

**Носов М.В.**

МЕТОД УСТРАНЕНИЯ ВЗАИМНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОЦЕНОК ЭЗАРИ-ПРОШАНА В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА СВЯЗНОСТИ ДВУХПОЛЮСНЫХ СЕТЕЙ

Рассматривается содержание метода, обеспечивающего устранение взаимного пересечения и уменьшение значений погрешностей оценок Эзари-Прошана.

Ключевые слова: вероятность связности, вероятность несвязности, двухполюсная сеть, случайный граф двухполюсной сети, простая цепь, простой разрез, верхняя оценка, нижняя оценка, точное значение, оценки Эзари-Прошана, двухсторонние оценки, элементарные конструкции.

1. Общие положения и постановка задачи

В настоящее время наиболее известными оценками вероятности связности (ВС) двухполюсных сетей (ДС) являются оценки Эзари-Прошана (ОЭП). [1,3,7,8,9].

В ОЭП в качестве оценочных случайных графов двухполюсных сетей (СГ ДС) используются [3]:

- для расчета верхней границы оценок – оценочный СГ ДС, состоящий из полного множества параллельно соединенных простых цепей (ПЦ) с учетом того, что взаимная зависимость между ПЦ не учитывается;

- для расчета нижней границы оценок – оценочный СГ ДС, состоящий из полного множества последовательно соединенных простых разрезов (ПР) с учетом того, что взаимная зависимость между ПР не учитывается.

Однако наличие зависимостей между ПЦ или ПР в соответствующих оценочных СГ ДС увеличивает погрешность ОЭП относительно точного значения ВС ДС [2, 3].

Кроме того ОЭП при неполном использовании теоретически возможного множества ПЦ и ПР в оценочных СГ ДС взаимно пересекаются, что также является существенным недостатком ОЭП [3,6] (см. рис. 6).

Вследствие этого ОЭП сохраняют «исторический и методический интерес», но не востребованы для практического применения [9].

Поэтому ниже рассматривается метод, позволяющий устранить взаимное пересечение и получить монотонную сходямость ОЭП к точному значению ВС СГ ДС, а также снизить погрешность ОЭП.

Допустим, что анализируемая ДС будет представлена в виде СГ ДС, в котором между вершинами-полюсами S и t передается некоторое сообщение.

Будем полагать, что математическая модель СГ ДС формально задана, если помимо вершин-полюсов s и t определено и ограничение на число ϕ транзитных вершин в путях связи между s и t такое, что $0 \leq \phi \leq (m_v - 2)$, где $m_v = |V| = \left| \bigcup_{i=1, \overline{|V|}} \{v_i\} \right|$ – мощность множества вершин СГ ДС.

Для принятых условий требуется представить теоретическое обоснование метода, обеспечивающего монотонную (не пересекаемую) сходимость ОЭП к точному значению ВС СГ ДС, а также снижение погрешности ОЭП.

2. Содержание метода

Для раскрытия содержания метода воспользуемся некоторыми теоретическими положениями работ [10,11] и сформулируем следующую теорему.

Теорема. Путь структура анализируемого СГ ДС состоит из множества вершин $V = \{\vartheta_i\}$, $i = 1, \overline{|m_v|}$, где $|m_v|$ – мощность множества вершин, и множества ребер $L = \{l_\xi\}$, $\xi = 1, \overline{|m_L|}$, где $|m_L|$ – мощность множества ребер, в составе которых имеется подмножество общих (мостиковых) ребер $L^0 = \{l_\xi^0\}$, $\xi = 1, \overline{|m_{L^0}|}$, $L^0 \in L$. Допустим, что вершины СГ ДС абсолютно надежны. Надежность мостикового ребра l_ξ^0 характеризуется двумя состояниями: работоспособным – l_ξ^0 или неработоспособным $\bar{l}_\xi^0$, соответственно с вероятностями $p(l_\xi^0)$ и $q(l_\xi^0) = 1 - p(l_\xi^0)$. С учетом этого положения, число всевозможных состояний (гипотез) мостиковых ребер определим как:

$$\Gamma^0 = 2^{m_{L^0}} = \{\Gamma_i^0\}, i = 1, \overline{|m_{\Gamma^0}|}, \quad (1)$$

где $|m_{\Gamma^0}|$ – мощность множества состояний (гипотез) общих ребер.

Анализируемый СГ ДС характеризуется множеством ПЦ $M = \{\mu_n\}$, $n = 1, \overline{|m_M|}$, где $|m_M|$ – мощность множества ПЦ, и множеством ПР $R = \{r_n\}$, $n = 1, \overline{|m_R|}$, где $|m_R|$ – мощность множества ПР, которые соответственно образуют структуру оценочного СГ ДС по ПЦ – $G_{s,t}^{ПЦ}$ и структуру оценочного СГ ДС по ПР – $G_{s,t}^{ПР}$.

