

Применение интервальных значений треугольных нечетких функций к решению проблем здравоохранения

Капил Найтани^{1*}, Раджеш Дангвал¹

¹Университет Хемвати Нандан Бахугуна Гарвал, Сринагар, Уттаракханд, Индия

*kapilpintu88@gmail.com24



Капил Найтани



Раджеш Дангвал

Резюме. Цель. В области здравоохранения имеют место различные виды неопределенности, связанные с медицинскими ошибками, которые обусловлены человеческим фактором и несовершенством техники. Как правило, четкое значение приводит к потере точности и неопределенности результатов, вследствие чего имеющихся данных недостаточно для оценки клинического процесса с желаемой степенью точности. Поэтому теория нечетких множеств играет важную роль в обеспечении точности результатов при решении задач, связанных со здравоохранением. **Методы.** Для повышения точности результатов в данной статье используются функциональные нечеткие числа. Для моделирования рисков безопасности пациентов здесь применяется новый вид анализа дерева отказов с использованием нечетких множеств. Используются интервальные значения треугольных нечетких чисел уровня (λ , ρ), их функции, t -норму и дефазификацию методом центра тяжести для оценки нечеткой вероятности отказа и безотказности системы. Эффективность этих методов демонстрируется на примере из сферы здравоохранения, а полученные результаты проанализированы с помощью других существующих методов. Для ранжирования основных событий рассматриваемых проблем использован подход, изложенный в работе Танаки и др. Для анализа изменений в нечеткой вероятности отказа также использованы нечеткие функции. **Результаты.** В рамках работы изучено применение дерева отказов, t -нормы и функциональных нечетких чисел в контексте интервальных треугольных нечетких чисел. В исследовании рассмотрено два типа проблем из области здравоохранения и соответствующие им методы дефазификации в целях анализа надежности существующими методами. Авторы пришли к заключению, что метод t -нормы не дает значительного накопления нечеткости, и выяснили, как функциональное нечеткое число влияет на надежность. Аналогичным образом методом V -индекса были найдены наименее критические события по каждой системе.

Ключевые слова: здравоохранение, нечеткие множества, t -норма, интервальные значения треугольных нечетких функций, анализ дерева отказов, дефазификация.

Для цитирования: Найтани К., Дангвал Р. Применение интервальных значений треугольных нечетких функций к решению проблем здравоохранения // Надежность. 2021. №1. С. 23-33. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2021-21-1-23-33>

Поступила 11.11.2020 г. / После доработки 24.02.2021 г. / К печати 22.03.2021 г.

1. Введение

В классической или традиционной теории множеств элемент либо принадлежит множеству, либо нет, то есть ответом на вопрос о принадлежности любого элемента множеству является «да» или «нет», а не «более» или «менее». Теория нечетких множеств [25] содержит фактор неопределенности, то есть описывает степень принадлежности любого элемента множеству.

Поскольку вопросы безопасности представляют собой серьезную проблему для работы медицинских учреждений по всему миру, необходимо выделить основные причины различных видов врачебных ошибок и искать способы снижения их частоты. Для разработки более эффективных и безопасных способов лечения следует шире применять проактивные методы анализа рисков [3]. Анализ дерева отказов (fault tree analysis, FTA) широко используется при решении проблем в области здравоохранения [1-5, 18-19]. Хайман и Джонсон [10] провели FTA отказов медицинских систем оповещения о состоянии пациента. Пак и Ли [18] построили FTA процесса мытья рук. Чэнь [6] предложил новый, более быстрый метод анализа надежности нечетких систем с использованием арифметических операций с нечеткими числами.

Ли разработал изображение хромосом [11-12], применив нечеткую логику к лейкоцитам крови, Бутнариу [4] разработал модель нейрона (преддверно-улиткового нерва), описываемую с помощью нечеткого автомата. Аналогичным образом Роша применил нечеткую логику к нервной системе [20-21]. Классический подход к диагностике вазоренальной гипертензии был разработан Форденом и Бездеком [7]. Адласснинг и Коларц применили нечеткую логику в автоматизированной системе диагностики заболеваний в области ревматологии, известной как CADIAG-2 [2].

Интерактивная диагностическая система на основе нечеткой логики под названием SPINX [8] состоит из диалоговой системы, в которую вводятся данные пациента и ответы на запрос дополнительной информации, и системы принятия решений, которая осуществляет поиск по дереву отказов и соотносит пациента с диагнозом. Аналогичным образом Лесмо, Саитта и Торассо разработали систему обучения продукционным правилам для принятия медицинских решений [13]. Автоматизированная система обучения основана на теории нечетких множеств и работает с лингвистическими переменными. Еще одним примером нечеткой системы является нечеткая консультативная система в области офтальмологии, разработанная Огунтаде [17]. Она оценивает состояние пациента до и после лечения. Очевидно, что нечеткая логика широко представлена в медицинских системах, а модель выводов на базе нечеткой логики разработана и успешно испытана.

2. Нечеткие множества

Нечеткие множества были предложены в 1965 году независимо друг от друга Лотфи А. Заде [24] и Дитером Клауа в качестве дополнения к классическому понятию множества. В классической теории множеств принадлежность элементов к множеству оценивается в двоичных терминах в соответствии с бивалентными условиями, когда элемент либо принадлежит множеству, либо нет. В теории нечетких множеств степень принадлежности элементов к множеству относится к единичному интервалу $[0, 1]$. Нечеткое множество – это обобщение классической теории.

Нечеткое множество определяется функцией принадлежности, ставящей в соответствие универсальное множество интервалу $[0, 1]$, как указано ниже:

$$\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]. \quad (1)$$

Здесь $\mu_A(x)$ выражает степень принадлежности элемента x множеству A . Нечеткое множество A можно выразить следующим образом:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}. \quad (2)$$

Нечеткость можно наблюдать во многих сферах жизни, включая машиностроение, медицину, производство и др.

3. Фаззификация и интервальные значения треугольных нечетких чисел

Фаззификация – это процесс преобразования четкого значения в нечеткое с помощью нечетких функций принадлежности. Существует множество нечетких функций принадлежности для выполнения фаззификации, включая треугольные, трапециевидные, Коши, Гаусса и т. д. [16]. При анализе проблем в области безопасности и здравоохранения в целях получения более точных описаний и решений часто используются интервальные значения треугольных нечетких функций принадлежности, или просто интервальные значения треугольных нечетких чисел. В математическом смысле интервальное нечеткое множество \tilde{A} (*i-v fuzzy set*) из

R выводится как $\tilde{A} \equiv \{(x, [\mu_{\tilde{A}^L}(x), \mu_{\tilde{A}^U}(x)]) / x \in R\}$;

$0 \leq \mu_{\tilde{A}^L}(x) \leq \mu_{\tilde{A}^U}(x) \leq 1 \forall x \in R$. Оно обозначается как

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = [\mu_{\tilde{A}^L}(x), \mu_{\tilde{A}^U}(x)] x \in R \text{ или } \tilde{A} = [\tilde{A}^L, \tilde{A}^U].$$

