УДК 519.248:62-192
Оригинальная статья
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-1-30-37

Критерий эффективности смещенных оценок. Новый взгляд на старые проблемы

Виктор С. Михайлов, *Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева», Москва, Российская Федерация*
mvs1956@list.ru

Виктор С. Михайлов

Резюме. *Идеальным вариантом в задачах оценивания является использование несмещенной оценки с минимальным уклонением (дисперсией), если такая оценка существует. В настоящее время нет инструментов получения несмещенных оценок (если они существуют!). Например, полученная методом максимального правдоподобия (план испытаний NBT) оценка средней наработки до отказа $T_{ср}$ = (суммарная наработка)/(число отказов) является сильно смещенной. Такое положение дел не может устроить тех, кто занимается решением прикладных задач. Эффективными несмещенными оценками пользуются всегда, когда они существуют. Если невозможно найти эффективную несмещенную оценку в смысле среднеквадратического уклонения, то следует научиться сравнивать смещенные оценки. Подавляющее большинство задач связано с оценками, имеющими смещение. В классе смещенных оценок следует искать оценки с минимальным смещением, а среди них – с минимальным уклонением. Именно такие оценки следует называть в классе смещенных оценок эффективными по смещению или просто эффективными, что не противоречит классическому определению, а лишь расширяет его. Такой процесс поиска гарантирует получение оценок с хорошими точностными характеристиками. Однако при таком определении эффективной оценки по смещению всегда найдется вариант сравниваемых оценок, когда суммарное смещение одной оценки незначительно превалирует над суммарным смещением другой оценки, и то же самое происходит над суммарными уклонениями этих оценок, но уже в другом порядке. В такой постановке задачи формальный выбор эффективной по смещению оценки становится невозможным и имеет произвольный характер, т.е. выбор эффективной по смещению оценки принимается испытателем по интуиции. В этом случае выбор испытателя может стать неверным. Поэтому возникает задача построения критерия эффективности на основании которого выбор эффективной по смещению оценки становится формальностью.* **Цель работы.** *Целью работы является построение критерия эффективности на основании которого выбор эффективной по смещению оценки однозначно определяется расчетом.* **Методы исследования.** *Для нахождения эффективной по смещению оценки использовались интегральные числовые характеристики точности оценки, а именно: суммарный квадрат смещения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от исследуемых параметров законов распределений и т. д.* **Выводы.** *1) Для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний построены критерии эффективности, которые позволяют однозначно определить эффективную по смещению оценку из числа предложенных оценок. 2) На основании построенных критериев эффективности для различных планов испытаний выбраны эффективные по смещению оценки из числа предложенных.*

Ключевые слова: *оценка, эффективная оценка, критерий эффективности, план испытаний, смещенные оценки.*

Для цитирования: *Михайлов В.С. Критерий эффективности смещенных оценок. Новый взгляд на старые проблемы // Надежность. 2022. №1. С. 30-37. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-1-30-37*

Поступила *10.11.2021 г.* / **После доработки** *24.01.2022 г.* / **К печати** *18.03.2022 г.*

Введение

Определение эффективной оценки [1]: «Оценка параметра, имеющая наименьшее математическое ожидание квадрата ее отклонения от оцениваемого параметра для любого значения параметра, называется эффективной». Классическая теория математической статистики [1] замечает, что в классе всех возможных оценок параметра эффективной оценки не существует! Поэтому автор источника [1] далее пишет: «необходимо наложить некоторые ограничения на множество оценок, в котором мы ищем наилучшую эффективную оценку. Естественным сужением класса оценок является класс так называемых несмещенных оценок параметра». В этом случае эффективная оценка для скалярного параметра является несмещенной оценкой с минимальной дисперсией. В некоторых случаях узнать наилучшую несмещенную оценку помогают неравенства Крамера-Рао [1]: если оценка эффективная, то она и наилучшая в указанном выше смысле, т.к. имеет наименьшую возможную дисперсию.

Идеальным вариантом в задачах оценивания является использование несмещенной оценки с минимальным уклонением (дисперсией), если такая оценка существует. Для этого в классе несмещенных оценок следует, с целью выявления эффективной оценки, аналитически провести доказательство выполнения неравенства Крамера-Рао для этой оценки. Следует отметить, что неравенства Крамера-Рао должно выполняться для всех значений оцениваемых параметров. Но даже для экспоненциальных семейств распределений, для которых только и существуют эффективные оценки, эффективно оценить с помощью неравенства Крамера-Рао можно лишь одну какую-то функцию от параметра. Вопрос тем более открыт для семейств распределений, не являющихся экспоненциальными. Если такое доказательство сложно провести аналитически, то следует провести вычисление суммы уклонений для всех значений оцениваемого параметра. Для эффективной несмещенной оценки сумма уклонений должна быть минимальной.

