

# Метод использования транзитивного графа марковского процесса в задаче ранжирования разнородных объектов

Александр В. Бочков, АО «НИИАС», Москва, Российская Федерация  
[a.bochkov@gmail.com](mailto:a.bochkov@gmail.com)



Александр В.  
Бочков

**Резюме.** Метод анализа иерархий, разработанный Томасом Саати, является замкнутой логической конструкцией, которая обеспечивает с помощью простых и хорошо обоснованных правил решение многокритериальных задач, включающих как качественные, так и количественные факторы, причем количественные факторы могут иметь разную размерность. Метод основан на декомпозиции задачи и представлении ее в виде иерархической структуры, что позволяет включить в иерархию все имеющиеся у лица, принимающего решение, знания по решаемой проблеме и последующей обработке суждений лиц, принимающих решения. В результате может быть выявлена относительная степень взаимодействия элементов в иерархии, которые затем выражаются численно. Метод анализа иерархий включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения рейтингов сравниваемых альтернатив. Существенным ограничением метода является требование согласованности матриц попарных сравнений для корректного определения весов сравниваемых альтернатив. **Цель статьи** – рассмотреть нетрадиционный подход к решению задачи оценки рейтингов альтернатив на основе их парных сравнений, которая возникает при анализе предпочтений экспертов в различных областях исследований. Обсуждены подходы к формированию матриц парных сравнений с учетом проблемы согласованности таких матриц и оценки компетентности экспертов. **Метод.** Использован метод анализа иерархий, модели и методы теории Марковских процессов. **Результат.** Предложен способ использования транзитивного графа марковского процесса в задаче экспертного ранжирования объектов некоторой генеральной совокупности с учетом компетенций и уровня подготовки экспертов, участвующих в попарном сравнении. Предложено использовать стационарные вероятности марковского процесса в качестве соотношения приоритетов (весов) сравниваемых объектов. Приведен алгоритм построения финальной шкалы сравнения с учетом степени компетентности экспертов. **Вывод.** Процедуры принятия решений, в которых экспертам предлагается выбрать наилучший(ие) вариант(ы) из допустимого множества, достаточно часто используются в самых различных областях для проведения оценки и определения приоритетности целей и т.п. Описанный метод можно применять не только для сравнения объектов, но и для решения более сложных задач групповой экспертной оценки: планирования и управления, прогнозирования и др. Использование метода способствует объективности анализа при сравнении альтернативных вариантов с учетом различных аспектов их последствий, а также отношения лица, принимающего решение, к этим последствиям. Предлагаемый модельный подход позволяет лицу, принимающему решение, выявлять и уточнять его предпочтения, и, соответственно, выбирать решения, согласованные с этими предпочтениями, избегая логических ошибок в длинных и сложных цепочках рассуждений. Предлагаемый подход может быть использован и при групповом принятии решений, описании процедур, исправляющих отсутствие знаний конкретного эксперта, используя информацию, предоставленную остальными экспертами.

**Ключевые слова:** марковский процесс, экспертная оценка, транзитивный граф, ранжирование, неполные сравнения.

**Формат цитирования:** Бочков А. В. Метод использования транзитивного графа марковского процесса в задаче ранжирования разнородных объектов // Надежность. 2021. №1. С. 11-16. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2021-21-1-11-16>

Поступила 10.12.2020 г. / После доработки 04.02.2021 г. / К печати 22.03.2021 г.