Треугольное интервальное нечеткое множество \tilde{A} означает, что, когда степень принадлежности x лежит в интервале $[\mu_{\tilde{A}^L}(x), \mu_{\tilde{A}^U}(x)]$, наибольшая степень равна $\mu_{\tilde{A}^U}(x)$, а наименьшая степень равна $\mu_{\tilde{A}^L}(x)$, где:

$$\mu_{\tilde{A}^L}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(x-a)}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{\lambda(c-x)}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, $\tilde{A}^L = (a, b, c, \lambda)$ $a < b < c$, и аналогично:

$$\mu_{\tilde{A}^U}(x) = \begin{cases} \frac{\rho(x-a)}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{\rho(c-x)}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, $\tilde{A}^U = (a, b, c, \rho)$, $a < b < c$. Рассмотрим случай, когда $0 < \lambda \leq \rho \leq 1$. Из уравнений (3) и (4) получаем $\tilde{A} = [\tilde{A}^L, \tilde{A}^U]$, $[(a, b, c, \lambda), (a, b, c, \rho)]$, называемое треугольным нечетким числом уровня $(\lambda, \rho)i - v$ (см. рис. 1).

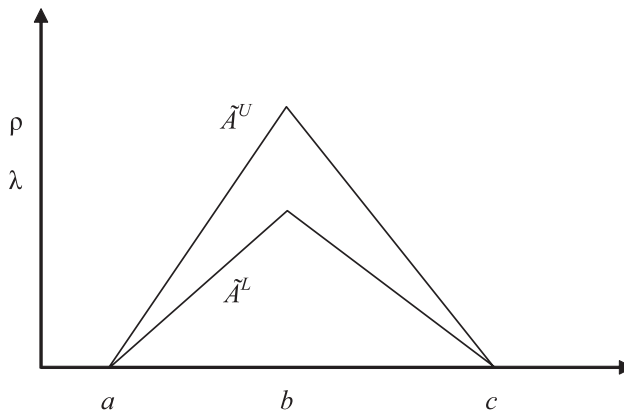


Рис. 1. Треугольное нечеткое интервальное число

4. t-норма

Заде [24] предполагает, что пересечение нечеткого множества является минимальным оператором и алгебраическим произведением. Минимальное произведение и оператор ограниченной разности принадлежат так называемой треугольной норме или t-норме. t-норма – это бинарная функция $t: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которая удовлетворяет аксиомам (i) коммутативности, (ii) ассоциативности, (iii) монотонности и (iv) граничных условий. В литературе упоминаются различные операции t-норма, такие как, $t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, $t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \max\{0, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1\}$,

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ и}$$

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{где } \mu_{\tilde{B}}(x) = 1, \\ \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{где } \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Последнюю из указанных операций t-норма Лин и др. [14] применили к треугольным нечетким числам, а мы используем для нахождения вероятности отказа системы. Операция t-норма дает меньшее накопление нечеткости, что является преимуществом в случае с нечеткими арифметическими операциями.

5. Функции нечетких чисел

Определяются как функция от функции x , то есть значение принадлежности также имеет степень принадлежности. Описывается следующим образом:

$$\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0, 1], \mu(\mu_{\tilde{A}}(x)): \mu_{\tilde{A}}(x) \rightarrow [0, 1],$$

$$\tilde{A} = \{((x, \mu_{\tilde{A}}(x)), \mu(\mu_{\tilde{A}}(x))) : x \in X\}. \quad (5)$$

Треугольное функциональное интервальное нечеткое число показано на рис. 2. Нижнее значение принадлежности составляет $(1, 2, 3; 0.5)$, а верхнее – $(1, 2, 3; 1.0)$. Таким образом, координату z можно найти по формуле

$$\mu(\mu_{\tilde{A}}(x)) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

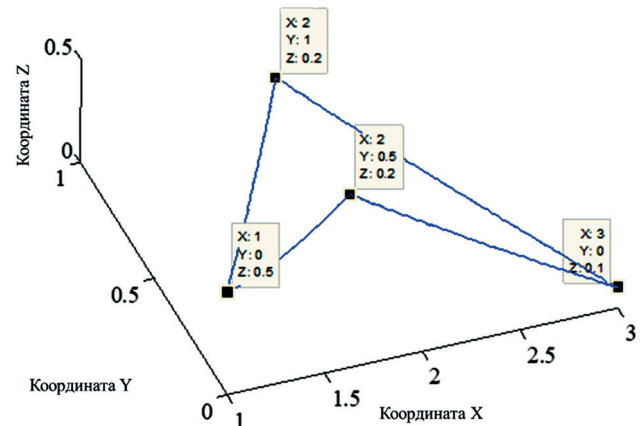


Рис. 2. Интервальные треугольные нечеткие функции

6. Анализ дерева отказов (FTA) и нечеткая вероятность

Анализ дерева отказов (FTA) – это анализ дерева, в котором нежелательное состояние системы анализируется с использованием булевой логики для объединения серии базовых событий нижнего уровня. Кроме того, если известны вероятности отказа компонентов системы, то можно вычислить вероятность конечного события. В диаграмме дерева отказов используются два логических элемента: «И» и «ИЛИ». «И» (конъюнкция) означает, что вероятность отказа зависит от наступления всех событий, а событие, связанное с логическим элементом ИЛИ, означает, что исходные события действуют независимо, вызывая отказ для результирующего события. Нечеткую вероятность отказа можно рассчитать, выполнив арифметические операции с нечеткими числами. В случае, когда вероятность понимается в нечетком смысле, FTA называется FFTA (нечеткий анализ дерева отказов – fuzzy fault tree analysis). При FTA берется четкая вероятность отказа, а при FFTA – нечеткая вероятность отказа.

Дерево отказов на рис. 3 связано с основными событиями, обозначаемыми X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 и X_6 . Конечное событие T может быть выражено следующим уравнением:

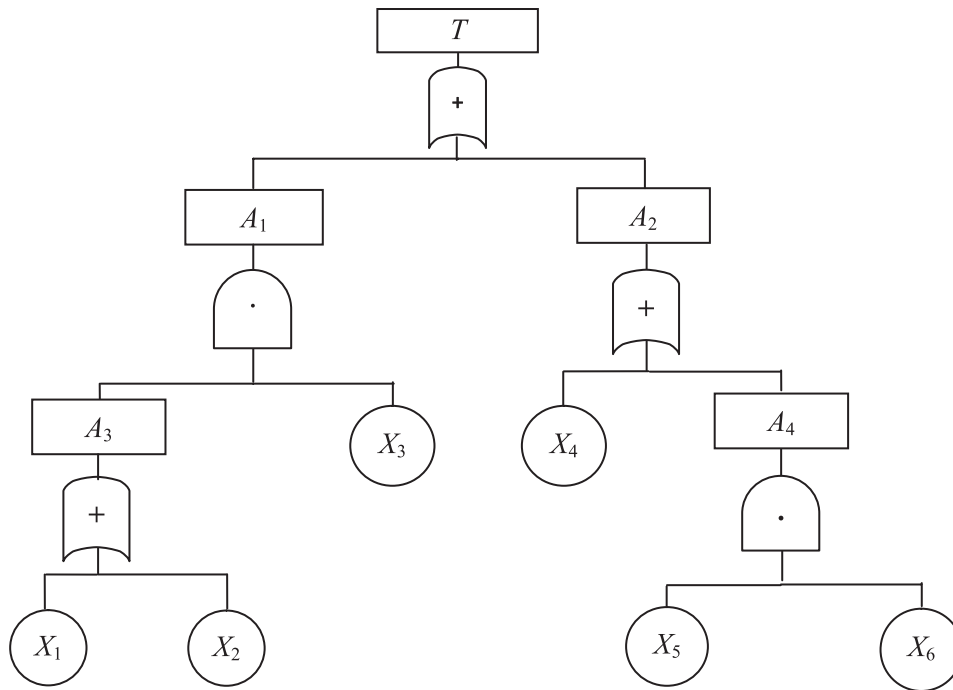


Рис. 3. Диаграмма дерева отказов

$$T = A_1 \cup A_2,$$

$$T = (A_3 \cap X_3) \cup (X_4 \cup A_4),$$

$$T = [\{(X_1 \cup X_2) \cap X_3\} \cup \{X_4 \cup (X_5 \cap X_6)\}]. \quad (6)$$

7. Надежность

Надежность определяется как вероятность того, что компонент или система будет выполнять требуемую

функцию в течение заданного периода времени при заданных условиях эксплуатации. Это вероятность безотказной работы в течение определенного времени. Надежность – это свойство согласованности, измерения, тестирования или срока службы любой системы или точности эксперимента. Это оценка того, насколько мала ошибка и насколько полученное значение соответствует истинному значению. Высоконадежная система обеспечивает одинаковые результаты в различных условиях, т.е. высоконадежная оценка является точной.

Табл. 1. Операции с логическими элементами

Подход	Логический элемент	Операция	Уравнение
Традиционный FTA	ИЛИ	Конъюнкция	$P_{\text{или}} = 1 - [(1 - q_1) \times (1 - q_2) \times \dots \times (1 - q_n)]$
	И	Пересечение	$P_{\text{и}} = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n$
Традиционный FFTA	ИЛИ	Конъюнкция	$P_{\text{или}} = \tilde{I} \Theta [(\tilde{I} \Theta \tilde{q}_1) \otimes (\tilde{I} \Theta \tilde{q}_2) \otimes \dots \otimes (\tilde{I} \Theta \tilde{q}_n)]$
	И	Пересечение	$P_{\text{и}} = \tilde{q}_1 \otimes \tilde{q}_2 \otimes \dots \otimes \tilde{q}_n$
FFTA с t -нормой	ИЛИ	Конъюнкция	$P_{\text{или}} = \tilde{I} \Theta_t [(\tilde{I} \Theta_t \tilde{q}_1) \otimes_t (\tilde{I} \Theta_t \tilde{q}_2) \otimes_t \dots \otimes_t (\tilde{I} \Theta_t \tilde{q}_n)]$
	И	Пересечение	$P_{\text{и}} = q_1 \otimes_t q_2 \otimes_t \dots \otimes_t q_n$

Табл. 2. Нечеткие операции над двумя интервальными треугольными нечеткими числами

Операция	Треугольные интервальные нечеткие числа
Произведение	$\left(\begin{matrix} a_1, b_1, c_1 : \rho \\ a_1, b_1, c_1 : \lambda \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} a_2, b_2, c_2 : \rho \\ a_2, b_2, c_2 : \lambda \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2 : \rho \\ a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2 : \lambda \end{matrix} \right)$
Дополнение	$1 - \left(\begin{matrix} a, b, c : \rho \\ a, b, c : \lambda \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} 1 - c, 1 - b, 1 - a : \rho \\ 1 - c, 1 - b, 1 - a : \lambda \end{matrix} \right)$

7.1. Расчет надежности системы

При анализе сложной системы ко всей системе может применяться определенный закон распределения потока отказов. Однако альтернативный подход состоит в том, чтобы определить надежность или подходящую модель надежности для каждого компонента системы и применить правила вероятности в соответствии с конфигурациями компонентов в системе. При расчете надежности системы рассматриваются следующие конфигурации.

7.1.1. Последовательная конфигурация

В последовательной конфигурации функционирование системы требует работоспособности всех компонентов. Согласно этой концепции, если один из двух последовательно связанных компонентов выйдет из строя, вся система выйдет из строя. Последовательная связь представлена блок-схемой на рис. 4.



Рис. 4. Последовательная конфигурация

Вероятность отказа последовательной системы может быть определена как 1 минус вероятность того, что ни один из компонентов не выйдет из строя (то есть вероятность того, что система будет работать). Вероятности отказа компонентов (для системы из двух компонентов) вычисляются следующим образом:

- E_1 : событие отказа компонента 1;
- E_2 : событие отказа компонента 2.

Пусть вероятность отказа компонента 1 равна $P(E_1)=q_1$, а компонента 2 – $P(E_2)=q_2$, тогда вероятности безотказной работы компонентов равны $P(E_1^c)=1-q_1$ и $P(E_2^c)=1-q_2$, а вероятность безотказной работы системы – $(1-q_1) \cdot (1-q_2)$.

Таким образом, вероятность отказа составляет $P_s=1-(1-q_1) \cdot (1-q_2)$.

При условии, что два компонента независимы друг от друга, обобщим последнюю формулу до n взаимно независимых последовательных компонентов:

$$P_s = 1 - (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \cdot (1 - q_3) \cdot (1 - q_4) \cdot \dots \cdot (1 - q_n). \quad (7)$$

Для определения надежности возьмем дополнение вероятности отказа системы до 1.

7.1.2. Параллельная конфигурация

Два или более компонентов находятся в параллельной или резервированной конфигурации – для отказа такой системы все компоненты должны выйти из строя, то есть система непрерывно работает, если работают один или несколько компонентов. Параллельные компоненты представлены блок-схемой на рис. 5.

Вероятность отказа для n параллельных и независимых компонентов определяется вероятностью отказа всех компонентов, т.е.

$$P_s = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \dots \times q_n. \quad (8)$$

Для определения надежности возьмем дополнение вероятности отказа системы до 1.

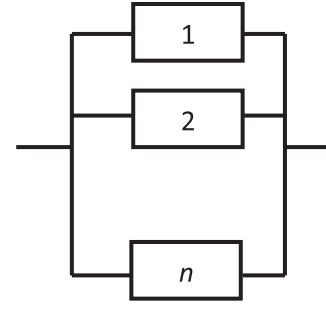


Рис. 5. Параллельные компоненты

8. V-индекс

Пусть \tilde{q}_T означает нечеткую вероятность отказа системы в результате конечного события, которая зависит от состояния компонентов, нечеткие вероятности отказа которых $(q_{i's})$ представляют собой интервальные треугольные нечеткие числа, тогда нечеткая вероятность отказа системы в результате конечного события вычисляется по формуле:

$$\tilde{q}_T = \tilde{q}_T(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_i, \dots, \tilde{q}_n) = \left[(\tilde{q}_{T_1}^L, \tilde{q}_{T_2}^L, \tilde{q}_{T_3}^L : \lambda), (\tilde{q}_{T_1}^L, \tilde{q}_{T_2}^L, \tilde{q}_{T_3}^L : \rho) \right], \quad (9)$$

где $\tilde{q}_T^L = [(\tilde{q}_{T_1}^L, \tilde{q}_{T_2}^L, \tilde{q}_{T_3}^L : \lambda), (\tilde{q}_{T_1}^L, \tilde{q}_{T_2}^L, \tilde{q}_{T_3}^L : \rho)]$ представляет собой λ, ρ интервальное треугольное нечеткое число.