В настоящее время нет инструментов получения несмещенных оценок (если они существуют!). Например, полученная методом максимального правдоподобия (план испытаний NBT) оценка средней наработки до отказа $T_{ср}$ = (суммарная наработка)/(число отказов) является сильно смещенной. Такое положение дел не может устроить тех, кто занимается решением прикладных задач. Эффективными несмещенными оценками пользуются всегда, когда они существуют. Если невозможно найти эффективную несмещенную оценку в смысле среднеквадратического уклонения, то следует научиться сравнивать смещенные оценки. Подавляющее большинство задач связано с оценками, имеющими смещение.

В классе смещенных оценок следует искать оценки с минимальным смещением, а среди них – с минимальным уклонением [2]. Именно такие оценки следует называть в классе смещенных оценок эффективными по смещению или просто эффективными, что не противоречит классическому определению, а лишь расширяет его. Такой процесс поиска гарантирует получение оценок с хорошими точностными характеристиками. Заметим, что опыт построения эффективных оценок показывает, что полученная несмещенная эффективная оценка не всегда будет обладать минимальным уклонением [2]. Скорее наоборот, всегда найдется оценка, обладающая минимальным уклонением в сравнении с несмещенной оценкой. Во всех случаях, когда существует эффективная (несмещенная) оценка, существует смещенная оценка более точная, чем эффективная, т.е. с меньшим квадратом ошибки [3, стр. 284]. Этот факт свидетельствует в пользу смещения как первичного фактора при построении критерия эффективности оценок. Для определения эффективной по смещению оценки следует провести вычисление сумм смещений и уклонений для всех значений оцениваемого параметра. Для эффективной смещенной оценки каждая из сумм должна быть минимальной. Такое определение эффективной оценки в некотором выделенном классе смещенных оценок не противоречит определению эффективной оценки в классе несмещенных оценок. Наоборот, определение эффективной оценки в классе несмещенных оценок является частым случаем определения эффективной оценки в некотором выделенном классе смещенных оценок, включающий подкласс несмещенных оценок.

Почему именно интегральный подход? При сравнении классическим методом, когда уклонение должно быть минимальным сразу для всех значений параметра, получаем, что одна из сравниваемых смещенных оценок будет обладать меньшим уклонением в одной части значений параметра, а другая – в оставшейся, при сравнимом смещении. Для их сравнения и требуется суммирование всех уклонений (смещений). Суммы смещений и уклонений определяют критерий эффективности.

Однако при таком определении эффективной оценки по смещению всегда найдется вариант сравниваемых оценок, когда суммарное смещение одной оценки незначительно превалирует над суммарным смещением другой оценки, и то же самое происходит над суммарными уклонениями этих оценок, но уже в другом порядке. В такой постановке задачи формальный выбор эффективной по смещению оценки становится невозможным и имеет произвольный характер, т.е. выбор эффективной по смещению оценки принимается испытателем по интуиции. В этом случае выбор испытателя может стать неверным. Поэтому возникает задача построения критерия эффективности, на основании которого выбор эффективной по смещению оценки становится формальностью.

Цель работы

Целью работы является построение критерия эффективности, на основании которого выбор эффективной по смещению оценки однозначно определяется расчетом.

Методы исследования

Для нахождения эффективной по смещению оценки использовались интегральные числовые характеристики точности оценки, а именно: суммарный квадрат смещения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от исследуемых параметров законов распределений и т.д. [2].

Построение критерия эффективности оценок

Обозначим через $A(\theta)$ суммарное смещение оценки θ от оцениваемого параметра t, а через $B(\theta)$ суммарное уклонение оценки θ от оцениваемого параметра t. Заметим, что суммирование происходит в рабочем диапазоне по всем значениям оцениваемого параметра t, так и по всем значениям параметров плана испытаний и иных параметров (например, время за которое оценивается вероятность безотказной работы (ВБР)).

Для нужд построения критерия эффективности смещенных оценок будем произвольную статистическую оценку θ характеризовать смещением и дисперсией. Обозначим через $b = E(\theta) - t$ смещение оценки θ от параметра t, где E – математическое ожидание, а через D – дисперсию оценки θ. Тогда уклонение (в среднем квадратичном смысле) некоторой оценки θ от оцениваемого параметра t выражается формулой [1, 4, 5]