## Введение

Задачи, требующие экспертной оценки, во многих случаях подразумевают участие многих экспертов, что, в свою очередь, накладывает особые требования на процедуру объединения оценок и их достоверность. В большинстве задач принятия решений существуют процедуры, позволяющие объединять мнения разных экспертов по поводу предлагаемых им альтернатив [1, 2, 3]. Поскольку каждый эксперт имеет отличный от других опыт, мнения различных экспертов могут существенно отличаться (действительно, существует множество факторов, которые влияют на предпочтения эксперта). Такое разнообразие экспертных оценок может привести к ситуациям, когда некоторые из них не смогут эффективно выразить любые степени предпочтения, сравнивая две или более доступных альтернатив. Возникает также необходимость использования мнения различных экспертов разного уровня, что порождает вторую серьезную причину несогласованности оценок – в оценки результатов вмешивается несогласованность мнений самих экспертов. Иногда, в погоне за согласованностью сравнений, применяют метод отбрасывания оценок, которые заметно отличаются от средних, но Литтл и Миллет [4, 5], а также Ногин [6] показали, что в итоге можно потерять важные закономерности за счет простого отбрасывания экспертных оценок. В некоторых случаях можно модифицировать процедуру опроса экспертов [7, 8]. Принципиальная применимость и эффективность того или иного подхода зависит от количества пропусков данных и причин, по которым они образовались [9]. Однако Carbone с соавторами [10] на конкретном примере показывают, что «случайное удаление до 50% от сравнений дает хорошие результаты без потери точности». Обобщать результаты в данном случае некорректно, они опираются на априорное знание полной матрицы попарных сравнений, что на практике не наблюдается. Существуют подходы, которые дают возможность при наличии неполной матрицы попарных сравнений использовать методы, позволяющие доопределить матрицу до полной, что подтверждается разными исследователями [11]. Система, которая помогает строить нечеткие отношения предпочтений была предложена в [12, 13], схожая методика также описана в отечественных источниках [14]. Групповое принятие решений, описание процедур, исправляющих отсутствие знаний конкретного эксперта, используя информацию, предоставленную остальными экспертами, вместе с некоторыми процедурами агрегации, можно найти в [15, 16, 17].

## 1. Постановка задачи

Сложность сравнительной оценки (ранжирования) разнородных объектов некоторой совокупности заключается в том, что каждый объект характеризуется,

как правило, не одним показателем (технологическими особенностями, некими присущими ему атрибутами, факторами, ценообразующими параметрами и т.п.), а несколькими, причем эти показатели нередко разнородны по своей природе.

В общем случае необходимо упорядочить все объекты  $x_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) некоторой совокупности  $G$  или определить ранг (вес) этих объектов во множестве  $G$ , т.е. определить соотношение предпочтительности объектов  $x^1 \succ x^2 \succ \dots \succ x^n$ .

Вследствие недостаточности фактической информации о сравниваемых объектах, задача ранжирования часто решается с привлечением экспертов, которые после тщательного неформального анализа устанавливают для этих объектов свой порядок предпочтения.

В том случае, когда количество параметров сравнения велико, проанализировать их для эксперта весьма затруднительно, поэтому возникает необходимость разработки не требующих больших вычислений и основанных на существенно более простых экспертных оценках методов ранжирования объектов. Эти методы должны давать возможность «совмещать» зачастую противоречивые парные сравнительные оценки экспертов.

## 2. Метод решения

Кратко поясним суть предлагаемого метода обработки экспертных оценок. Матрица парных сравнений может быть представлена в виде связанного графа с  $N$  узлами и двумя ребрами между парой узлов – одно характеризует переход из  $i$ -го состояния в  $j$ -е с интенсивностью  $\varepsilon_{ij}$ , а второе, соответственно, характеризует переход из  $j$ -го состояния в  $i$ -е с интенсивностью  $\varepsilon_{ji}$ . Например, если сравниваются два объекта и веса объектов № 1 и № 2 по мнению 1-го эксперта равны 1 и 2, соответственно, то марковская сеть, построенная для такого случая, представлена на рис. 1.

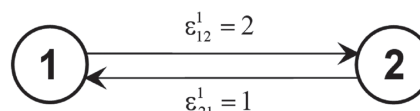


Рис. 1. Марковский процесс сравнения двух объектов

Финальные вероятности состояний равны, соответственно,  $p_1^1 = \frac{\varepsilon_{21}^1}{\varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{21}^1} = \frac{1}{3}$  и  $p_2^1 = \frac{\varepsilon_{12}^1}{\varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{21}^1} = \frac{2}{3}$ , а их отношение равно 1:2. Это простое рассуждение позволяет нам из парного предпочтения находить интенсивности

переходов для подобных графов:  $\frac{p_1^1}{p_2^1} = \frac{\varepsilon_{21}^1}{\varepsilon_{12}^1}$ . Величины  $\varepsilon_{ij}$

выбираются с учетом условия  $\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 1$ .