Пусть \tilde{q}_{T_i} – нечеткая вероятность отказа системы в результате конечного события после предотвращения отказа i -го компонента системы (т.е. $\tilde{q}_i = \tilde{0}$), тогда значение \tilde{q}_{T_i} вычисляется по формуле:

$$\tilde{q}_T = \tilde{q}_T(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_i, \dots, \tilde{q}_n) = \left[(\tilde{q}_{T_{i_1}}, \tilde{q}_{T_{i_2}}, \tilde{q}_{T_{i_3}} : \lambda), (\tilde{q}_{T_{i_1}}, \tilde{q}_{T_{i_2}}, \tilde{q}_{T_{i_3}} : \rho) \right], \quad (10)$$

где $\tilde{q}_T = [(\tilde{q}_{T_{i_1}}, \tilde{q}_{T_{i_2}}, \tilde{q}_{T_{i_3}} : \lambda), (\tilde{q}_{T_{i_1}}, \tilde{q}_{T_{i_2}}, \tilde{q}_{T_{i_3}} : \rho)]$ представляет собой λ, ρ интервальное треугольное нечеткое число.

Тогда V -индекс согласно Х. Танаки [23], т.е. мера различия между E_1 и \tilde{q}_{E_1} , определяется как

$$V(\tilde{q}_T, \tilde{q}_{T_i}) = (\tilde{q}_{T_i} - \tilde{q}_{T_1}) + (\tilde{q}_{T_i} - \tilde{q}_{T_2}) + (\tilde{q}_{T_i} - \tilde{q}_{T_{i_3}}) > 0. \quad (11)$$

$V(\tilde{q}_T, \tilde{q}_{T_i})$ указывает на степень снижения вероятности отказа i -го компонента. Если $V(\tilde{q}_T, \tilde{q}_{T_i}) > V(\tilde{q}_T, \tilde{q}_{T_j})$, то предупреждение отказа в i -м компоненте более действенно, чем предупреждение отказа j -го компонента.

9. Определения

9.1. Определение 1

Пусть $\tilde{A} = [(a_1, b_1, c_1 : \lambda), (a_1, b_1, c_1 : \rho)]$ и $\tilde{B} = [(a_2, b_2, c_2 : \lambda), (a_2, b_2, c_2 : \rho)]$ – два интервальных треугольных нечетких числа, тогда вероятности отказа $P(\tilde{A} \cup \tilde{B})$ для $\tilde{A} > 0$ и $\tilde{B} > 0$ могут быть определены с использованием оператора ИЛИ [9, 25] как

$$P(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = 1 \ominus [(1 \ominus P(\tilde{A})) \otimes (1 \ominus P(\tilde{B}))]. \quad (12)$$

9.2. Определение 2

Пусть $\tilde{A} = [(a_1, b_1, c_1; \lambda), (a_1, b_1, c_1; \rho)]$ и $\tilde{B} = [(a_2, b_2, c_2; \lambda), (a_2, b_2, c_2; \rho)]$ – два интервальных треугольных нечетких числа, тогда вероятности отказа $P(\tilde{A} \cap \tilde{B})$ для $\tilde{A} > 0$ и $\tilde{B} > 0$ могут быть определены с использованием оператора И [9, 22] как

$$P(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = P(\tilde{A}) \otimes P(\tilde{B}). \quad (13)$$

10. Методология

При реализации предлагаемого FFTA осуществляют следующие шаги.

Шаг 1. Построение дерева отказов применительно к любой задаче, связанной со здравоохранением, сопряжено с рассмотрением промежуточных и базовых событий.

Шаг 2. Преобразование вероятностей отказа для базовых событий в интервальные треугольные нечеткие числа на основе экспертных методов.

Шаг 3. Вычисление нечеткой вероятности отказа для конечного события с использованием простых арифметических операций и нечетких арифметических операций на базе t -нормы с интервальными треугольными нечеткими числами с использованием операций, приведенных в табл. 2, и выражений, приведенных в табл. 3 (третья строка), для операторов ИЛИ и И, которые, в свою очередь, основаны на уравнениях (12) и (13) соответственно.

Шаг 4. С помощью функционала нечетких чисел мы устанавливаем соответствие между функцией принадлежности и ее степенью принадлежности в виде неразрывной функции и анализируем изменения в нечеткой вероятности отказа для конечного события.

Шаг 5. Мы вычисляем нечеткую надежность конечного события, которая равна единице минус нечеткая вероятность отказа для конечного события.

Шаг 6. Нахождение наиболее и наименее значимых базовых событий с использованием определения V -индекса на основе уравнения (11), вычисление $V(\tilde{q}_T, \tilde{q}_{T_i}) \forall i$ путем исключения i -го базового события в схеме дерева отказов и нахождение наиболее и наименее значимых событий путем нахождения максимальных $V(\tilde{q}_T, \tilde{q}_{T_i})$ и минимальных $V(\tilde{q}_T, \tilde{q}_{T_i})$ значений для всей системы соответственно.

Шаг 7. Дефазифицированная вероятность отказа для конечного события может быть легко вычислена с помощью дефазификации методом центра тяжести и предлагаемого аналогичного способа для функционала нечетких чисел с последующим анализом результатов и выработкой предложений по совершенствованию работы системы.

11. Дефазификация

Дефазификация представляет собой процесс преобразования нечеткого значения в четкое значение. Существует ряд методов преобразования числа в нечеткое

множество и дефазификации [25]. Наиболее простой метод дефазификации заключается в установке наивысшей функции принадлежности. Заслуженно большой популярностью также пользуется метод центра тяжести. В качестве интервального треугольного нечеткого числа примем среднее значение центра тяжести верхнего и нижнего треугольных нечетких чисел. В настоящей работе мы также применяем метод центра тяжести к интервальным треугольным функциональным нечетким числам.