$$B(\theta) = E(\theta - t)^2 = D + b^2. \tag{1}$$

Заметим, что уклонение, как характеристика эффективности, при изменении дисперсии тоже изменяется на эту величину (см. формулу (1)). Т.е. ее изменение происходит без учета зависимости от конкретной величины смещения оценки. Попытаемся связать дисперсию и квадрат смещения так, чтобы при изменении дисперсии уклонение менялось с учетом смещения. Учтем, что смещение является первичным фактором при выборе эффективной оценки. И потребуем от вновь построенной характеристики $C(\theta)$, чтобы при изменении дисперсии на величину δD для небольших смещений $b \approx 0 + \delta$, учет влияния смещения на характеристику был незначительным, и наоборот, для больших смещений $b >> 0$, учет влияния смещения на характеристику $C(\theta)$ был значительным. И потребуем, чтобы изменение характеристики $C(\theta)$ было линейным относительно характеристик D и b^2. Этим требованиям наиболее полно подходит произведение характеристик D и b^2:

$$C(\theta) = D \cdot b^2. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что с изменением дисперсии на величину δD характеристика $C(\theta) = (D + \delta D) \cdot b^2 = D \cdot b^2 + \delta D \cdot b^2$ изменяется на величину, которая учитывает величину квадрата смещения линейно. Верна и обратная ситуация, т.е. с изменением квадрата смещения на некоторую величину характеристика $C(\theta)$ изменяется на величину, которая учитывает величину дисперсии линейно. Фигурально выражаясь, отображением характеристики $C(\theta)$ на прямоугольные оси координат D и b^2 является прямоугольник с площадью $D \cdot b^2$. Любое незначительное изменение характеристик D и b^2 приводит к изменению площади или конфигурации прямоугольника. Т.о. при незначительных отличиях характеристик D и b^2 следует в качестве эффективной по смещению выбирать оценку с минимальной характеристикой $C(\theta)$ (площадью). При равенстве характеристик $C(\theta)$ (площадей) следует выбирать, в качестве эффективной по смещению, оценку с наименьшей величиной смещения. Напомним, что построение критерия осуществлялось только для смещенных оценок. В случае несмещенных оценок такой характеристикой (критерием) служит уклонение $B(\theta)$ (см. формулу (1)). Заметим, что для несмещенных оценок их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон. При формулировании критерия эффективности следует потребовать от смещенных оценок аналогичных качеств.

Сформулируем требования к процессу выбора эффективных оценок по смещению:

– предлагаемые оценки должны быть строго монотонны по всем своим параметрам;

– выбираются оценки с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$ или близкие к таковым.

Если в процессе выбора из числа предложенных оценок оказалась единственная несмещенная оценка, то она и является эффективной по смещению. Для того, чтобы эта оценка оказалась эффективной в классе несмещенных оценок, необходимо доказать неравенство Крамера-Рао для этой оценки;

– исключаются оценки, для которых выполняется неравенство $A = b^2 > D$, т.е. смещение превалирует над разбросом значений этой оценки;

– выбираются оценки, для которых выполняется неравенство $D / A > 4$, т.е. оценки, для которых их реализации группируются вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон;

– среди оставшихся оценок выбирается оценка с минимальным смещением $A(\theta) = b^2$ или близкими к таковой (+5 … +20%). В случае единственной выбранной оценки с минимальным смещением A эта оценка признается эффективной по смещению;

– в случае с равными A в качестве эффективной по смещению выбирается оценка с минимальной дисперсией.

Большинство манипуляций заменяет предложенный критерий $C(\theta) = D \cdot b^2$.

Рассмотрим примеры построения критерия выбора эффективных по смещению оценок.

Биномиальный план испытаний. Вероятность безотказной работы

Здесь и далее воспользуемся результатами работ [2]. Обозначим через θ некоторую абстрактную оценку вероятности отказа в процессе испытаний n изделий. Ограничим объем испытаний $0 < n \leq 10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула суммарного смещения примет вид

$$A\left(\theta\left(n;R\right)\right)=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_{0}^{1}\left(E\theta\left(n;R\right)-p\right)^{2}dp.$$

Формула для суммарной дисперсии имеет вид

$$D\left(\theta\left(n;R\right)\right)=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_{0}^{1}E\left(\theta\left(n;R\right)-E\theta\left(n;R\right)\right)^{2}dp.$$

Заметим, что функция вероятности биномиального плана испытаний P_{Σ} монотонно убывает с ростом p [5], а следовательно уравнения $P_{\Sigma}\left(R=r\right)=\sum_{k=0}^{r}P_{n}\left(k,w\right)=0,5+x$ и $P_{\Sigma}\left(R=r\right)=\sum_{k=0}^{r}P_{n}\left(k,v\right)=0,5$ имеют единственное решение, где $P_n(k,p) = C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$.

Расчеты показывают, что оценке w, минимизирующей функционал $A(\theta(n;R))$, соответствует вероятность $\gamma = 0,5 + x = 0,81$. В табл. 1 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок вероятности отказа: v, w, $p_0 = R / n$, p_1, p_2, p_3 [5] и $u = (R + 1)/(n + 2)$, где

$p_1 = v(0,5;n)$, $R = 0$ и $p_1 = R / n$, $R > 0$;
$p_2 = w(0,81;n)$, $R = 0$ и $p_2 = R / n$, $R > 0$;
$p_3 = w(0,81;n)$, $R = 0$ и $p_3 = u$, $R > 0$.