Оценочные СГ ДС $G_{s,t}^{ПЦ}$ и $G_{s,t}^{ПР}$ при нахождении подмножества их мостиковых ребер $L^0 = \{l_\xi^0\}$ в состоянии Γ_i^0 преобразуются соответственно в условные оценочные СГ ДС $G_{s,t(i)}^{ПЦ}$ и $G_{s,t(i)}^{ПР}$, т.е.

$$\begin{cases} G_{s,t}^{ПЦ} / \Gamma_i^0 = G_{s,t(i)}^{ПЦ} \\ G_{s,t}^{ПР} / \Gamma_i^0 = G_{s,t(i)}^{ПР} \end{cases} \quad (2)$$

В работах [3,4] показано, что для расчета верхней ОЭП должно быть применено равенство:

$$P_{s,t}^{BO} = 1 - P_{s,t}^{HO}, \quad (3)$$

где $P_{s,t}^{HO}$ – нижняя оценка вероятности несвязности вершин s и t в СГ ДС.

Для указанных условий требуется доказать справедливость применения для расчета верхней и нижней оценок ВС анализируемого СГ ДС соответствующих формул следующего вида:

$$P_{s,t}^{BO} = 1 - \left[P_{s,t}^{HO} = \sum_{i=1}^{m_{L^0}} P_{s,t(i)}^{HO} = \sum_{i=1}^{m_{L^0}} P(\Gamma_i^0) P(G_{s,t(i)}^{ПЦ} / \Gamma_i^0) \right], \quad (Т. 1)$$

$$P_{s,t}^{HO} = \sum_{i=1}^{m_{L^0}} P_{s,t_i}^{HO} = \sum_{i=1}^{m_{L^0}} P(\Gamma_i^0) P(G_{s,t_i}^{PP} / \Gamma_i^0), \quad (Т. 2)$$

где $P(\Gamma_i^0)$ – вероятность i -го состояния подмножества мостиковых ребер

$$L^0 = \{l_\xi^0\}, \xi = \overline{1, m_{L^0}};$$

$\overline{P(G_{s,t}^{ПП} / \Gamma_i^0)}$ – условная вероятность несвязности вершин S и t СГ ДС по ПЦ, соответствующая гипотезе Γ_i^0 . Для краткости написания обозначим эту вероятность как $P(G_{s,t_i}^{ПП})$, где $G_{s,t_i}^{ПП} = G_{s,t_i}^{ПП} / \Gamma_i^0$;

$P(G_{s,t}^{PP} / \Gamma_i^0)$ – условная вероятность связности вершин S и t СГ ДС по ПР, соответствующая гипотезе Γ_i^0 . Эту оценку обозначим как $P(G_{s,t_i}^{PP})$, где $G_{s,t_i}^{PP} = G_{s,t_i}^{PP} / \Gamma_i^0$;

$$P_{s,t_i}^{HO} = P(\Gamma_i^0) \overline{P(G_{s,t_i}^{ПП} / \Gamma_i^0)} \quad (Т.3)$$

- вероятность несвязности вершин S и t анализируемого СГ ДС по ПЦ при условии, что СГ ДС находится в состоянии Γ_i^0 .

Доказательство. Так как множество гипотез (состояний) $\Gamma_i^0 = \{\Gamma_i^0\}, i = \overline{1, m_{L^0}}$ подмножества мостиковых ребер $L^0 = \{l_\xi^0\}, \xi = \overline{1, m_{L^0}}$, образуют полную группу несовместных событий, а условные СГ ДС (2) могут быть образованы только в соответствии с одной из гипотез $\Gamma_i^0, i = \overline{1, m_{L^0}}$, то согласно содержания формулы полной вероятности [2], равенства (Т.1) и (Т. 2) определены верно. Теорема доказана.

Следствие. При $\xi=1, \Gamma^0=2^1=2: \Gamma_1^0=l_1, \Gamma_2^0=\bar{l}_1$.

Тогда:

$$P_{s,t}^{BO} = 1 - \left[P_{s,t}^{HO} = \sum_{i=1}^2 P_{s,t_i}^{HO} = \sum_{i=1}^2 P(\Gamma_i^0) \overline{P(G_{s,t_i}^{ПП} / \Gamma_i^0)} \right], \quad (4)$$

$$\text{где } P_{s,t_i}^{HO} = P(\Gamma_i^0) P(G_{s,t_i}^{ПП} / \Gamma_i^0), \quad (5)$$

$$P_{s,t}^{HO} = \sum_{i=1}^2 P_{s,t_i}^{HO} = \sum_{i=1}^2 P(\Gamma_i^0) P(G_{s,t_i}^{ПП} / \Gamma_i^0), \quad (6)$$

При $\xi=2, \Gamma^0=2^2=4: \Gamma_1^0=l_1 \cdot l_2; \Gamma_2^0=\bar{l}_1 \cdot l_2; \Gamma_3^0=l_1 \cdot \bar{l}_2; \Gamma_4^0=\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2$.