Табл. 3. Операция t -норма с интервальными треугольными нечеткими числами

Операция	Нечеткое выражение определения t -нормы
(1) Сложение	$\tilde{A} \oplus_{T_w} \tilde{B} = (b_1 + b_2 - \max(b_1 - a_1, b_2 - a_2), b_1 + b_2, c_1 + c_2 + \max(c_1 - b_1, c_2 - b_2))$
(2) Произведение	$\tilde{A} \otimes_{T_w} \tilde{B} = (b_1 \cdot b_2 - \max((b_1 - a_1) \cdot c_2, (b_2 - a_2) \cdot c_1), b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2 + \max((c_1 - b_1) \cdot a_2, (c_2 - b_2) \cdot a_1))$
(3) Вычитание	$\tilde{A} \ominus_{T_w} \tilde{B} = (b_1 - b_2 - \max(b_1 - a_1, c_2 - b_2), b_1 - b_2, b_1 - b_2 + \max(c_1 - b_1, b_2 - a_2))$
(4) Дополнение	$1 \ominus_{T_w} \tilde{B} = (1 - c_2, 1 - b_2, 1 - a_2)$

11.1. Метод центра тяжести

Дефазификация методом центра тяжести может быть проведена следующим образом

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_A(x) dx}{\int \mu_A(x) dx} \quad (14)$$

Исходя из рис. 1 мы проводим оценку центра тяжести верхней и нижней функций принадлежности;

$$x^{U*} = \frac{\int_a^b x \cdot \rho \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx + \int_b^c x \cdot \rho \left(\frac{c-x}{c-b} \right) dx}{\int_a^b \rho \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx + \int_b^c \rho \left(\frac{c-x}{c-b} \right) dx}, \quad x^{U*} = \frac{a+b+c}{3}; \quad (15)$$

$$x^{L*} = \frac{\int_a^b x \cdot \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx + \int_b^c x \cdot \lambda \left(\frac{c-x}{c-b} \right) dx}{\int_a^b \lambda \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx + \int_b^c \lambda \left(\frac{c-x}{c-b} \right) dx}, \quad x^{L*} = \frac{a+b+c}{3}. \quad (16)$$

Затем усредняем оба значения;

$$x^* = \frac{1}{2} [x^{U*} + x^{L*}], \quad (17)$$

$$x^* = \frac{a+b+c}{3}. \quad (18)$$

11.2. Предлагаемый метод центра тяжести

В рамках предлагаемого метода функция принадлежности имеет переменную степень принадлежности. В данном методе центр тяжести определяется следующим образом:

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_A(x) \cdot \mu(\mu_A(x)) dx}{\int \mu_A(x) \cdot \mu(\mu_A(x)) dx} \quad (19)$$

Пусть $\mu(\mu_A(x)) = \frac{1}{x^2+1}$, а $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ для любого реального значения x .

Мы проводим оценку дефазифицированного значения каждого из нижних и верхних трапецидальных нечетких чисел, а затем берем усредненное значение обоих дефазифицируемых значений

$$x^{U*} = \frac{\int_a^b x \cdot \rho\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx + \int_b^c x \cdot \rho\left(\frac{c-x}{c-b}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx}{\int_a^b \rho\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx + \int_b^c \rho\left(\frac{c-x}{c-b}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx}, \quad (20)$$

$$x^{L*} = \frac{\int_a^b x \cdot \lambda\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx + \int_b^c x \cdot \lambda\left(\frac{c-x}{c-b}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx}{\int_a^b \lambda\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx + \int_b^c \lambda\left(\frac{c-x}{c-b}\right) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx}, \quad (21)$$

$$x^* = \frac{1}{2} [x^{U*} + x^{L*}], \quad (22)$$

$$x^{U*} = x^{L*} = \frac{\left[\frac{1}{b-a} \left\{ b-a - \frac{a}{2} \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right) \right\} - \right.}{\left[\frac{1}{b-a} \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) - a \tan^{-1}\left(\frac{b-a}{1+ab}\right) \right\} - \right.} \left. - \frac{1}{c-b} \left\{ c-b - \frac{c}{2} \ln\left(\frac{c^2+1}{b^2+1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c-b}{1+bc}\right) \right\} \right]}{\left[\frac{1}{c-b} \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{c^2+1}{b^2+1}\right) - c \tan^{-1}\left(\frac{c-b}{1+bc}\right) \right\} \right]}, \quad (23)$$

$$x^* = \frac{1}{2} [x^{U*} + x^{L*}] = x^{U*} \text{ или } x^{L*}, \text{ т.к. } x^{U*} = x^{L*}. \quad (24)$$

12. Пример. Дерево отказов инфузионного насоса

Схема дерева отказов инфузионного насоса [15] показана на рис. 6. В данном примере дерево отказов содержит четыре комбинации отказов, приводящих к

конечному событию, то есть конечное событие формируется элементом ИЛИ, а значит все исходные события влияют независимо. Аналогично, насос и средство оповещения работают совместно и связаны элементом И.

Маркс и Слоним [15] рассматривали вероятность отказа для базового события в 0,001 (столбец 3 в табл. 4). При этом в реальных системах такое невозможно, поэтому мы преобразуем эти значения в интервальные треугольные нечеткие числа, как показано в табл. 4 (столбец 4).

Математическое выражение события имеет следующий вид:

$$T = K_1 \cup F_1 \cup G_1 \cup H_1 = (I_1 \cap J_1) \cup F_1 \cup G_1 \cup H_1 = ((A_1 \cup B_1 \cup C_1) \cap (D_1 \cup E_1)) \cup F_1 \cup G_1 \cup H_1. \quad (25)$$

По определению мы можем вывести математическую формулу для данного выражения:

$$\begin{aligned} q_{T_i} &= 1 - [(1 - q_{K_1}) \times (1 - q_{F_1}) \times (1 - q_{G_1}) \times (1 - q_{H_1})] = \\ &= 1 - [(1 - q_{I_1} \times q_{J_1}) \times (1 - q_{F_1}) \times (1 - q_{G_1}) \times (1 - q_{H_1})] = \\ &= 1 - [(1 - (1 - (1 - q_{A_1}) \times (1 - q_{B_1}) \times (1 - q_{C_1}))) \times \\ &\times (1 - (1 - q_{D_1}) \times (1 - q_{E_1})) \times (1 - q_{F_1}) \times (1 - q_{G_1}) \times (1 - q_{H_1})]. \quad (26) \end{aligned}$$

Вычисление конечного четкого значения осуществляется традиционным способом. При работе с нечеткими числами используется традиционная операция с нечетким деревом отказов, а в рамках предлагаемого метода используется операция t -норма с интервальными треугольными нечеткими числами. Операции с элементами ИЛИ и И в рамках различных методов приведены в табл. 2 и 3.

13. Нечеткая вероятность отказа и надежность применительно к различным методам

13.1. Минимаксный метод

Согласно Хуану и др. [9], минимаксный метод применим в случаях, когда вероятность отказа крайне мала. В данном методе мы используем максимальную вероятность отказа применительно к событиям, связанным элементом ИЛИ, и минимальную для событий, связанных элементом И. Такая четкая вероятность показана в табл. 4 (столбец 3):

$$\begin{aligned} P_{oss}(I_1) &= \max(P_{oss}(A_1), P_{oss}(B_1), P_{oss}(C_1)) = \\ &= \max(0.001, 0.001, 0.001) = 0.001, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{oss}(J_1) &= \max(P_{oss}(D_1), P_{oss}(E_1)) = \\ &= \max(0.001, 0.001) = 0.001, \end{aligned}$$

$$P_{oss}(K_1) = \min(P_{oss}(I_1), P_{oss}(J_1)) = \\ = \min(0.001, 0.001) = 0.001.$$

Тогда вероятность отказа для конечного события «Лекарство не доставлено пациенту» составляет 0.001, а надежность события «Лекарство доставлено пациенту» – 0.999.

13.2. Метод Танаки и др.

С использованием метода Танаки и др. и табл. 4 (столбец 4) получаем, что нечеткая вероятность отказа для конечного события составляет $(0.0015511, 0.00297288494329, 0.004705098 : 0.8)$, а нечеткая надежность – $(0.0015511, 0.00297288494325, 0.004705098 : 1.0)$.

$$(0.995294902, 0.99702711505671, 0.9984489 : 0.8) \\ (0.995294902, 0.99702711505671, 0.9984489 : 1.0)$$

13.3. Предлагаемый метод t -норма

С использованием предлагаемого метода t -норма и табл. 3 получаем, что нечеткая вероятность отказа составляет

$$(0.00247417296853, 0.00297288494329, 0.00357225265339 : 0.8) \\ (0.00247417296853, 0.00297288494329, 0.00357225265339 : 1.0)$$

а нечеткая надежность –

$$(0.99642774734661, 0.99702711505671, 0.99752582703147 : 0.8) \\ (0.99642774734661, 0.99702711505671, 0.99752582703147 : 1.0)$$

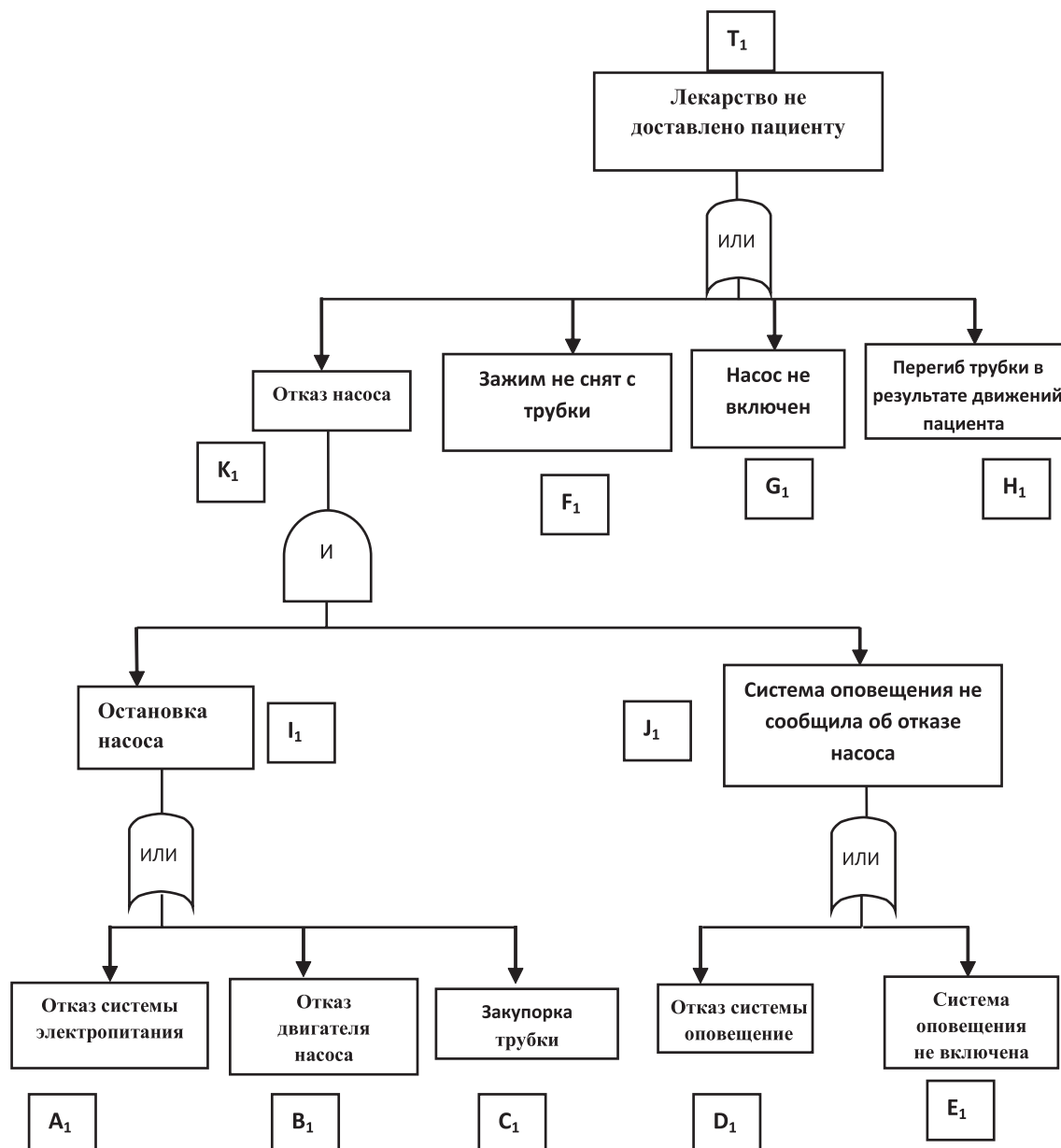


Рис. 6. Дерево отказов инфузионного насоса

Табл. 4. Преобразование четкого значения в треугольные нечеткие числа

Базовое событие	Вероятность отказа	Четкая возможность	Представление треугольного нечеткого числа
A_1	\tilde{q}_{A_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.0006, 0.0010, 0.0015 : 0.8 \\ 0.0006, 0.0010, 0.0015 : 1.0 \end{matrix} \right)$
B_1	\tilde{q}_{B_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.0006, 0.0010, 0.0015 : 0.8 \\ 0.0006, 0.0010, 0.0015 : 1.0 \end{matrix} \right)$
C_1	\tilde{q}_{C_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.00055, 0.0010, 0.0014 : 0.8 \\ 0.00055, 0.0010, 0.0014 : 1.0 \end{matrix} \right)$
D_1	\tilde{q}_{D_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.0006, 0.00095, 0.00145 : 0.8 \\ 0.0006, 0.00095, 0.00145 : 1.0 \end{matrix} \right)$
E_1	\tilde{q}_{E_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.0005, 0.0010, 0.0016 : 0.8 \\ 0.0005, 0.0010, 0.0016 : 1.0 \end{matrix} \right)$
F_1	\tilde{q}_{F_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.0005, 0.0010, 0.0016 : 0.8 \\ 0.0005, 0.0010, 0.0016 : 1.0 \end{matrix} \right)$
G_1	\tilde{q}_{G_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.00055, 0.00097, 0.0015 : 0.8 \\ 0.00055, 0.00097, 0.0015 : 1.0 \end{matrix} \right)$
H_1	\tilde{q}_{H_1}	0.001	$\left(\begin{matrix} 0.0005, 0.0010, 0.0016 : 0.8 \\ 0.0005, 0.0010, 0.0016 : 1.0 \end{matrix} \right)$

14. Дефаззификация

14.1. Дефаззификация методом Танаки и др.

В результате дефаззификации методом Танаки и др. традиционным способом с использованием уравнения (18) получаем, что вероятность отказа для конечного события составляет 0.0814379427968, а надежность – 0.9185620572032.

14.2. Дефаззификация функции интервальной нечеткой вероятности конечного события

В результате дефаззификации предлагаемым методом с использованием формул (23) и (24) получаем, что вероятность отказа для конечного события составляет 0.0799309006739733, а надежность конечного события – 0.920069099326026027.

Разница обоих результатов составляет 0.00150704212282669, полученная здесь вероятность отказа находится слева от вероятности отказа, полученной традиционным способом.

15. Результат

В целях получения показателя критических базовых событий для случая «Лекарство не доставлено пациенту» мы вычислили разницу $V(\tilde{q}_{T_i}, \tilde{q}_{T_{ii}})$ для каждого базового события с использованием уравнения (11). Результаты приведены в табл. 7. Исходя из значения V -индекса в табл. 7 сделан вывод о том, что наиболее

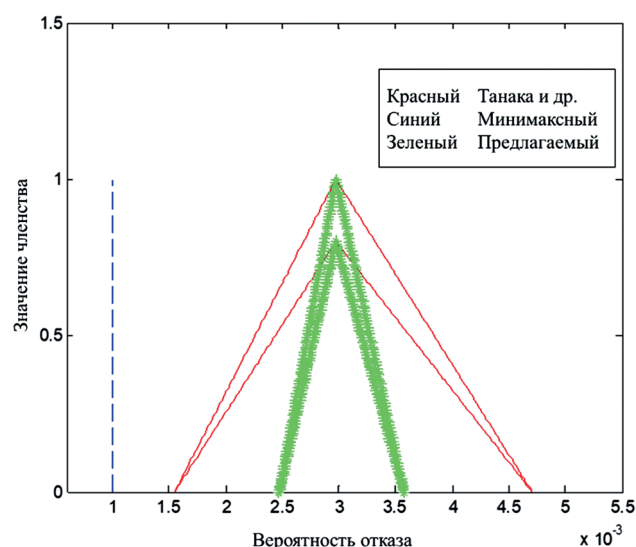


Рис. 7. Вероятность отказа типа «Лекарство не доставлено пациенту»

Табл. 5. Сравнение минимаксного метода и метода Танаки и др.

Значение принадлежности	Минимаксный метод	Метод Танаки и др.			
		Левые точки		Правые точки	
0.1	0.001	0.00169327849433	0.00172882311791	0.00448857136791	0.00453187669433
0.2	0.001	0.00183545698866	0.00190654623582	0.00427204473582	0.00435865538866
0.3	0.001	0.00197763548299	0.00208426935373	0.00405551810373	0.00418543408299
0.4	0.001	0.00211981397732	0.00226199247165	0.00383899147164	0.00401221277732
0.5	0.001	0.00226199247165	0.00243971558956	0.00362246483956	0.00383899147164
0.6	0.001	0.00240417096597	0.00261743870747	0.00340593820747	0.00366577016597
0.7	0.001	0.00254634946030	0.00279516182538	0.00318941157538	0.00349254886030
0.8	0.001	0.00268852795463	0.00297288494329	0.00297288494329	0.00331932755463
0.9	0.001	0.00283070644896			0.00314610624896
1	0.001	0.00297288494329			0.00297288494329

Табл. 6. Сравнение минимаксного метода и предлагаемого метода t -норма

Значение принадлежности	Минимаксный метод	Предлагаемый метод t -норма			
		Левые точки		Правые точки	
0.1	0.001	0.00252404416601	0.00253651196538	0.00349733168963	0.00351231588238
0.2	0.001	0.00257391536348	0.00259885096222	0.00342241072586	0.00345237911137
0.3	0.001	0.00262378656096	0.00266118995906	0.00334748976210	0.00339244234036
0.4	0.001	0.00267365775843	0.00272352895591	0.00327256879834	0.00333250556935
0.5	0.001	0.00272352895591	0.00278586795275	0.00319764783458	0.00327256879834
0.6	0.001	0.00277340015339	0.00284820694960	0.00312272687081	0.00321263202733
0.7	0.001	0.00282327135086	0.00291054594644	0.00304780590705	0.00315269525632
0.8	0.001	0.00287314254834	0.00297288494329	0.00297288494329	0.00309275848531
0.9	0.001	0.00292301374581	—	—	0.00303282171430
1	0.001	0.00297288494329	—	—	0.00297288494329

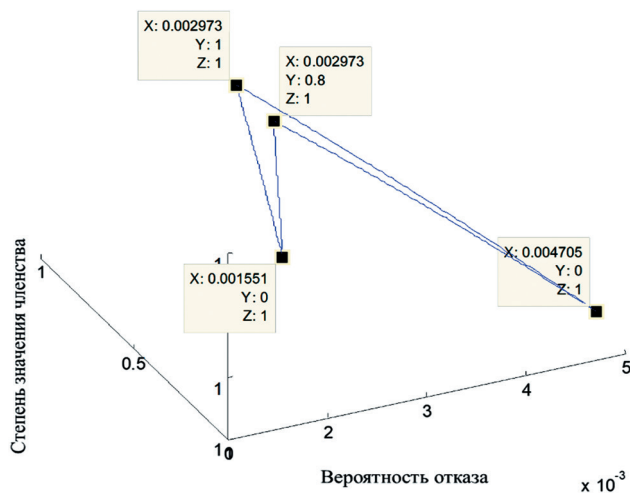


Рис. 8. Функциональная нечеткая вероятность отказа для конечного события

критичные базовые события – F_1 и H_1 , а наименее критичное – C_1 . Значения для всех критичных базовых событий приведены ниже в порядке убывания:

$$(F_1, H_1) > G_1 > E_1 > D_1 > (A_1, B_1) > C_1. \quad (27)$$

Сравнение различных методов показано в табл. 5 и 6, а также на рис. 7 и 8.

16. Заключение

В рамках работы изучено применение ФТА, t -нормы и функциональных нечетких чисел в контексте интервальных треугольных нечетких чисел. В исследовании рассмотрено два типа проблем из области здравоохранения и соответствующие им методы дефазификации в целях анализа надежности существующими методами. Авторы пришли к заключению, что метод t -нормы не дает значительного накопления нечеткости, и выяснили, как функциональное нечеткое число влияет на надеж-

Табл. 7. Ранжирование базовых событий из Примера 1 с использованием разности отказов

Устраненное событие	\tilde{q}_{T_i}	$V(\tilde{q}_{T_i}, \tilde{q}_{T_{i1}})$	Ранг
$A_1(i=1)$	$(0.0024722231738, 0.00297094556083, 0.00357031413827 : 0.8)$ $(0.0024722231738, 0.00297094556083, 0.00357031413827 : 1.0)$	0.000005827692319999422	5
$B_1(i=2)$	$(0.00247222317380, 0.002970945560830, 0.00357031413827 : 0.8)$ $(0.00247222317380, 0.002970945560830, 0.00357031413827 : 1.0)$	0.000005827692319999422	5
$C_1(i=3)$	$(0.00247222332310, 0.00297094556083, 0.00357031413826 : 0.8)$ $(0.00247222332310, 0.00297094556083, 0.00357031413826 : 1.0)$	0.000005827635119999477	6
$D_1(i=4)$	$(0.00247133568504, 0.002970004907872, 0.00356941849523 : 0.8)$ $(0.00247133568504, 0.002970004907872, 0.00356941849523 : 1.0)$	0.000008551477067999993	4
$E_1(i=5)$	$(0.002471186078590, 0.00296989967328, 0.00356926886526 : 0.8)$ $(0.002471186078590, 0.00296989967328, 0.00356926886526 : 1.0)$	0.000008955948079999217	3
$F_1(i=6)$	$(0.001475612719830, 0.00197485980309, 0.00257452629985 : 0.8)$ $(0.001475612719830, 0.00197485980309, 0.00257452629985 : 1.0)$	0.00299431174244	1
$G_1(i=7)$	$(0.001505632544530, 0.00200482962803, 0.00260452717178 : 0.8)$ $(0.001505632544530, 0.00200482962803, 0.00260452717178 : 1.0)$	0.00290432122087	2
$H_1(i=8)$	$(0.001475612719830, 0.00197485980309, 0.00257452629985 : 0.8)$ $(0.001475612719830, 0.00197485980309, 0.00257452629985 : 1.0)$	0.00299431174244	1

ность. Аналогичным образом методом V -индекса были найдены наименее критические события по каждой системе. Специалисты в области здравоохранения могут пользоваться такими методами для снижения вероятности отказа в любом ответственном процессе.

Библиографический список

1. Abecassis Z.A., Carroll IV C., Khorzad R., McElroy L.M., Mehrotra S., Patel R.M. Applying fault tree analysis to the prevention of wrong-site surgery. *J. Surg. Res.* 2014;1-7.
2. Adlassing K., Kolarz G. CADIAG2: Computer assisted medical diagnosis using fuzzy subsets. In: Gupta M., Sanchez E., editors. *Fuzzy Information and decision processes*; Amsterdam: North-Holland; 1982. P. 219-247.
3. Bonnabry P., Cingria L., Sadeghipour F., Ing H., Fonzo-Christe C., Pfister R.E. Use of a systematic risk analysis method to improve safety in the production of pediatric parenteral nutrition solutions. *Qual. Saf. Health Care* 2005;14:93-98.
4. Butnariu D. L fuzzy automata. Description of a neural model. In: Rose J., Bilciu C., editors. *Modern trends in cybernetics and systems*. Springer-Verlag (New York); 1976.
5. Cagliano A.C., Grimaldi S., Rafele C. A systemic methodology for risk management in healthcare sector. *Saf. Sci.* 2011;49:695-708.
6. Chen S.M. Fuzzy system reliability analysis using fuzzy number arithmetic operations. *Fuzzy Sets Syst.* 1994;64(1):31-38.
7. Fordon W., Bezdek J. The application of fuzzy set theory to medical diagnosis. In: Gupta M., Ragade R., Yager R., editors. *Advance of in fuzzy set theory and application*. Amsterdam: North-Holland; 1979. P. 445-461.
8. Fieschi M., Fieschi D., Joubert M., Soula G., Roux M. SPINX: an interactive system for medical diagnosis aids. In: Gupta M., Sanchez E., editors. *Fuzzy information and decision processes*. Amsterdam: North-Holland; 1982. P. 269-275.
9. Huang H.Z., Tong X., Zuo M.J. Posbist fault tree analysis of coherent systems. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* 2004;84:141-148.
10. Hyman W.A., Johnson E. Fault tree analysis of clinical alarms. *J. Clin. Eng.* 2008;April/June:85-94.
11. Lee E. Shape oriented dissimilarities of polygons; its application to the classification of chromosome images. *Pattern recognition* 1974;6:47-60.
12. Lee E. An application of fuzzy sets to the classification of geometric figures and chromosome images. *Information Science* 1976;10:95-114.
13. Lesmo L., Saitta L., Tarasso P. Learning of fuzzy production rules for medical diagnosis. In: Gupta M., Sanches E., editors. *Fuzzy information and decision processes*. Amsterdam: North-Holland; 1982. P. 249-260.
14. Lin K.P., Hung K.C., Kuo Y., Wu M.J. Developing a T_{ω} (the weakest t-norm) fuzzy GERT for evaluating uncertain process reliability in semiconductor manufacturing. *Appl. Soft Comput.* 2011;11(8):5165-51.

15. Marx D.A., Slonim A.D. Assessing patient safety risk before the injury occurs: an introduction to sociotechnical probabilistic risk modelling in health care. *Qual. Saf. Health Care* 2003;12(II):ii33-ii38.

16. Mon D.L., Cheng C.H. Fuzzy system reliability analysis for components with different membership functions. *Fuzzy Sets Syst.* 1994;64(2):145-157.

17. Oguntade O., Beaumont P. Ophthalmological prognosis via fuzzy subsets. *Fuzzy Sets and Systems* 1982;7:123-138.

18. Park A., Lee S.J. Fault tree analysis on hand washing for hygiene management. *Food Control* 2009;20:223-229.

19. Raheja D., Escano M.C. Reducing patient healthcare safety risks through fault tree analysis. *J. Syst. Saf.* 2009;September-October.

20. Rocha A. Neural fuzzy point processes. *Fuzzy sets and systems* 1980;3:11-35.

21. Rocha A. Basic properties of neural circuits. *Fuzzy sets and systems* 1982;7:109-121.

22. Tanaka H., Fan L.T., Lai F.S., Toguchi K. Fault-tree analysis by fuzzy probability. *IEEE Trans. Reliab.* 1983;R-32(5):453-457.

23. Yucel G., Cebi S., Hoege B., Ozok A.F. A fuzzy risk assessment model for hospital information system implementation. *Expert Syst. Appl.* 2011;39:1211-1218.

24. Zadeh L.A. Fuzzy Sets. *Inf. Control* 1965;8(3):338-353.

25. Zimmermann H.J. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers; 2001.

Сведения об авторах

Капил Найдани – научный сотрудник, Университет Хемвати Нандан Бахугуна Гарвал, e-mail: kapilpintu88@gmail.com.

Раджеш Данвал – доктор, профессор, Университет Хемвати Нандан Бахугуна Гарвал, e-mail: dangwalrajeshhnbgu@gmail.com.

Вклад авторов в статью

Капил Найдани представил проблему нечеткости медицинской системы в виде функционального нечеткого множества и применил его дефазификацию методом центра тяжести в точечное значение функции, а также сравнил другие методы дефазификации нечетких множеств с целью выявления различий в уровне надежности для различных методов.

Раджеш Данвал привел пример клинических методов и дерева отказов с вероятностью отказов для базовых событий, чтобы найти точное значение вероятности отказа для событий с целью повышения надежности системы.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.