Табл. 2. Результаты оценки объектов

Название объектов	Эксперты			Итоговый вес объектов	Ранг объектов
	1	2	3		
Объект № 1	1	2	3	2,0865	2
Объект № 2	2	1	1	1,4398	1
Объект № 3	5	4	5	4,9662	5
Объект № 4	4	5	4	4,6429	4
Объект № 5	3	3	6	4,1729	3
Объект № 6	6	6	3	5,4361	6
Средняя оценка	3,50	3,50	3,67		
Дисперсия	0,2380952	0,2380952	0,1900826		
Сигма	17,50	17,50	15,33		
Вес эксперта	0,3721805	0,3721805	0,3233083		

$$\delta^k = \sum_{1 \leq k \leq n} (p_i^k - \bar{p}^k)^2. \quad (3)$$

Чем эта величина больше, тем меньше доверия к мнению эксперта.

#### 4. Определение веса экспертов

С учетом (3), скорректированные «веса» экспертов можно найти по формуле

$$w^k = \frac{1 - \delta^k}{6 - \sum_{1 \leq j \leq n} \delta^j}. \quad (4)$$

Построим случайный граф с интенсивностями на дугах, соответственно

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq 6} w^k \epsilon_{ij}^k. \quad (5)$$

Итоги вычислений по формулам (1)-(5) представлены в табл. 2.

Далее вышеописанный алгоритм повторяется: вычисляются вероятности состояний, дисперсии и новые «веса» экспертов. При этом целесообразно предусмотреть процедуру, исключающую экспертов, имеющих дисперсию оценок выше некоторого порога (т. е., иными словами, некомпетентных в рассматриваемой области).

#### 5. Построение финальной шкалы

Для построения финальной шкалы воспользуемся процедурой, представляющей из себя несколько модифицированный алгоритм метода Дельфи<sup>1</sup>. В общем виде алгоритм Дельфи – это процесс, в результате которого участники группы (независимые эксперты) приходят к консенсусу относительно каких-то событий, не прибегая к дискуссии лицом к лицу. Этот способствует выработке независимости мышления членов

<sup>1</sup> Другие названия метода: «Дельфийский метод», «Метод дельфийского оракула». Авторы метода: математики корпорации РЭНД О. Холмер, Т. Гордон и др. (США), 50-е годы XX в.

группы, препятствует непосредственной конфронтации участников процесса и лишает их возможности отстаивать свои идеи, навязывая свое мнение другим экспертам группы. Немаловажно, что поиск решений проблемы данным методом позволяет учитывать мнение меньшинства, причем в отдельных случаях оно может стать решающим.

Этот метод является наиболее формальным из всех методов экспертного прогнозирования и наиболее часто используется в технологическом прогнозировании, данные которого используются затем в планировании производства и сбыта продукции. Это групповой метод, при котором проводится индивидуальный опрос группы экспертов относительно их предположений о будущих событиях в различных областях, где ожидаются новые открытия или усовершенствования. Опрос проводится с помощью специальных анкет анонимно (личные контакты экспертов и коллективные обсуждения исключаются).

Полученные ответы обобщаются, и результаты снова направляются членам группы экспертов. Для этого рассчитывается среднее и средневзвешенное значение исследуемого параметра, определяется медиана как средний член общего ряда оценок, полученных от экспертов и область доверительности<sup>2</sup>.

На основе этой информации члены группы (по-прежнему сохраняя анонимность) высказывают дальнейшие предположения, причем этот процесс может повторяться несколько раз в рамках т. н. многуровой процедуры опроса.

<sup>2</sup> Область доверительности целесообразно рассчитывать через квартиль (термин впервые использован Галтоном, 1882). Существует три точки деления: нижняя, средняя и верхняя квартили (также их называют квантилями 0,25; 0,5 и 0,75), равные 25-й, 50-й и 75-й процентилем распределения (соответственно). 25-я квартиль переменной — это такое значение, ниже которого попадают 25% значений переменной. Аналогично, 75-я квартиль — это такое значение, ниже которого попадают 75% значений переменной. Средняя квартиль (50-я квартиль) называется медианой.

