепей и процессов Маркова используются различные типы состояний, связанные с диаграммами: соседние состояния, достижимые состояния, сообщающиеся состояния, изолированное состояние, поглощающее состояние, несущественное и существенное состояние, возвратное и невозвратное состояние. Особенности диаграмм выражаются в использовании различных типов множеств и подмножеств состояний: связанное множество, замкнутое и незамкнутое множество, транзитивное подмножество, подмножество существенных и несущественных состояний, эргодическое множество. Эти термины достаточно полно освещены в учебной и научной литературе.

При формулировании особенностей диаграмм состояний-переходов следует придерживаться «безупреч-

ности терминов», которая сводится к их однозначности, непротиворечивости и согласованности с государственными стандартами [9].

## Матричные методы моделирования марковских процессов

В стандарте [1] отмечено, что однородный марковский процесс в непрерывном времени полностью характеризуется матрицей интенсивностей, которая используется для составления и решения матричного дифференциального уравнения, на основе которого находят вероятности состояний или событий как функции времени. Также отмечен метод, основанный на использовании алгебраических уравнений для вычисления предельных вероятностей состояний. Упомянуты гибридные модели: анализ дерева неисправностей, метод структурной схемы надежности, метод сетей Петри.

Матричный метод является одним из эффективных математических методов моделирования марковских процессов. Исходные данные матричного метода для процесса в непрерывном времени заложены в матрицу интенсивностей. Использование постоянных интенсивностей для времени наступления событий или продолжительности состояний должно быть обосновано.

В отечественной и зарубежной литературе имеются многочисленные публикации, связанные с исследованием свойств марковских процессов в дискретном и непрерывном времени и их применением для моделирования вероятностных систем различного назначения, в том числе для решения задач в области надежности. В [10] приведены матричные методы моделирования марковских процессов в дискретном и непрерывном времени, на основе которых вычисляются вероятностные, временные и частотные характеристики состояний и подмножеств состояний, связанные со спецификой исследуемой системы. Эти характеристики легко переводятся в показатели надежности, такие как вероятность безотказной работы, среднее время безотказной работы, частота отказов, коэффициенты готовности и неготовности и др.

Интерес к матричным методам обусловлен их преимуществами: компактностью и простотой преобразований исходных характеристик в выходные характеристики, наличием стандартного математического обеспечения, возможностью реализации с помощью современных компьютерных средств. Следует отметить, что матричные методы относятся к численно-аналитическим методам, то есть могут быть применимы как для численных расчетов, так и для аналитических исследований.

Приведем краткое представление матричного метода для процесса в непрерывном времени, изложенного в [10]. На основе диаграммы состояний и переходов составляется матрица интенсивностей переходов. По матрице интенсивностей могут быть вычислены:

- вероятности состояний как функции времени при любом начальном состоянии и при заданном начальном

распределении путем составления матричного дифференциального уравнения и его решения;

- предельные вероятности состояний для эргодического процесса по двум аналитическим формулам: на основе обращения матриц и на основе определителей;
- вероятности нахождения в подмножестве состояний;
- среднее время нахождения в подмножестве состояний путем обращения матрицы интенсивностей;
- дисперсия времени нахождения системы в подмножестве состояний путем оперирования с обращенной матрицей интенсивностей и матрицей, сформированной на основе начального распределения вероятностей состояний.

В зависимости от выбранной модели надежности процесс смены состояний может происходить как в дискретном, так и в непрерывном времени. В области надежности математические модели наиболее часто строят в непрерывном времени. В [10] приведены аналогичные процедуры и характеристики для процесса в дискретном времени.

Для моделирования процессов, описывающих надежность систем, можно использовать методы, основанные на полумарковских процессах. Отличие полумарковского процесса от марковского процесса в дискретном и непрерывном времени состоит в том, что переходы рассматриваются не в дискретные моменты времени и не в непрерывном времени, а в моменты выхода из состояний (или моменты смены состояний).

Процесс смены состояний полумарковского процесса задается вероятностями, которые названы вероятностями проходов. Матрица вероятностей проходов может быть сформирована на основе матрицы переходных вероятностей для процесса в дискретном времени и на основе матрицы интенсивностей для процесса в непрерывном времени. Вероятности проходов полумарковского процесса могут быть вычислены также для случаев с постоянной или случайной продолжительностью с неизвестным распределением.

Вероятности проходов не содержат информации о продолжительности состояний. Если такие характеристики нужны для моделирования системы, то их задают совместно с вероятностями проходов в качестве исходных данных. Такими исходными данными могут быть, например, средние времена нахождения в состояниях после попадания в них.

При таком подходе событие представляет собой зависимое событие при условии, что его причиной является некоторое состояние. В этом случае события целесообразно характеризовать условными вероятностями. С этих позиций события, отражаемые в моделях надежности, могут быть детерминированными или случайными. Детерминированное событие является единственным событием, которое является следствием состояния. Его условная вероятность равна 1. А к случайным событиям относятся события, условные вероятности которых меньше 1.

Пример случайного события: отказ объекта при его использовании по назначению в течение некоторого

времени и отсутствие отказа за это время – противоположные случайные события. Пример детерминированного события: переход к использованию объекта в работоспособном состоянии после восстановления.

На основе полумарковского процесса могут быть вычислены:

- математические ожидания числа попаданий в состояния некоторого подмножества, названные средними относительными частотами состояний и представленные в матричном виде;
- средняя продолжительность нахождения в подмножестве состояний на основе средних относительных частот состояний.

Вычислительные и проверочные процедуры целесообразно выполнять методами компьютерной математики. В частности, по готовым формулам вычисляются вероятности состояний как функции времени, предельные вероятности состояний, среднее и дисперсия времени нахождения в подмножестве состояний и другие характеристики. При использовании методов компьютерной математики большое число состояний теряет свою остроту.

Вычислительные процедуры, выполняемые методами компьютерной математики, могут быть исполнены как в числовом, так и в аналитическом виде.

## Актуальные задачи, решаемые матричным методом

Кратко отметим две задачи, решаемые матричным методом: укрупнение состояний и циклическое функционирование системы.

В стандарте [1] отмечено, что при большом числе состояний могут возникнуть трудности, связанные с возможными ошибками и искажениями. При этом допускается исключать из модели функционирования системы состояния с очень низкой вероятностью. В научной литературе отмечено, что сокращение числа состояний за счет отбрасывания маловероятных состояний может привести к значительной погрешности выходных характеристик системы. Поэтому такие подходы должны сопровождаться расчетом погрешности, то есть без расчета погрешности такой подход теряет смысл.

При применении матричных методов трудности, связанные с большим числом состояний, достаточно легко преодолеваются за счет применения проверочных процедур как при формировании исходных данных, так и для результатов вычислений. Проверочные процедуры позволяют быстро находить ошибки при введении исходных данных и при реализации вычислительных процедур, поэтому проверочные процедуры позволяют повысить эффективность математических методов.

В [10] изложены два подхода к проблеме укрупнения состояний: укрупнение на основе усечения матричных характеристик и на основе частот. Эти подходы реализуются матричным методом и позволяют сохранить без изменения выходные характеристики системы.

При эксплуатации систем длительного использования имеют место повторяющиеся циклы. Это обстоятельство явилось предпосылкой для формирования модели циклического функционирования систем [10]. В модели циклического функционирования описываются переходы между подмножествами состояний путем оперирования с матрицами. Такой подход позволил вычислять характеристики системы в переходном и стационарном режиме. Приведены формулы для вычисления средней продолжительности нахождения в подмножествах состояний в переходном и стационарном режиме, а также для предельных вероятностей подмножеств.

## Результаты

Из приведенных рассуждений вытекает целесообразность выполнения следующих этапов при моделировании надежности.

1. Формирование цели моделирования с указанием используемых показателей надежности.
2. Изложение концептуальной модели, которая содержит исходное представление об объекте. В ней изложены физические и эксплуатационные особенности объекта и приведено инженерно-техническое описание процессов с точки зрения надежности.
3. Построение диаграммы состояний и переходов на основании концептуальной модели.
4. Выбор математического метода. Здесь должно быть четкое представление об исходных данных и о выходных характеристиках, получаемых с помощью метода.
5. Проведение расчетов.
6. Результаты, предложения и выводы на основании проведенного моделирования.

## Выводы

1. Сформулировано предложение по формированию модели надежности, которое содержит цель, концептуальную модель, диаграмму состояний и переходов, математический метод, расчеты и выводы.
2. При построении диаграмм состояний-переходов следует учитывать причинно-следственные связи между состояниями и событиями. Установление этих связей основано на физических и инженерно-технических особенностях исследуемых систем.
3. Одним из эффективных методов моделирования марковских процессов является матричный метод, который характеризуется положительными особенностями: компактностью и простотой преобразований, наличием стандартного математического обеспечения.
4. На основе приведенного матричного метода можно строить аналитические и алгоритмические модели эксплуатации и функционирования оборудования технических систем различного назначения.
5. Матричный метод позволяет сопровождать все этапы моделирования проверочными процедурами для исключения ошибок и искажений при формировании

исходных данных и при реализации вычислительных процедур.

6. Операции с матрицами целесообразно выполнять на базе современных программных инструментов типа Mathcad и Matlab.

Изложенный материал может быть использован в качестве методического пособия для четкого формирования моделей надежности технических систем и при изучении теории надежности в учебных заведениях.

## Библиографический список

1. ГОСТ Р МЭК 61165-2019. Надежность в технике. Применение марковских методов. М: Стандартинформ, 2019. IV, 26 с.
2. Матальцкий М.А., Хацкевич Г.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Минск: Вышайшая школа, 2017. 591 с.
3. Birolini A. Reliability Engineering. Theory and Practice. Springer, 8<sup>th</sup> ed., 2017. 651 p.
4. Knill O. Probability and Stochastic Processes with Applications. Overseas Press, India Private Limited, 2009.
5. Ушаков И.А. Курс теории надежности систем. М.: Дрофа, 2008. 239 с.
6. Викторова В.С., Степанянц А.С. Модели и методы расчета надежности технических систем. М.: Ленанд, 2016. 256 с.
7. ГОСТ 18322-2016. Система технического обслуживания и ремонта техники. Термины и определения. М: Стандартинформ, 2017. II, 13 с.
8. ГОСТ 27.002-2015. Надежность в технике. Термины и определения. М: Стандартинформ, 2016. IV, 23 с.
9. Зеленцов Б.П. Замечания к содержанию стандарта в области надежности // Надежность. 2021. № 1. С. 34-37.
10. Зеленцов Б.П. Матричные методы моделирования однородных марковских процессов. Palmarium Academic Publishing, 2017. 133 с.

## Сведения об авторе

**Борис Павлович Зеленцов** – доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: zelentsovb@mail.ru

## Вклад автора в статью

Автор рассмотрел варианты причинно-следственной связей между состояниями и событиями и на примерах показал существенную зависимость будущего от прошлого при моделировании процессов надежности.

## Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.