Вычисления функционалов $A(\theta(n;R))$ и $D(\theta(n;R))$ проводились с шагом $\partial p = 10^{-3}$. А вычисления неявно заданных оценок w и v проводились с точностью 10^{-4}.

Здесь и далее при построении таблицы использовался вариант вычисления характеристики $C = D\cdot A$, когда вычисление функционалов A и D осуществлялось для каждого значения параметров n и p с последующим их раздельным суммированием, и уже на основе полученных суммарных значений A и D вычислялась характеристика $C = D\cdot A$.

Заметим, что вычисление характеристики C напрямую как функционала

$$C\left(\theta\left(n;R\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_{0}^{1}E\left\{\theta\left(n;R\right)-E\theta\left(n;R\right)\right\}^{2}\cdot\left\{E\theta\left(n;R\right)-p\right\}^{2}dp$$

сталкивается с большими вычислительными трудностями, связанными с ограниченной величиной характеристики разрядной сетки электронно-вычислительной машины, что в процессе вычисления приводит к обнулению значимых величин для суммирования. Что, в последующем итоге, и отражается на конечном результате.

Несмещенную оценку $p_0 = R / n$, приведенную для сравнения, из рассмотрения в качестве эффективной по смещению исключаем, хотя именно она является эффективной.

Из табл. 1 следует, что из рассмотрения следует исключить оценки v, p_1, p_3, u, для которых не выполняется неравенство $D / A > 4$. Тогда из табл. 1 также следует, что минимальными и соизмеримыми смещениями обладают оценки w и p_2. Их величины отличаются на максимальные $(0,0037 – 0,0015)\cdot 100 / 0,0037 = 59\%$. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве эффективной следует однозначно считать оценку p_2. Из построения следует, что построенный критерий на основе характеристики $C = D\cdot A$ однозначно определяет эффективную по смещению оценку, без проведения предыдущих в абзаце большинства рассуждений.

Предложенные оценки v, w, p_1, p_2 для биномиального плана испытаний имеют смещение, которое можно уменьшить, при этом вид оценок несколько изменится, а именно:

$\hat{}v = v(0,5;n,R) – 0,4 / ((R + 1)n)$;
$\hat{}w = w(0,81;n,R) – 0,1/((R+1)n)$;
$p_{10} = \hat{}v(0,5;n)$, $R = 0$ и $p_{10} = R / n$, $R > 0$;
$p_{20} = \hat{}w(0,81;n)$, $R = 0$ и $p_{20} = R / n$, $R > 0$.

В табл. 2 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок вероятности отказа: $\hat{}v$, $\hat{}w$, p_{10}, p_{20}.

Табл. 2. Результаты подстановки оценок вероятности отказа $\hat{}v$, $\hat{}w$, p_{10}, p_{20} в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид функционала	$\hat{}v$ $\gamma = 0,5$	$\hat{}w$ $\gamma = 0,81$	p_{10} $\gamma = 0,5$	p_{20} $\gamma = 0,81$
A	0,0034	0,0030	0,000680	0,000355
D	0,0356	0,0427	0,0425	0,0443
D / A	10,47	14,23	62,5	124,7
$C = D\cdot A\cdot 10^4$	1,210	1,28	0,289	0,157

Из табл. 2 следует, что для всех предложенных оценок выполняется неравенство $D / A > 4$. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок в качестве эффективной следует однозначно считать оценку p_{20}.

Табл. 1. Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид функционала	v $\gamma = 0,5$	w $\gamma = 0,81$	p_1 $\gamma = 0,5$	p_2 $\gamma = 0,81$	p_3 $\gamma = 0,81$	$u = (R + 1)/(n + 2)$	$p_0=R/n$
A	0,0176	0,0037	0,0113	0,0015	0,0070	0,0104	$6\cdot 10^{-33}$
D	0,0270	0,0402	0,0288	0,0401	0,0226	0,0162	0,0488
D / A	1,53	10,86	2,54	26,73	3,22	1,55	∞
$C = D\cdot A\cdot 10^4$	4,752	1,4874	3,2544	0,6015	1,595	1,6848	10^{-30}

Биномиальный план испытаний. Средняя наработка до отказа

Будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей (з.р.) с параметром T_0, где последний совпадает со средней наработкой до отказа (СНДО). Время испытаний каждого из N изделий обозначим через τ.

В качестве критерия получения эффективной оценки СНДО строится функционал, основанный на суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\theta(R,n)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных значений N, τ, $T_0 = t$ [2]

$$A\big(\theta\,(n;R)\big)=\frac{1}{3}\sum_{\tau=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2}\big\{E\theta\,(n;R,\tau)-t\big\}^2\,dt.$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра (СНДО) t из $[0;\infty]$.

Формула для суммарной дисперсии D имеет вид

$$D\big(\theta\,(n;R)\big)=\frac{1}{3}\sum_{\tau=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2}E\big\{\theta\big(n;R,\tau\big)-E\theta\big(n;R,\tau\big)\big\}^2 dt.$$

В табл. 3 приведены результаты подстановки в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ следующих оценок СНДО:

$T_1 = ((n - R)\cdot\tau + R\cdot\tau / 2) / (R + 1)$;

$T_2 = -\tau / \mathrm{Ln}(1 - (R + 1) / (n + 1))$;

$T_3 = -\tau / \mathrm{Ln}(1 - p_1)$;

$T_4 = -\tau/\mathrm{Ln}(1 - p_4)$, где $p_4 = u = (R + 1) / (n + 2)$, $R = 0$ и $p_4 = p_0 = R / n$, $R > 0$;

$T_5 = -\tau / \mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0,5))$;

$T_6 = -\tau/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0,62))$.

Табл. 3. Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид функционала	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
A	1513	11,27	11,26	11,09	11,01	10,59
D	1,962	3,679	7,402	7,534	4,983	9,157
D / A	≈0,01	0,32	0,65	0,67	0,45	0,86
$C = D\cdot A$	2968	41,4	83,3	83,6	54,8	96,9

Из табл. 3 следует, что в соответствии с построенным критерием все оценки следует исключить из рассмотрения, т.к. для них не выполняется критическое условие $D / A > 4$. Однако, из-за необходимости сделать выбор, оценку $T_6 = -\tau/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0,62))$ с минимальным смещением и максимальной характеристикой $D / A = 0,86$ следует признать условно эффективной по смещению.

Предложенные оценки СНДО для биномиального плана испытаний сильно смещены, однако это смещение можно уменьшить, при этом вид оценок несколько изменится, а именно:

$T_{10} = 400 + 0,015\cdot\tau + \tau\cdot(n - R + R\cdot 0,02) / (R + 0,5))$;

$T_{20} = 400 + 0,015\cdot\tau + (-\tau\cdot 0,7/\mathrm{Ln}(1 - (R + 0,4)/(n + 0,4)))$;

$T_{30} = 400 + 0,015\cdot\tau + (-\tau\cdot 0,7-\tau/\mathrm{Ln}(1 - p_1))$;

$T_{40} = 400 + 0,015\cdot\tau + (-\tau\cdot 0,7/\mathrm{Ln}(1 - p_4))$,

где $p_4 = u=(R + 1)/(n + 2)$, $R = 0$ и $p_4 = p_0 = R / n$, $R > 0$;

$T_{50} = 400 + 0,015\cdot\tau + (-\tau/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0,5))$;

$T_{60} = 400 + 0,015\cdot\tau + (-\tau\cdot 0,75/\mathrm{Ln}(1 - v(R,n,\gamma = 0,62))$.

Варианты предложенных оценок с меньшим смещением представлены в табл. 4.

Табл. 4. Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для биномиального плана испытаний

Вид функционала	T_{10}	T_{20}	T_{30}	T_{40}	T_{50}	T_{60}
A	5,67	4,62	5,34	5,27	5,03	4,85
D	9,65	7,06	3,62	3,69	4,98	5,47
D / A	1,70	1,52	0,67	0,70	0,99	1,12
$C = D\cdot A$	54	32,61	19,33	19,44	25,04	26,52

Из табл. 4 следует, что в соответствии с построенным критерием все оценки следует исключить из рассмотрения, т.к. для них выполняется критичное условие $D / A < 4$. Однако, из-за необходимости сделать выбор, оценку $T_{20} = 400 + 0,015\cdot\tau - \tau\cdot 0,7 / \mathrm{Ln}(1 - (R + 0,4) / (n + 0,4))$ с минимальным смещением следует признать условно эффективной по смещению.

Дальнейшее уменьшение смещения на выделенном классе оценок является довольно сложной задачей. В данном случае решением задачи уменьшения смещения является поиск на более широком классе оценок, включающим класс несмещенных оценок или близкий к таковым. Заметим, что чем ближе оценка к несмещенной (характеристика A стремится к нулю), если таковая существует, ее дисперсия увеличивается (см. табл. 1), стремясь снизу к дисперсии несмещенной оценки, или уменьшается, стремясь сверху к дисперсии несмещенной оценки, что вынуждает их реализации группироваться вокруг истинного количественного значения оцениваемого параметра с разных сторон, подобно реализациям несмещенных оценок. Этот факт следует непосредственно из неравенства Крамера-Рао для смещенных оценок [5, ф. 2.14.14]. Поэтому для оценок, близких по смещению к нулю, всегда будет выполняться условие $D / A > 4$. Важно заметить, что оценки выбираемого класса, предназначенного для поиска эффективных по смещению оценок, должны соблюдать строгую монотонность относительно всех своих параметров (R, τ, n).

План испытаний типа *NB*τ. СНДО

Здесь и далее обозначения плана испытаний соответствуют [6, 7]. Для плана типа $NB\tau$ достаточной статистикой является число наблюденных отказов (r) [6, 7]. Обозначим случайное число отказов через R, тогда для плана испытаний типа $NB\tau$ случайная величина R (далее – с.в.), имеет пуассоновское распределение $L(r;\Delta)$ с параметром $\Delta = n\tau / T_0$, $n = N$ [4–7]. Тогда, по определению, r – реализация с.в. R. С другой стороны, R – сумма с.в. X_i, каждая из которых есть случайное число отказов одного из N изделий ($1 < i < n$), поставленных на испытания. С.в. X_i имеют пуассоновское распределение с параметром Δ / n

$$L(r;\Delta) = \sum_{k=0}^{X_1+...+X_n=r} \exp\{-\Delta\} \cdot \frac{\Delta^k}{k!}. \quad (3)$$

Воспользуемся формулой (3) и изучим свойства оценки параметра Δ, получаемой из уравнения

$$L(r;\Delta) = \sum_{k=0}^{r} \exp\{-\Delta\} \cdot \frac{\Delta^k}{k!} = 0{,}5 \text{ или}$$

$$\varepsilon(\Delta) = \ln(2) + \ln\left(\sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k}{k!}\right) - \Delta. \quad (4)$$

Минимизируя абсолютную величину $\varepsilon(\Delta)$ в формуле (4), с необходимой точностью получим искомую точечную оценку параметра Пуассона $\Lambda = \Lambda(R)$. Имея оценку $\Lambda(R)$, легко получить оценку СНДО $T_5 = n\tau / \Lambda$. Рассмотрим следующие оценки СНДО:

– неявно заданная оценка $T_5 = n\tau / \Lambda$;
– $T_1 = 2n\tau$, при $R = 0$ и $T_1 = n\tau / (R + 1)$, при $R > 0$;
– $T_2 = 2n\tau$, при $R = 0$ и $T_2 = n\tau / R$, при $R > 0$;
– $T_3 = n\tau / (R + 1)$;
– $T_4 = 6n\tau$, при $R = 0$ и $T_4 = n\tau / (R + 0{,}5)$, при $R > 0$;
– $T_6 = 1{,}5n\tau / \Lambda$ при $R = 0$ и $T_6 = n\tau / (\Lambda + 0{,}5)$, при $R > 0$;
– $T_7 = n\tau / (R + 1) + n\tau e^{-(R+1)} / (R + 1)$ [8];
– $T_8 = n\tau / (R + 1) + n\tau 10^{-(R+0{,}5)} / (R + 0{,}5)$;
– $T_9 = n\tau / (R + \beta(R))$ при $\beta = 0{,}7$;
– $T_{10} = 2{,}1n\tau$, при $R = 0$ и $T_{10} = n\tau / (R + 1{,}2)$, при $R > 0$;
– $T_{11} = 2{,}2n\tau$, при $R = 0$ и $T_{11} = n\tau / (R + 1 + 1 / R)$, при $R > 0$.

В основе сравнения этих оценок по смещению лежит функционал ($T_0 = t$) [2]

$$A(\theta(n;R)) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \{E\theta(n;R) - t\}^2 \, d\Delta.$$

Формула для нормированной дисперсии D имеет вид

$$D(\theta(n;R)) = \int_0^\infty \frac{1}{t^2} E\{\theta(n;R) - E\theta(n;R)\}^2 d\Delta.$$

В табл. 5 приведены результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$.

Из табл. 5 следует, что оценки T_1, T_6, T_8, T_{10} и T_{11} имеют примерно одинаковые смещения. Их величины максимально отличаются на $(0{,}28 – 0{,}214) \cdot 100 / 0{,}28 = 23\%$. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок, в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку T_{11} с минимальной величиной характеристики $C = 0{,}841$.

Заметим, что в [2] приведено доказательство того факта, что в классе оценок $T_R = n\tau / (R + 1) + n\tau f(R)$ оценка $T_1 = 2n\tau$, при $R = 0$ и $T_1 = n\tau / (R + 1)$, при $R > 0$ доставляет минимум функционалу $A = 0{,}25$. Докажем, что оценка $T_9 = n\tau / (R + \beta(R))$ не принадлежит классу оценок T_R, для этого достаточно представить оценку T_9 в виде $T_9 = n\tau(R + 2) / (R + 1)(R + \beta(R)) – n\tau / (R + 1)(R + \beta(R))$, откуда и следует утверждение. Единственная оценка из класса T_9, принадлежащая классу оценок T_R, является оценка вида

$$T_9 = n\tau / (R + \beta(R)) =$$
$$= n\tau(R + 2) / (R + 1) (R + \beta(R)) – n\tau / (R + 1)(R + \beta(R)) =$$
$$= n\tau(R + 2) / (R + 1)(R + 2) – n\tau / (R + 1)(R + 2) =$$
$$= n\tau / (R + 1) – n\tau / (R + 1)(R + 2)$$

при $\beta(R) = 2$ (или при $\beta(R) = 0$, т.е. $T_2 = 2n\tau$, при $R = 0$ и $T_2 = n\tau / R = n\tau / (R + 1) + n\tau / R(R + 1)$, при $R > 0$). Где легко заметить, что $n\tau f(R) = –n\tau / (R + 1)(R + 2)$. Поэтому появление величин функционала $A(T_{10}) = 0{,}234 < 0{,}25$ на оценке T_{10} и $A(T_{11}) = 0{,}214 < 0{,}25$ на оценке T_{11} вполне оправдано.

План испытаний типа $NB\tau$. Вероятность безотказной работы

Введем обозначение $m = n\tau$. Рассмотрим оценки ВБР за временной отрезок g вида $\theta(m,g;R) = \exp\{-g / T_i\}$, где T_i – некоторая оценка СНДО (см. табл. 5). Будем рассматривать вместо оценки T_6 оценку вида $T_9 = 4n\tau / \Lambda$ при $R = 0$ и $T_9 = n\tau / \Lambda$, при $R > 0$.

В основе сравнения оценок ВБР по величине суммарного смещения лежит функционал вида [2]

Табл. 5. Результаты подстановки предложенных оценок СНДО в функционалы $A(\theta(n;R))$, $D(\theta(n;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид функционала	A	D	D/A	$C=D \cdot A$
$T_{11} = 2{,}2n\tau$, при $R = 0$ и $T_{11} = n\tau / (R + 1 + 1 / R)$, при $R > 0$	0,214	3,93	18,36	0,841
$T_{10} = 2{,}1n\tau$, при $R = 0$ и $T_{10} = n\tau / (R + 1{,}2)$, при $R > 0$	0,234	3,89	16,62	0,910
$T_6 = 1{,}5n\tau / \Lambda$ при $R = 0$ и $T_6 = n\tau / (\Lambda + 0{,}5)$, при $R > 0$	0,234	3,98	17,00	0,931
$T_1 = 2n\tau$, при $R = 0$ и $T_1 = n\tau / (R + 1)$, при $R > 0$	0,25	4,12	16,48	1,03
$T_8 = n\tau / (R + 1) + n\tau 10^{-(R+0{,}5)} / (R + 0{,}5)$	0,28	4,00	14,28	1,134
$T_7 = n\tau / (R + 1) + n\tau e^{-(R+1)} / (R + 1)$ [8]	0,34	4,1	12,05	1,394
$T_9 = n\tau / (R+0{,}7)$	0,364	4,43	12,17	1,61
$T_5 = n\tau / \Lambda$	0,37	4,51	12,18	1,66
$T_3 = n\tau / (R + 1)$	0,500	3,72	7,44	2,30
$T_2 = 2n\tau$, при $R = 0$ и $T_2 = n\tau / R$, при $R > 0$	1,437	7,94	5,52	11,40
$T_4 = 6n\tau$, при $R = 0$ и $T_4 = n\tau / (R + 0{,}5)$, при $R > 0$	5,36	10,21	1,90	54,72

Табл. 6. Результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$

Вид функционала	e^{-g/T_1}	e^{-g/T_2}	e^{-g/T_3}	e^{-g/T_4}	e^{-g/T_5}	e^{-g/T_9}	e^{-g/T_7}
A	0,0346	0,0300	0,0641	0,0156	0,0410	0,0157	0,0458
D	0,0987	0,1066	0,0740	0,1501	0,0876	0,1486	0,0851
D / A	2,85	3,55	1,15	9,62	2,13	9,46	1,85
$C = D{\cdot}A{\cdot}10^3$	3,415	3,198	47,43	2,341	35,91	2,333	3,914

$$A(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty\frac{1}{t^2}\left\{E\theta(n;R,m,g)-\exp(-g\Delta/m)\right\}^2 d\Delta.$$

Формула для нормированной дисперсии D имеет вид

$$D(\theta)=\frac{1}{3}\sum_{m=10^3}^{10^5}\frac{1}{10}\sum_{g=10^3}^{10^5}\int_0^\infty\frac{1}{t^2}E\left\{\begin{matrix}\theta(n;R,m,g)-\\ -E\theta(n;R,m,g)\end{matrix}\right\}^2 d\Delta.$$

В табл. 6 приведены результаты подстановки предложенных оценок ВБР в функционалы $A(\theta(m,g;R))$, $D(\theta(m,g;R))$ для плана испытаний типа $NB\tau$.

Из табл. 6 следует, что оценки e^{-g/T_4} и e^{-g/T_9} имеют примерно одинаковые смещения. Их величины отличаются на $(0{,}0157 - 0{,}0156)\cdot 100 / 0{,}0157 = 0{,}63\%$. В соответствии с предложенным критерием эффективности смещенных оценок, в качестве наиболее эффективной следует однозначно считать оценку e^{-g/T_9} с минимальной величиной характеристики $C = 2{,}333$.

Пример 1. В процессе испытаний на надежность ряда из 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку ВБР контролируемой партии изделий, используя эффективные по смещению оценки для биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Результаты расчета приведены в табл. 7.

Из примера 1 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний в рамках примера 1 результаты эффективных по смещению оценок различаются (случай $R = 0$). Выбор того, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

Пример 2. В процессе испытаний на надежность в течении 1000 ч ряда из 1, 2, …, 10 изделий отказы не возникали. Требуется дать оценку СНДО контролируемой партии изделий, используя эффективные оценки для

Табл. 7. Результаты расчета ВБР примера 1 ($\tau = g$, $R = 0$)

$N = n$	$p_{20} = \hat{}w(0{,}81;n)$, $R = 0$ и $p_{20} = R / n$, $R > 0$; $P_{20} = 1 - p_{20}(R = 0) = 1 - \hat{}w(\gamma = 0{,}81, R = 0)$ Биномиальный план	$P_{NB\tau}(T_9) = \exp\{-g\Lambda / 4n\tau\}$, $g = \tau$, $R = 0$, $\Lambda(R) = 0{,}693148$ План типа $NB\tau$
1	0,91	0,841
2	0,95	0,917
3	0,965	0,944
4	0,973	0,958
5	0,978	0,966
6	0,982	0,972
7	0,984	0,976
8	0,986	0,979
9	0,988	0,981
10	0,989	0,983

Табл. 8. Результаты расчета СНДО примера 2 ($\tau = 1000$, $R = 0$)

$N = n$	$T_{20} = 400 + 0{,}015\cdot\tau +$ $+ (-\tau\cdot 0{,}7 / \mathrm{Ln}(1 - (R + 0{,}4)/(n + 0{,}4)))$ Биномиальный план	$T_{11} = 2{,}2n\tau$, при $R = 0$ и $T_{11} = n\tau / (R + 1 + 1 / R)$, при $R > 0$ План типа $NB\tau$
1	2495	2200
2	4254	4400
3	6008	6600
4	7759	8800
5	9511	11000
6	11261	13200
7	13012	15400
8	14762	17600
9	16512	19800
10	18263	22000

биномиального плана испытаний и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний. Результаты расчета приведены в табл. 8.

Из примеров 1 и 2 следует, что для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний результаты эффективных по смещению оценок различаются (случай $R = 0$). Выбор того, какие оценки следует использовать в этом случае, остается за испытателем.

Послесловие

Сформулирован общий подход к построению критерия эффективности смещенных оценок. Для различных планов испытаний построены критерии эффективности, которые позволяют однозначно определить эффективную по смещению оценку из числа предложенных оценок. Однако задача построения (получения) эффективных оценок (смещенных и нет) с хорошими статистическими свойствами остается по прежнему основной в теории надежности и ждет своего решения.

Выводы

1) Для биномиального плана и плана испытаний с восстановлением и ограниченным временем испытаний построены критерии эффективности, которые позволяют однозначно определить эффективную по смещению оценку из числа предложенных оценок.

2) На основании построенных критериев эффективности для различных планов испытаний выбраны эффективные по смещению оценки из числа предложенных.

Библиографический список

1. Ясногородский Р.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. Санкт-Петербург: Наукоемкие технологии, 2019. 320 с.

2. Михайлов В.С., Юрков Н.К. Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. 149 с.

3. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебн. пособие: 2-е изд., исправл. и дополн. М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 496 с.

4. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с.

5. Шуленин В.П. Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика. Томск.: Издательство НТЛ, 2012. 540 с.

6. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.

7. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ: Изд.2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 584 с.

8. Михайлов В.С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ // Надежность и контроль качества. 1988. № 9. С. 6–11.

Сведения об авторе

Виктор Сергеевич Михайлов – ведущий инженер, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» (ФГУП «ЦНИИХМ»). Адрес: ул. Нагатинская, д. 16а, Москва, Российская Федерация, 115487, e-mail: Mvs1956@list.ru

Вклад автора в статью

Автором предложен новый критерий эффективности по смещению и на основе предложенного критерия получены эффективные по смещению оценки различных планов испытаний.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.