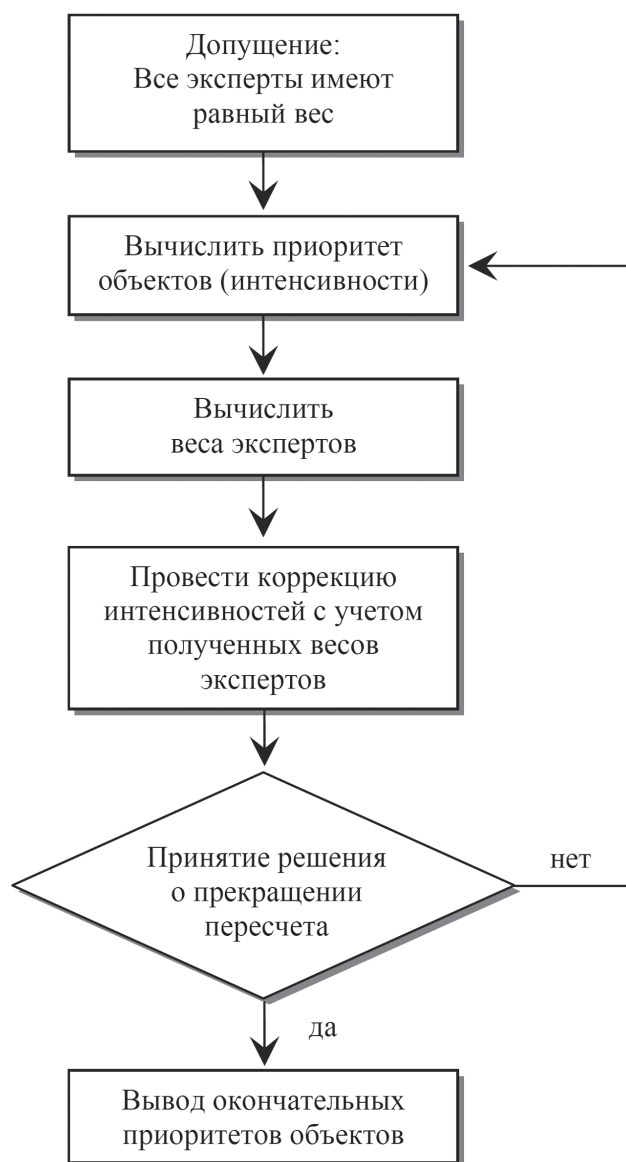


Рис. 3. Алгоритм построения финальной шкалы

Экспертов можно условно разделить на три категории:

- «консерваторы», которые своих оценок не меняют;
- «соглашатели», которые начинают менять свою оценку, приближая ее к средней;
- «упрямцы», которые назначают оценку, еще более отдаляющуюся от средней.

Результаты опроса экспертов используют в качестве прогноза после того, как начинает появляться совпадение мнений.

В общем виде процедура экспертного опроса по методу Дельфи включает следующие пять этапов.

Этап 1. Формирование рабочей группы аналитиков, задача которой заключается в организации процедуры экспертного опроса.

Этап 2. Формирование экспертной группы. В соответствии с требованиями метода группа экспертов должна включать 10-15 специалистов в данной области. Компе-

тентность экспертов определяется путем анкетирования, анализом уровня реферирования (количества ссылок на работы данного специалиста), использованием листов самооценки.

Этап 3. Формулирование вопросов. Формулировки вопросов должны быть четкими и однозначно трактуемыми, предполагать однозначные ответы.

Этап 4. Проведение экспертизы. Метод предполагает повторение нескольких шагов проведения опроса.

Этап 5. Подведение итогов опроса.

Предлагаемый алгоритм построения финальной шкалы напоминает вышеописанный алгоритм проведения экспертизы по методу Дельфи (рис. 3).