Для этого варианта:

$$P_{s,t}^{BO} = 1 - \left[P_{s,t}^{HO} = \sum_{i=1}^4 P_{s,t_i}^{HO} = \sum_{i=1}^4 P(\Gamma_i^0) \overline{P(G_{s,t_i}^{ПП} / \Gamma_i^0)} \right], \quad (7)$$

$$\text{где } P_{s,t}^{HO} = \sum_{i=1}^4 P_{s,t_i}^{HO} = \sum_{i=1}^4 P(\Gamma_i^0) P(G_{s,t_i}^{ПП} / \Gamma_i^0), \quad (8)$$

и т.д.

Вероятность гипотезы Γ_i^0 определим как:

$$P(\Gamma_i^0) = \prod_{\xi \in \beta_1} P(l_\xi^0) \prod_{\xi \in \beta_2} q(l_\xi^0), \quad (9)$$

где β_1 и β_2 – обозначения соответственно подмножеств работоспособных и отказавших мостиковых ребер, составляющих гипотезу Γ_i^0 ;

$P(l_\xi^0)$ – вероятность нахождения общего ребра l_ξ^0 в работоспособном состоянии, $q(l_\xi^0) = 1 - P(l_\xi^0)$.

Расчет условных вероятностей $P(G_{s,t_i}^{III})$ и $P(G_{s,t_i}^{PP})$ выполним согласно структур условных оценочных СГ ДС по ПЦ – G_{s,t_i}^{III} и по ПР – G_{s,t_i}^{PP} , полученных соответственно из оценочных СГ ДС $G_{s,t}^{III}$ и $G_{s,t}^{PP}$ при условии, что подмножество $L^0 = \{l_\xi^0\}$ общих ребер находится в состоянии i .

Покажем, что применение комбинаторного метода устраняет взаимное пересечение ОЭП. С этой целью сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение. Дано: исходный СГ ДС (рис. 1) и его оценочные СГ ДС (рис. 2а и рис. 2б) для расчета соответственно верхней оценки $P_{s,t}^{BO}$ и нижней оценки $P_{s,t}^{HO}$ вероятности связности. Если для расчета $P_{s,t}^{BO}$ и $P_{s,t}^{HO}$ применяется предложенный комбинаторный метод, то получаемые при этом двухсторонние оценки ВС на i -х итерационных шагах не пересекаются.

Требуется доказать:

$$P_{s,t}^{BO}(\Gamma_i^0) > P_{s,t}^{HO}(\Gamma_i^0), \quad (У. 1)$$

для всех значений $0 < p(l_\xi) < 1$.

Доказательство. Поскольку всевозможные гипотезы $\Gamma^0 = \{\Gamma_i^0\}$, используемые для определения верхней и нижней ОЭП, являются одинаковыми и составляют полную группу, то согласно формулы разложения Мура-Шеннона для каждой i -й гипотезы справедливо неравенство $P_{s,t}^{BO}(\Gamma_i^0) > P_{s,t}^{HO}(\Gamma_i^0)$ для всех значений $0 < p(l_\xi) < 1$ [12]. Утверждение доказано.

Для иллюстрации содержания предложенного метода анализа двухсторонних ОЭП воспользуемся двухмостиковым СГ ДС, со сквозной нумерацией элементов, рис. 1. [3]

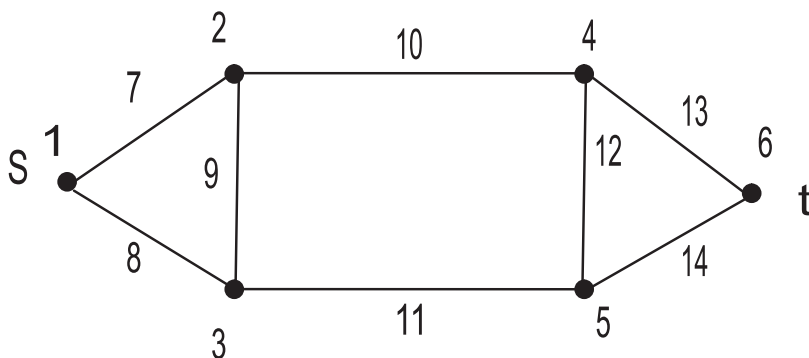


Рис. 1. Двухмостиковый СГ ДС со сквозной нумерацией элементов

Структурные элементы на рис. 1 имеют только цифровые обозначения. Этот СГ ДС характеризуется множеством ПЦ (рис. 2а) вида:

$$M_{s,t} = \left\{ \begin{aligned} &M_{n=1} = (7, 10, 13), M_{n=2} = (8, 11, 14), M_{n=3} = (7, 10, 12, 14), M_{n=4} = (7, 9, 11, 14), \\ &M_{n=5} = (8, 9, 10, 13), M_{n=6} = (8, 11, 12, 13), M_{n=7} = (7, 9, 11, 12, 13), M_{n=8} = (8, 9, 10, 12, 14) \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

определяющее верхнюю ОЭП, а также множеством ПР (рис. 2б) вида:

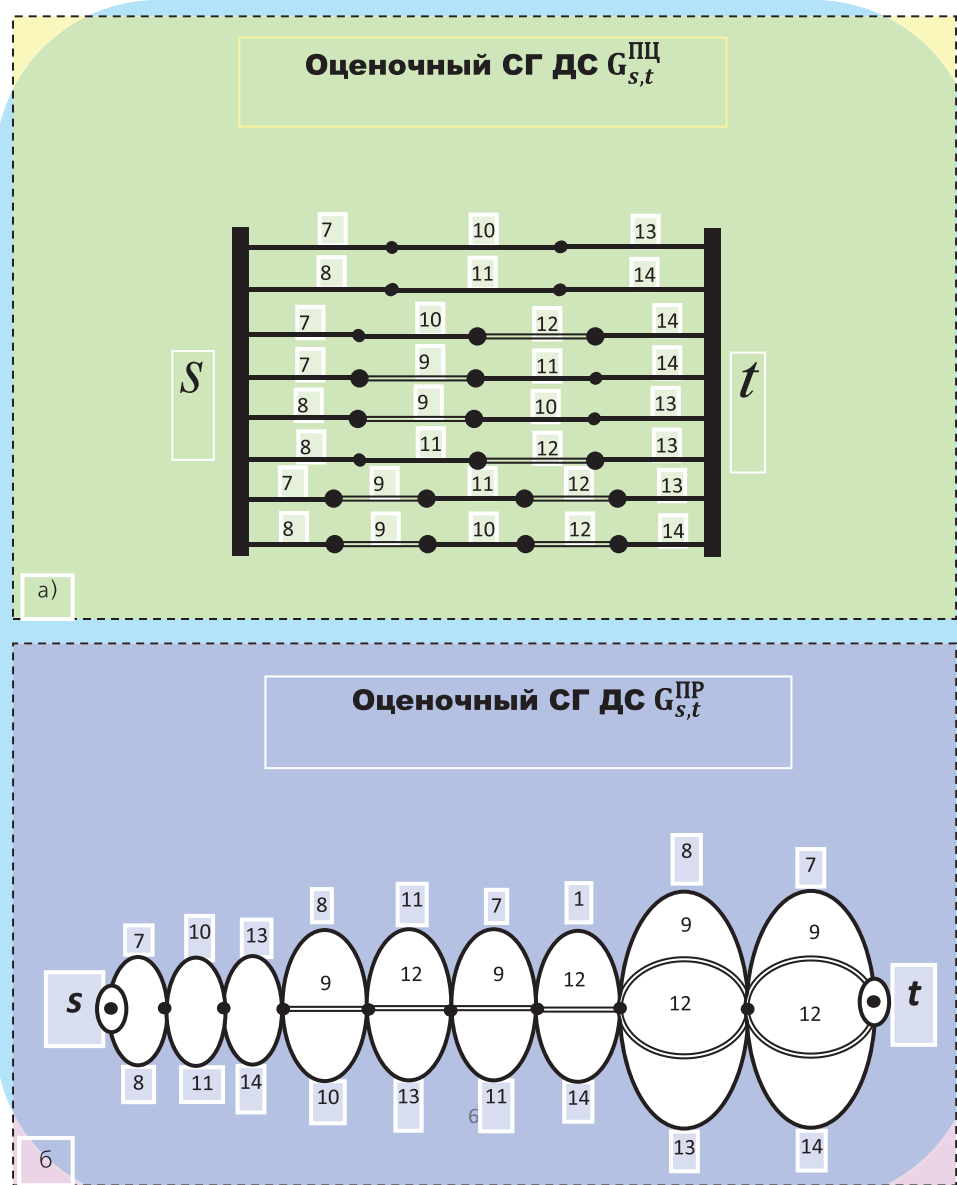


Рис. 2. Схемы оценочных СГ ДС для ОЭП: а) – по ПЦ; б) - по ПР

$$R_{s,t} = \left\{ \begin{array}{l} r_{n=1} = (7,8), r_{n=2} = (10,11), r_{n=3} = (13,14), r_{n=4} = (8,9,10), r_{n=5} = (11,12,13), \\ r_{n=6} = (7,9,11), r_{n=7} = (10,12,14), r_{n=8} = (8,9,12,13), r_{n=9} = (7,9,12,14) \end{array} \right\}, \quad (11)$$

определяющее нижнюю ОЭП.

На рис. 2а и 2б мостиковые ребра 9 и 12 выделены тонкими двойными линиями.

Поскольку в структуре исходного СГДС (рис. 1) имеется два мостиковых ребра (9 и 12), то полная группа несовместных состояний (гипотез) этих ребер примет вид:

$$\Gamma^0 = \{ \Gamma_1^0 = (9 \cdot 12); \Gamma_2^0 = (\bar{9} \cdot 12); \Gamma_3^0 = (9 \cdot \bar{12}); \Gamma_4^0 = (\bar{9} \cdot \bar{12}) \}. \quad (12)$$

С учетом полной группы несовместных состояний (10), произведено преобразование исходного оценочного СГ ДС $G_{s,t}^{ПЦ}$ (рис. 2а) в условные оценочные СГ ДС $G_{s,t_i}^{ПЦ}$, представленные на рис. 3, а

также исходного оценочного СГ ДС $G_{s,t}^{III}$ (рис. 2б) в условные оценочные СГ ДС G_{s,t_i}^{III} , представленные на рис. 4.

На представленных условных СГ ДС (рис. 3 и рис. 4) темные кружки означают соединение смежных вершин в общую точку по особым ребрам 9 и 12, когда эти ребра находятся в работоспособном состоянии; если эти ребра находятся в неработоспособном состоянии, то в соответствующих элементарных конструкциях (ПЦ и ПР) образуются разрывы, которые на указанных выше рисунках изображены штриховыми линиями.

Сформулированные и доказанные положения относительно справедливости применения комбинаторного метода для устранения взаимного пересечения ОЭП подтвердим следующим вычислительным экспериментом.

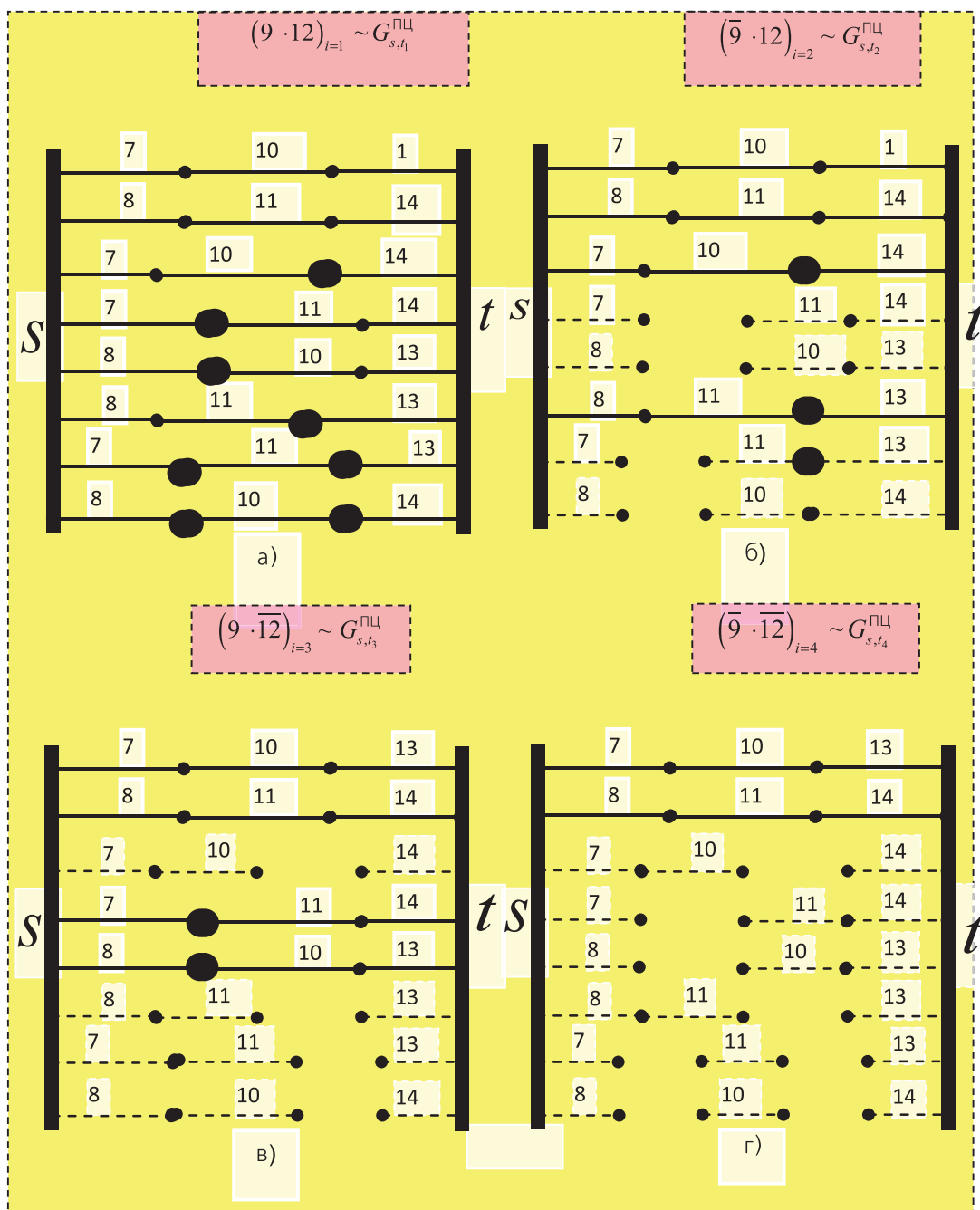


Рис. 3. Преобразование оценочного СГ ДС $G_{s,t}^{III}$ при принятии i -ой гипотезы

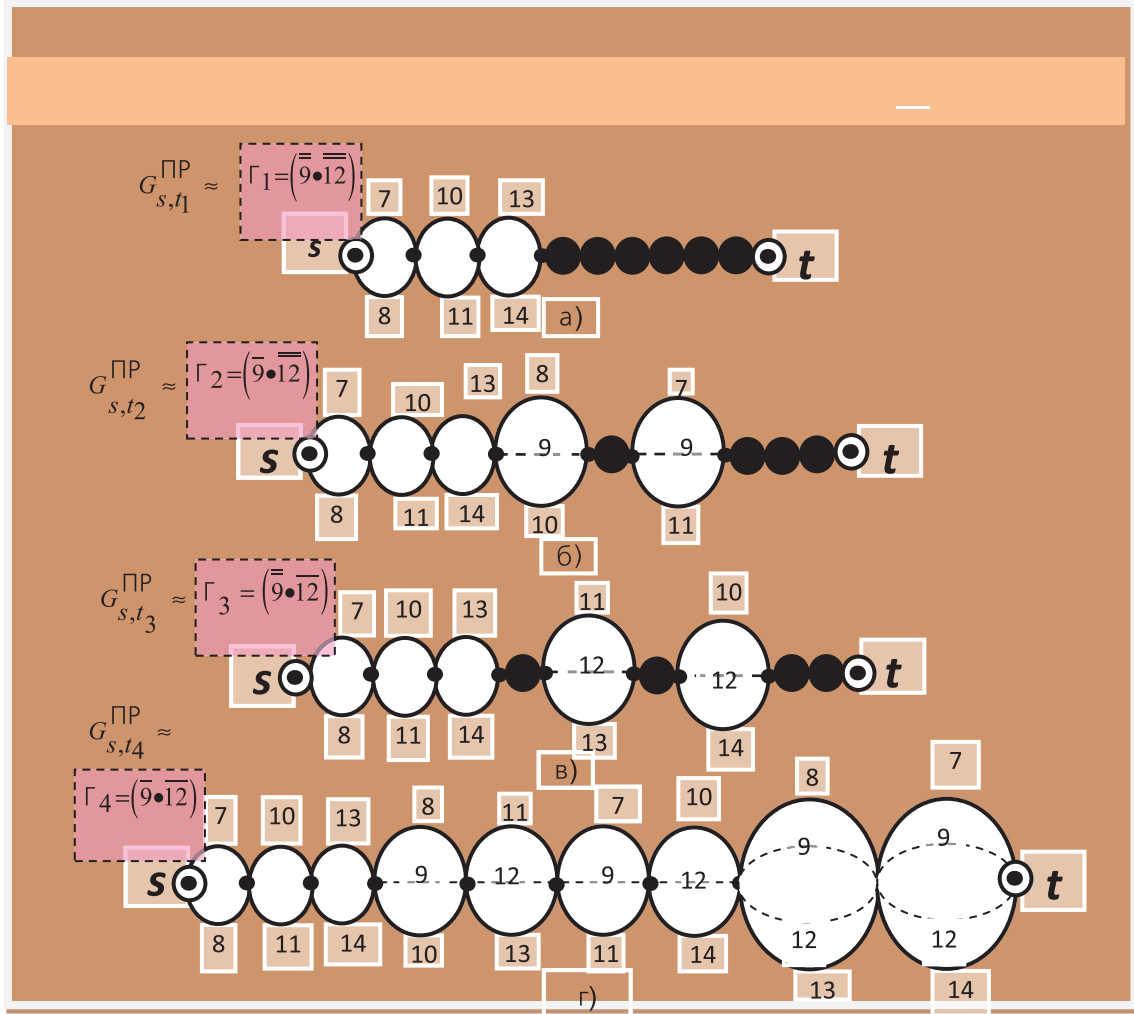


Рис. 4. Преобразование оценочного СГ ДС $G_{s,t}^{PP}$ при принятии i -ой гипотезы

Вычислим верхнюю $P_{s,t}^{BO}$ и нижнюю $P_{s,t}^{HO}$ оценки ВС СГ ДС (рис. 1) для следующих исходных данных (ИД) по надежности ребер $p_{\xi=7,14} = 0,5$.

Для принятых ИД, оценку (5), с учетом равенства (7) определим следующим образом:

$$P_{s,t}^{HO} = 0_{i=0} + 0,085902228_{i=1} + 0,14654541_{i=2} + 0,14654541_{i=3} + 0,19140625_{i=4} = 0,570399298 \quad (13)$$

Тогда, согласно (13) монотонную сходимость $P_{s,t}^{BO}$ к $P_{s,t}$ определим в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_{s,t}^{BO} &\rightarrow P_{s,t} = 1_{i=0} \rightarrow \left(1 - 0,085902228_{i=0,1} = \underline{\underline{0,914097772}}\right)_{i=0,1} \rightarrow \left(1 - 0,232447638_{i=0,2} = \right. \\ &= \underline{\underline{0,767552365}}\left.)_{i=0,2} \rightarrow \left(1 - 0,378993048_{i=0,3} = \underline{\underline{0,621006952}}\right)_{i=0,3} \rightarrow \left(1 - 0,570399298_{i=0,4} = \right. \\ &= \underline{\underline{0,429600702}} = P_{s,t}^{BO}\left.)_{i=0,4} \end{aligned} \quad (14)$$

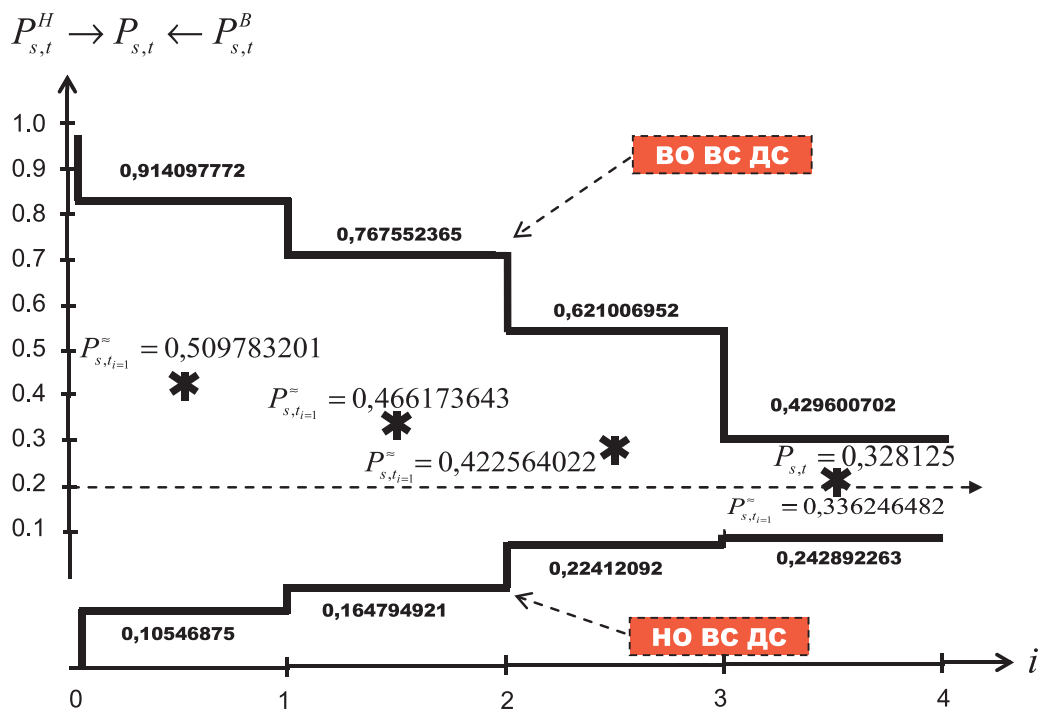


Рис. 5. Иллюстрация монотонной сходимости ОЭП к точному значению

Для принятых ИД $p_{\zeta=7,14} = 0,5 = q_{\zeta=7,14}$ НО ВС анализируемого СГ ДС (рис. 1) согласно (8) будет равна:

$$P_{s,t}^{HO} = 0_{i=0} + 0,10546875_{i=1} + 0,059326171_{i=2} + 0,059326172_{i=3} + 0,018771171_{i=4} =$$

$$= 0_{i=0} \rightarrow \underline{\underline{0,10546875}}_{i=1} \rightarrow \underline{\underline{0,164794921}}_{i=1,2} \rightarrow \underline{\underline{0,224121092}}_{i=1,3} \rightarrow \underline{\underline{0,242892263}}_{i=1,4}. \quad (15)$$

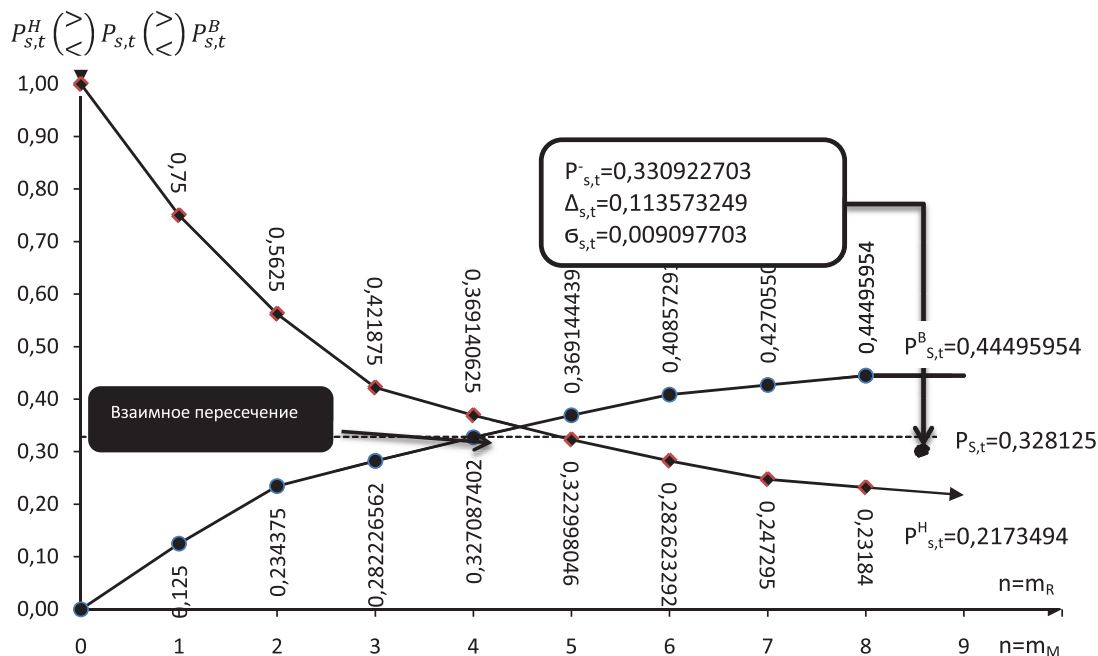


Рис. 6. Иллюстрация пересечения базовых ОЭП

На основе равенств (14) и (15) на рис. 5 построены графики монотонной сходимости ОЭП к точному значению вида $P_{s,t}^{HO} \rightarrow P_{s,t} \leftarrow P_{s,t}^{BO}$ для исходного СГ ДС, рис. 1. На рис. 5 «звездочкой» показана пошаговая сходимость погрешности вида $P_{s,t_i} \approx (P_{s,t_i}^{BO} + P_{s,t_i}^{HO}) / 2$ к точному значению $P_{s,t}$.

На рис. 6 представлена графическая интерпретация базовых ОЭП в динамике их пошагового изменения, применительно к анализу СГ ДС (рис.1) и ИД вида: $P_{\xi=7,14} = 0,5 = q_{\xi=7,14}$ [3].

Анализ, представленных в виде рис. 5 результатов выполненного численного эксперимента и их сравнение с базовыми ОЭП (рис. 6) показывает, что предложенный комбинаторный метод анализа обеспечивает ликвидацию взаимного пересечения и сокращение погрешностей ДСО ВС СГ ДС относительно базовых ОЭП.

Литература

1. Esary J., Proshan F. Coherent Structures of Non-Identifical Components // Technometrics. 1963.V.5. № 2. P.191-209.
2. Полесский В.П. Развязывание клаттеров, корреляционные неравенства и границы комбинаторной надежности // Проблемы передачи информации. 1997.Т.33. Вып. 3. С. 50-70.
3. Филин Б.П. О предельном развязывании клаттеров в оценках Полесского границ комбинаторной надежности случайных бинарных систем // Автоматика и телемеханика. 2005.№ 9.С. 149-189.
4. Филин Б.П. Методы анализа структурной надежности сетей связи. М.: Радио и связь, 1998.
5. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Политехника, 2000.
6. Кривулец В.Г. Об оценке оценок Эзари-Прошана в задачах анализа структурной надежности сетей связи // Труды 55-й Научной сессии, посвященной Дню радио./РНТОРЭС им. А.С. Попова. 2000.
7. Носов М.В. Предельные оценки надежности систем с сетевой структурой. / Надежность. 2010. № 2.
8. Носов М.В. Практическое приложение теории предельных оценок. // Надежность 2010. № 3.
9. Нетес В.А. Об оценке вероятности связности двухполюсных сетей / Электросвязь. 2001. № 11. С. 39-41.
10. Шубинский И.Б. Структурная надежность информационных систем. М: «Журнал Надежность», 2012. 216 с.
11. Шубинский И.Б. Функциональная надежность информационных систем. М: «Журнал Надежность», 2012. 295 с.
12. Мур Р., Шеннон К. Надежные схемы из ненадежных реле / Работы по теории информации и кибернетики. М.: ИЛ, 1963, С. 114-153.