Если группа экспертов достаточно велика (более 10 чел.), то можно в начале процедуры отбрасывать крайние значения в оценках приоритетов объектов.

## Заключение

Вышеописанная процедура ранжирования объектов, включающая алгоритм построения финальной шкалы и учитывающая меру компетентности экспертов, может оказаться полезной в задаче определения предпочтительности объектов по некоторым признакам, задаче о степени оценки потенциальной опасности и риска объектов при анализе структурно-сложных систем и т.п.

## Библиографический список

1. Evangelos T. Multi-criteria decision-making methods: a comparative study. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2000.
2. Fodor J., Roubens M. Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1994.
3. Stevens S.S. Psychophysics: Introduction to its Perceptual Neural and Social Prospects. N. Y.: Wiley, 1975.
4. Литтл Р.Дж.А., Рубин Д.Б. Статистический анализ данных с пропусками. М.: Финансы и статистика, 1991. 336 с.
5. Millet I. The effectiveness of alternative preference elicitation methods in the analytic hierarchy process // J. Multi-Criteria Decis. Anal. 1997. Vol. 6. No. 1. P. 41-51.
6. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. № 7. С. 1261-1270.
7. Шведенко В.Н., Староверова Н.А. Методы повышения точности расчета компонентов вектора приоритетов иерархической системы альтернатив при проведении экспертных оценок // Вестник ИГЭУ. 2009. № 3.
8. Огурцов А.Н., Староверова Н.А. Алгоритм повышения согласованности экспертных оценок в методе анализа иерархий // Вестник ИГЭУ. 2013. № 5.
9. Garcia-Laencina P.J., Sanco-Gomez J.-L., Figueiras-Vidal A.R. Pattern classification with missing data: a review. London: Springer-Verlag Limited, 2009.

10. Carmone F.J., Kara Jr.A., Zanakis S.H. A Monte Carlo investigation of incomplete pairwise comparison matrices in AHP // *Eur. J. Oper. Res.* 1997. Vol. 102. No. 3. P. 533-553.

11. Ebenbach D.H., Moore C.F. Incomplete information, inferences, and individual differences: The case of environmental judgements // *Org. Behav. Human Decis. Process.* 2000. Vol. 81. No. 1. P. 1-27.

12. Alonso S, Cabrerizo F.J., Chiclana F. et al. An interactive decision support system based on consistency criteria // *J. Mult.-Valued Log. Soft Comput.* 2008. Vol. 14. No. 3-5, P. 371-386.

13. Fodor J., Roubens M. Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

14. Киселев И.С. Аналитический метод доопределения кратных предпочтений в матрице парных сравнений // *ПДМ.* 2011. № 3 (13).

15. Kim J. K., Choi S.H., Han C.H. et al. An interactive procedure for multiple criteria group decision making with incomplete information // *Comput. Ind. Eng.* 1998. Vol. 35. No. 1/2. P. 295-298.

16. Kim J.K., Choi S.H. A utility range-based interactive group support system for multiattribute decision making // *Comput. Oper. Res.* 2001. Vol. 28. No. 5. P. 485-503.

17. Rehman A., Hussain M., Farooq A. et al. Consensus-Based Multi-Person Decision Making with Incomplete

Fuzzy Preference Relations Using Product Transitivity // *Mathematics.* 2019. Vol. 7(2). P. 185-197.

18. Козлов Б.А., Ушаков И.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. М.: Советское радио, 1975. 472 с.

## Сведения об авторе

**Александр Владимирович Бочков** – доктор технических наук, заместитель руководителя научно-технического комплекса АО «НИИАС», ул. Нижегородская, д. 27, стр. 1, Москва, Российская Федерация, 109029; e-mail: a.bochkov@gmail.com

## Вклад автора в статью

Автором предложен метод использования транзитивного графа марковского процесса в задаче экспертного ранжирования объектов некоторой генеральной совокупности. Предложено использовать стационарные вероятности марковского процесса в качестве соотношения приоритетов (весов) сравниваемых объектов. Приведен алгоритм построения финальной шкалы сравнения с учетом степени компетентности экспертов.

## Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов