

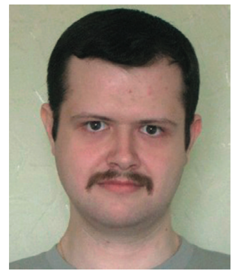

Перегуда А.И., Перегуда А.А., Тимашев Д.А.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрены математические модели надежности ЛВС произвольной топологии с восстанавливаемыми элементами, анализ которой позволил получить соотношения вероятности потери данных в сети, вероятности аварии и математического ожидания времени до аварии элементов сети без каких либо предположений о законах распределения случайных величин. Предложена модель учета множественных отказов элементов сети.

Ключевые слова: *функция распределения, математическое ожидание, процесс восстановления, потеря данных, множественные отказы, сервер, клиент, порт, период регенерации.*

Введение

В настоящее время вычислительная техника находит все более широкое применение в человеческой деятельности. Без использования информационных средств невозможна дальнейшая индустриализация производства и, как следствие, дальнейшее повышение эффективности всех сфер общественной деятельности. Наряду с бурным развитием и интенсификацией информационных процессов возникает ряд проблем, без решения которых вообще нельзя будет говорить об эффективности информатизации. К таким проблемам следует отнести создание вычислительных систем (сетей), характеризующихся достаточно высокими показателями надежности их функционирования и обеспечением защиты информации, содержащейся в информационной системе, от несанкционированного доступа.

Большинство информационных систем (ИС) построено на основе компьютерных технологий и являются совокупностью программного и аппаратного обеспечения. С усложнением программного обеспечения возрос его вклад в ненадежность системы в целом, что необходимо учитывать, в то время как раньше выполнялся анализ надежности только аппаратной части. Но для потребителя неважно, что явилось причиной отказа системы, важен сам факт отказа. Существующие модели надежности не позволяют рассматривать аппаратную реализацию и программное обеспечение в совокупности как единое целое, что затрудняет их использование из-за большого разнообразия применяющихся систем, программного обеспечения и сложности их структуры.

В дальнейшем под ИС будем понимать совокупность аппаратных и программных средств, реализующих три основные функции: хранение, обработку и защиту данных, что позволяет любую информационную систему представить в виде трех подсистем: системы хранения данных (СХД), системы обработки данных (СОД) и системы безопасности (СБ). Такое разделение ИС носит чисто логический характер и не отражает конкретную реализацию системы, но при этом в любой реальной системе можно выделить совокупность аппаратных и программных модулей, обеспечивающих выполнение каждой из этих функций. Абстрагирование от реального оборудования и рассмотрение логических подсистем позволяет получить методы расчета показателей надежности, которые можно применять к любым ЛВС независимо от состава оборудования, масштабов системы и ее функций. Рассматриваем ЛВС как совокупность аппаратных и программных средств, реализующих основные функции и включающие в себя *сервер* – элемент ВС, содержащий систему хранения данных (СХД) со своими системами передачи данных (СПД) и системой безопасности (СБ); *клиент* – элемент ВС, включающий в себя систему обработки данных (СОД) со своими СПД и СБ; *концентратор* – служит для связи клиентов и сервера и состоит из СПД и СБ. К системе хранения данных относятся аппаратные и программные средства, обеспечивающие функции приема, хранения и выдачи информации. Функциями системы обработки данных являются преобразование данных и связь СХД с пользователем. СБ выполняет функции контроля над работой остальных систем и сохранения целостности данных. Она должна либо предотвращать потерю информации, либо сигнализировать о невозможности защиты данных. Аварией ЛВС здесь будем считать потерю данных. Под потерей данных понимаем либо реальное их уничтожение, либо невозможность в течение достаточно длительного промежутка времени получить доступ к ним.

Нашей задачей является разработка математической модели надежности произвольной ЛВС с восстанавливаемыми элементами, учитывающей последствия отказов подсистем и получение соответствующих показателей надежности, а также учет множественных отказов элементов сети. Данная работа является дальнейшим развитием работ [1,2], где были получены выражения для вычисления вероятности потери данных сетей. Оценка показателей надежности и эффективности резервированных сетевых структур с выделением двух групп узлов и коммуникационной подсистемы рассматривалась в [3].

Решение задачи

Введем необходимые обозначения. Пусть случайная величина χ обозначает наработку до отказа СОД, а случайная величина γ – время восстановления СОД. Случайными величинами φ_1, φ_2 и φ_3 будем обозначать наработки до отказа СПД клиента, порта концентратора и сервера, а величины ψ_1, ψ_2 и ψ_3 – это времена восстановления после отказа СПД клиента, порта концентратора и сервера соответственно. Случайную наработку до отказа СХД обозначим через ω, а время её восстановления – через ε. Далее случайные величины ξ_1, ξ_2 и ξ_3 – наработки до скрытого отказа СБ клиента, порта концентратора и сервера. Случайными величинами η_1, η_2 и η_3 будем обозначать времена восстановления СБ клиента, порта концентратора и сервера. Поскольку мы предполагаем, что рассматриваемая система состоит из восстанавливаемых подсистем и отказы обнаруживаются при проведении контрольных профилактик, то включаем в рассмотрение периоды профилактик СБ клиента T_1, порта концентратора T_2 и сервера T_3. Через θ_1, θ_2 и θ_3 обозначим продолжительности профилактик СБ клиента, порта концентратора и сервера соответственно, учитывая, что во время контрольной профилактики система безопасности не может выполнять свои функции.

Будем предполагать, что все функции распределения введенных в рассмотрение случайных величин непрерывны, т.е. они обладают плотностями распределения, и, кроме того, все случайные величины взаимно независимы. Рассмотрим модели надежности элементов сети в отдельности.

Математическая модель надежности процесса функционирования клиента

Рассмотрим подробнее процесс функционирования клиента, включающий в себя систему обработки данных (СОД) со своими СПД и СБ, причем СОД и СПД клиента соединены последовательно, поскольку необнаруженный отказ любой из этих систем приводит к аварии клиента и дальнейшему его восстановлению, следовательно процесс функционирования клиента обладает моментами регенерации. Пусть клиент функционирует так, что в процессе его функционирования возможны два варианта развития событий. Первый вариант: СОД может отказать раньше СПД и, если СБ в этот момент исправна, то происходит останов клиента и выполняется восстановление СОД, при этом предполагаем, что по окончании восстановления СОД СПД также полностью восстановлена или если СБ в этот момент находится в неисправном состоянии, то произойдет авария клиента. Второй вариант: СПД может отказать раньше СОД и, если СБ в этот момент исправна, то произойдет останов клиента и последующее восстановление СПД, и по окончании восстановления СПД СОД также полностью восстановлена, или если СБ не сработает, то произойдет авария клиента. При этих допущениях i-й цикл регенерации процесса функционирования клиента имеет длительность, равную $(\chi_i+\gamma_i)J_{\chi_i\le\varphi_{1i}}+(\varphi_{1i}+\psi_{1i})J_{\varphi_{1i}<\chi_i}$, где $J_{w\in A}=\begin{cases}1, & w\in A,\\ 0, & w\notin A.\end{cases}$.

Следовательно, если СОД отказала раньше СПД, то цикл регенерации будет состоять из наработки СОД до отказа и времени восстановления клиента после отказа СОД, а если СПД отказала раньше СОД, то цикл регенерации состоит из наработки до отказа СПД и времени восстановления клиента после отказа СПД. Тот цикл регенерации с номером κ, во время которого произойдет авария клиента, имеет длительность, равную $\chi_\kappa J_{\chi_\kappa\le\varphi_{1\kappa}}+\varphi_{1\kappa}J_{\varphi_{1\kappa}<\chi_\kappa}$. Наработка клиента до аварии будет, таким образом, складываться из $\kappa-1$ полных циклов регенерации и того цикла регенерации, на котором произошла авария [3,5]. Тогда функцию распределения времени наработки до первой аварии клиента ρ можно записать так:

$$F_\rho(t)=P(\rho\le t)=P\left(\sum_{i=1}^{\kappa-1}\Big((\chi_i+\gamma_i)J_{\chi_i\le\phi_{1i}}+(\phi_{1i}+\Psi_{1i})J_{\phi_{1i}<\chi_i}\Big)+\chi_\kappa J_{\chi_\kappa\le\phi_{1\kappa}}+\phi_{1\kappa}J_{\phi_{1\kappa}<\chi_\kappa}\le t\right)=$$
$$=P\left(\sum_{i=1}^{\kappa}(\chi_i\wedge\phi_{1i})+\sum_{i=1}^{\kappa-1}(\gamma_i J_{\chi_i\le\phi_{1i}}+\Psi_{1i}J_{\phi_{1i}<\chi_i})\le t\right),$$

где κ – номер цикла, на котором произошла авария клиента. Используя формулу полной вероятности, функцию $F_\rho(t)$ перепишем так:

$$F_\rho(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sum_{i=1}^{n}(\chi_i\wedge\varphi_{1i})+\sum_{i=1}^{n-1}(\gamma_i J_{\chi_i\le\varphi_{1i}}+\psi_{1i}J_{\varphi_{1i}<\chi_i})\le t\Big|_{\kappa=n}\right)P(\kappa=n),$$

где r – вероятность отказа клиента на цикле регенерации. Замечая, что вероятность того, что авария произошла именно на n-м цикле, равна $P(\kappa=n)=r_1(1-r_1)^{n-1}$, тогда

$$F_{\rho}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} (\chi_i \wedge \varphi_{1i}) + \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i J_{\chi_i \le \varphi_{1i}} + \psi_{1i} J_{\varphi_{1i} < \chi_i}) \le t \Big|_{\kappa=n} \right) r_1 (1-r_1)^{n-1}, \qquad (1)$$

Найдем теперь r_1. Введем в рассмотрение две вспомогательные случайные величины U_n и V_n, учитывающие периодические проверки оборудования. Эти величины, имеющие смысл: U_n – время функционирования СБ клиента до n-го отказа, V_n – время функционирования СБ клиента до n-го восстановления, определены следующими соотношениями [4]:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} + \sum_{i=1}^{n-1} \left((T+\theta) - \left\{ \frac{\xi_{1i}}{T+\theta} \right\} (T+\theta) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_{1i} = U_n, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \left((T+\theta) - \left\{ \frac{\xi_{1i}}{T+\theta} \right\} (T+\theta) \right) + \sum_{i=1}^{n} \eta_{1i} = V_n,$$

здесь, $[x]$ – целая часть x, $\{x\}$ – дробная часть x, $\chi \wedge \varphi_1 = \min(\chi, \varphi_1)$.

Очевидно, что если отказ СПД или СОД произойдет во время проведения восстановления СБ, то произойдет авария клиента. Условие аварии для этого случая записывается в виде $U_n \le \chi \wedge \varphi_1 < V_n$. Но аварии клиента могут произойти также и в случаях, когда отказ СПД или СОД придется на время проведения контрольной профилактики. Условие аварии перепишем в виде последовательности событий:

$$V_{n-1} + T_1 \le \chi \wedge \varphi_1 < V_{n-1} + (T_1 + \theta_1); \quad V_{n-1} + (T_1 + \theta_1) + T_1 \le \chi \wedge \varphi_1 < V_{n-1} + 2(T_1 + \theta_1); \ldots$$
$$V_{n-1} + \left(\left[\xi_{n1} \big/ (T_1 + \theta_1) \right] - 1 \right) (T_1 + \theta_1) + T_1 \le \chi \wedge \varphi_1 < V_{n-1} + \left[\xi_{n1} \big/ (T_1 + \theta_1) \right] (T_1 + \theta_1).$$

Учитывая условие аварии, вероятность аварии за период регенерации определим так:

$$r_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (P(U_n \le x) - P(V_n \le x) + M \sum_{i=1}^{\left[\xi_{n1} / (T_1+\theta_1) \right]} (P(V_{n-1} + (i-1)(T_1+\theta_1) + T_1 \le x) - P(V_{n-1} + i(T_1+\theta_1) \le x)) dF_{\chi \wedge \varphi_1}(x)$$

Опуская несложные преобразования, имеем [4,5]:

$$r_1 \approx \frac{M\eta_1 + M(T_1 + \theta_1 + \left[\xi_1 \big/ (T_1+\theta_1) \right] (T_1 + \theta_1)) - M\xi_1}{M\eta_1 + M(T_1 + \theta_1 + \left[\xi_1 \big/ (T_1+\theta_1) \right] (T_1 + \theta_1))} + \frac{M \left[\xi_1 \big/ (T_1+\theta_1) \right] \theta_1}{M\eta_1 + M(T_1 + \theta_1 \left[\xi_1 \big/ (T_1+\theta_1) \right] (T_1 + \theta_1))} =$$
$$= 1 - \frac{M\xi_1 - M \left[\xi_1 \big/ (T_1+\theta_1) \right] \theta_1}{M\eta_1 + T_1 + \theta_1 + M \left[\xi_1 \big/ (T_1+\theta_1) \right] (T_1 + \theta_1)} = 1 - K_г^{СБ} = K_{нг}^{СБ},$$

где $K_г^{СБ}$ – стационарный коэффициент готовности СБ, $K_{нг}^{СБ} = 1 - K_г^{СБ}$ [4].

Перепишем выражение (1) в виде сверток функций распределений $F_\sigma(t)$ и $F_{\chi\wedge\varphi_1}(t)$:

$$F_\rho(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(F_{\chi\wedge\varphi_1}^{*(n)} * F_\sigma^{*(n-1)})(t)K_{нг}^{СБ}(1-K_{нг}^{СБ})^{n-1},$$

где $F_{\chi\wedge\varphi_1}(t)=P(\chi\wedge\varphi_1\le t)$, $F_\sigma(t)=P(\gamma J_{\chi\le\varphi_1}+\psi_1 J_{\varphi_1<\chi}\le t)$. Тогда функцию $F_\rho(t)$ представим так:

$$\widetilde{F}_\rho(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{F}_\sigma(s))^{n-1}(\widetilde{F}_{\chi\wedge\varphi_1}(s))^n K_{нг}^{СБ}(1-K_{нг}^{СБ})^{n-1}=\frac{K_{нг}^{СБ}\widetilde{F}_{\chi\wedge\varphi_1}(s)}{1-(1-K_{нг}^{СБ})\widetilde{F}_\sigma(s)\widetilde{F}_{\chi\wedge\varphi_1}(s)}, \tag{2}$$

где $\widetilde{F}_\rho(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF_\rho(t)=Me^{-s\rho}$ – преобразование Лапласа-Стилтьеса функции $F_\rho(t)$. Используя свойство преобразования Лапласа-Стилтьеса, находим среднее время до первой аварии клиента по формуле $M\rho=-\frac{d\widetilde{F}_\rho(s)}{ds}\Big|_{s=0}$, которое после преобразований запишем:

$$M\rho=M(\chi\wedge\varphi_1)+\frac{1-K_{нг}^{СБ}}{K_{нг}^{СБ}}(M(\chi\wedge\varphi_1)+M\sigma) \tag{3}$$

где $M(\chi\wedge\varphi_1)=\int_0^\infty\int_0^y x dF_\chi(x)dF_{\varphi_1}(y)+\int_0^\infty\int_0^y x dF_{\varphi_1}(x)dF_\chi(y)$ и $M\sigma=M\gamma MF_\chi(\varphi_1)+M\psi_1\overline{F}_\chi(\varphi_1)$.

Функции распределения $F_{\chi\wedge\varphi_1}(t)$ и $F_\sigma(t)$ запишем в явном виде

$$F_\sigma(t)=F_\gamma(t)\int_0^\infty F_\chi(x)dF_{\varphi_1}(x)+F_{\psi_1}(t)\int_0^\infty F_{\varphi_1}(x)dF_\chi(x),\ F_{\chi\wedge\varphi_1}(t)=F_\chi(t)+F_{\varphi_1}(t)-F_\chi(t)F_{\varphi_1}(t).$$

Математическая модель надежности порта концентратора

Вычислим функцию распределения времени до первой аварии порта концентратора. Концентратор служит для связи клиентов и сервера и состоит из СПД и СБ. При составлении математической модели надежности порта концентратора рассмотрим наложение регенерирующих процессов функционирования системы передачи данных и системы безопасности. Процесс функционирования СПД в этом контексте, является определяющим, поскольку он задает моменты регенерации процесса функционирования порта характеризующегося продолжительностью цикла регенерации $\varphi_2+\psi_2$. Функцию распределения времени наработки до первой аварии порта ρ' можно записать так

$$P\{\rho'\le t\}=P\left\{\sum_{k=1}^{\kappa-1}(\varphi_{2k}+\psi_{2k})+\varphi_{2\kappa}\le t\right\},$$

где κ – цикл регенерации, на котором произошла авария порта.

Поскольку процесс функционирования порта является альтернирующим процессом восстановления, то вероятность того, что авария произошла на n–ом периоде регенерации можно представить в виде $P\{\kappa = n\} = r_2(1-r_2)^{n-1}$, где r_2 – вероятность аварии на цикле регенерации. Используя формулу полной вероятности, запишем:

$$P\{\rho' \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k}+\psi_{2k})+\varphi_{2n} \le t\right\} P\{\kappa = n\}.$$

Подставляя в записанное соотношение вероятность $P\{\nu = n\}$, получаем искомую вероятность в виде:

$$F_{\rho'}(t) = r_2 \sum_{n=1}^{\infty} F_{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k}+\psi_{2k})+\varphi_{2n}}(t)(1-r_2)^{n-1}.$$

Поскольку функция $F_{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k}+\psi_{2k})+\varphi_{2n}}(t)$ есть свертка функций распределений $F_{\varphi_2}^{*(n)}(t)$ и $F_{\psi_2}^{*(n)}(t)$, то $F_{\rho'}(t)$ перепишем так:

$$F_{\rho'}(t) = r_2 \sum_{n=1}^{\infty}(F_{\varphi_2}^{*(n)} * F_{\psi_2}^{*(n-1)})(t)(1-r_2)^{n-1}. \qquad (4)$$

Выполняя преобразование Лапласа-Стилтьеса функции распределения времени до наступления первой аварии порта концентратора, перепишем (4) в следующем виде:

$$\widetilde{F}_{\rho'}(s) = q_2 \sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{F}_{\varphi_2}(s)^{\,n}(\widetilde{F}_{\psi_2}(s)^{\,n-1}(1-q_2)^{n-1} = \frac{q_2\widetilde{F}_{\varphi_2}(s)}{1-(1-q_2)\widetilde{F}_{\varphi_2}(s)\widetilde{F}_{\psi_2}(s)}, \qquad (5)$$

где $\widetilde{F}_{\varphi_2}(s)$, $\widetilde{F}_{\psi_2}(s)$, $\widetilde{F}_{\rho'}(s)$ – преобразования Лапласа-Стилтьеса функций распределения $F_{\varphi_2}(t)$, $F_{\psi_2}(t)$ и $F_{\rho'}(t)$.

Таким образом, удалось получить преобразование Лапласа-Стилтьеса функции распределения времени до наступления первой аварии комплекса в виде, удобном для вычисления математического ожидания времени до наступления первой аварии порта концентратора. Поскольку $M\rho' = -\frac{d\widetilde{F}_{\rho'}(s)}{ds}\Big|_{s=0}$, то

$$M\rho' = M\varphi_2 + \frac{1-r_2}{r_2}(M\varphi_2 + M\psi_2), \qquad (6)$$

где $M\varphi_2$ и $M\psi_2$ – математические ожидания случайных величин φ_2 и ψ_2.

Как было показано ранее, для клиента вероятность аварии порта концентратора на цикле регенерации r_2 может быть вычислена по следующему соотношению

$$r_2 \approx K_{2нг}^{СБ} = 1 - \frac{M\xi_2 - M\left[\xi_2 / (T_2 + \theta_2)\right]\theta_2}{M\eta_2 + M\left((T_2 + \theta_2) + \left[\xi_2 / (T_2 + \theta_2)\right](T_2 + \theta_2)\right)}.$$

Математическая модель надежности сервера

Сервер включает в себя систему хранения данных (СХД) со своими системой передачи данных (СПД) и системой безопасности (СБ). Развитие процесса функционирования сервера может происходить по двум сценариям: если СХД отказала раньше СПД, тогда цикл регенерации состоит из суммы наработки СХД до отказа и времени восстановления сервера после отказа СХД, а если СПД отказала раньше СХД, то цикл регенерации состоит из суммы наработки до отказа СПД и времени восстановления сервера после отказа СПД. При таком предположении i –й цикл регенерации процесса функционирования сервера имеет длительность τ_i равную $\omega_i \wedge \varphi_{3i} + \varepsilon_i J_{\omega_i \le \varphi_{3i}} + \psi_{3i} J_{\varphi_{3i} < \omega_i}$, Тот цикл регенерации с номером κ , во время которого произойдет авария сервера, будет неполным, и, соответственно, имеет длительность, равную $\omega_\kappa J_{\omega_\kappa \le \varphi_{3\kappa}} + \varphi_{3\kappa} J_{\varphi_{3\kappa} < \omega_\kappa} = \omega_\kappa \wedge \varphi_{3\kappa}$. Наработка сервера до аварии равна сумме $\kappa - 1$ полных циклов регенерации и того цикла регенерации, на котором произошла авария.

Поскольку показатели надежности сервера будут вычисляться по той же схеме, что и показатели надежности клиента, то изложение этой модели будет выполнено без подробностей. Так, функцию распределения времени наработки до первой аварии сервера ρ'' можно записать так:

$$F_{\rho''}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n}(\omega_i \wedge \varphi_{3i}) + \sum_{i=1}^{n-1}(\varepsilon_i J_{\omega_i \le \varphi_{3i}} + \psi_{3i} J_{\varphi_{3i} < \chi_i}) \le t\right) r_3 (1 - r_3)^{n-1}, \tag{7}$$

где r_3 – вероятность аварии сервера на цикле регенерации, а вероятность того, что авария сервера произошла именно на n -ом цикле, равна $P(\kappa = n) = r_3(1 - r_3)^{n-1}$.

Не останавливаясь на обсуждении методов получения соотношения для вероятности аварии сервера на цикле регенерации, сразу запишем конечное соотношение, так как эти методы описаны ранее довольно подробно. Так r_3 имеет вид:

$$r_3 = 1 - \frac{M\xi_3 - M\left[\xi_3 / (T_3 + \theta_3)\right]\theta_3}{M\eta_3 + M(T_3 + \theta_3 + \left[\xi_3 / (T_3 + \theta_3)\right](T_3 + \theta_3))} = 1 - K_{3г}^{СБ} = K_{3нг}^{СБ},$$

где $K_{3г}^{СБ}$ — стационарный коэффициент готовности СБ сервера.

Вероятность (7) вычисляется от суммы случайных величин, поэтому следует ее записать в виде свертки двух вероятностей функций $F_{\omega \wedge \varphi_3}(t) = P(\omega \wedge \varphi_3 \le t)$, $F_{\sigma_3}(t) = P(\varepsilon J_{\omega \le \varphi_3} + \psi_3 J_{\varphi_3 < \omega} \le t)$. Имеем:

$$F_{\rho''}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(F_{\omega \wedge \varphi_3}^{*(n)} * F_{\sigma_3}^{*(n-1)})(t) K_{3нг}^{СБ}(1 - K_{3нг}^{СБ})^{n-1}. \tag{8}$$

Выполняя преобразование Лапласа-Стилтьеса над соотношением (8), получаем:

$$\tilde{F}_{\rho''}(s) = \frac{K_{Знг}^{СБ}\tilde{F}_{\omega\wedge\varphi_3}(s)}{1-(1-K_{Знг}^{СБ})\tilde{F}_{\omega\wedge\varphi_3}(s)\tilde{F}_{\sigma_3}(s)}. \quad (9)$$

При нахождении среднего времени до первой аварии сервера $M\rho''$ используем стандартный метод, а именно $M\rho'' = -\frac{d\tilde{F}_{\rho''}(s)}{ds}\Big|_{s=0}$ и после соответствующих вычислений имеем:

$$M\rho'' = M(\omega\wedge\varphi_3) + \frac{1-K_{нг}^{СБ}}{K_{нг}^{СБ}}(M(\omega\wedge\varphi_3) + M\sigma_3), \quad (10)$$

где $M(\omega\wedge\varphi_3) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^y x dF_\omega(x)dF_{\varphi_3}(y) + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^y x dF_{\varphi_3}(x)dF_\omega(y)$ и $M\sigma_3 = M\varepsilon MF_\omega(\varphi_3) + M\psi_3 M\bar{F}_\omega(\varphi_3)$.

Функции распределения $F_{\chi\wedge\varphi_1}(t)$ и $F_{\sigma_3}(t)$ можно записать в явном виде

$$F_{\sigma_3}(t) = F_\varepsilon(t)\int\limits_0^\infty F_\omega(x)dF_{\varphi_3}(x) + F_{\psi_3}(t)\int\limits_0^\infty F_{\varphi_3}(x)dF_\omega(x),\ F_{\omega\wedge\varphi_3}(t) = F_\omega(t) + F_{\varphi_3}(t) - F_\omega(t)F_{\varphi_3}(t).$$

Отметим, что соотношения (2), (5) и (9) например, для экспоненциального распределения являются рациональными алгебраическими функциями, и их оригинал находится довольно просто при помощи стандартных методов.

Математическая модель надежности сети

Пусть сеть состоит из конечного числа элементов N. Функцию надежности сети S обозначим через $h = h_S(p_1, p_2,..., p_N) = M\varphi_S(x)$, где $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2,..., x_N)$ – структурная функция (булева функция) [6], а $P_i = P(x_i = 1) = Mx_i$ – вероятность безаварийной работы i-го элемента сети в момент времени t.

Поскольку сеть – это восстанавливаемая система, то все время $[0,\infty)$ функционирования элемента распадается на отдельные циклы, в каждом из которых элемент часть времени работает без аварий (множество интервалов времени Q^+), а остальное время затрачивается на устранение последствий аварии (множество интервалов времени Q^-). Назовем дуальной к булевой функции $\varphi_S(x) = \varphi_S(x_1, x_2,..., x_N)$ функцию множеств A_1, A_2, A_3,…, A_N $\hat{\varphi}_S(A) = \hat{\varphi}_S(A_1, A_2,..., A_N)$, определенную по следующему правилу: если $\varphi_S(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$, то $\hat{\varphi}_S(A_1, A_2) = A_1 \cap A_2$ и для $\varphi_S(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, $\hat{\varphi}_S(A_1, A_2) = A_1 \cup A_2$ и, наконец, при $\varphi_S(x) = \bar{x} \Rightarrow \hat{\varphi}_S(A) = (0,\infty) - A$. Формально функцию $\hat{\varphi}_S(A_1, A_2,..., A_N)$ можно ввести с помощью совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) функции $\varphi_S(x_1, x_2,..., x_N)$. Е

Если СДНФ $\varphi_S(x_1, x_2,..., x_N)$ имеет вид: $\varphi_S(x_1, x_2,..., x_N) = \sum\limits_\alpha \tilde{N}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_N^{\alpha_N}$,

то $\hat{\varphi}_S(A_1, A_2,..., A_N) = \bigcup\limits_\alpha \tilde{N}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_N^{\alpha_N}$, где

$$A^{\alpha}=\begin{cases} A, & \text{если } \alpha=1 \\ (0,\infty)-A, & \text{если } \alpha=0, \end{cases}$$

$$C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N} B=\begin{cases} 0, & \text{если } C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N}=0 \\ B, & \text{если } C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N}=1. \end{cases}$$

Отображение $\pi\varphi \to \widehat{\varphi}$ представляет собой естественный морфизм из категории булевых функций в категорию функций множеств; содержательный смысл состоит в том, что если A_i – множество тех моментов времени, в которые элемент x_i находится в исправном состоянии, то $\widehat{\varphi}_S(A_1, A_2,\dots, A_N)$ есть множество моментов исправной работы всей системы.

Пусть t – некоторый момент времени, то по определению структурная функция $\widehat{\varphi}_S(Q_1^+ \cap [0,t], Q_2^+ \cap [0,t], Q_3^+ \cap [0,t],\dots,Q_n^+ \cap [0,t])$ есть множество моментов времени, в которые система находилась в исправном состоянии до момента t. Тогда среднее время исправного функционирования системы $K_S(t)$ за время t будет определяться формулой

$K_S(t) = M mes \widehat{\varphi}_S(Q_1^+ \cap [0,t], Q_2^+ \cap [0,t], Q_3^+ \cap [0,t],\dots,Q_n^+ \cap [0,t])$, где $mesA$ – мера Лебега множества A.

Преобразуем $K_S(t)$ следующим образом:

$$K_S(t) = M\int_0^{\infty} J_{\widehat{\varphi}_S(Q_1^+ \cap [0,t], Q_2^+ \cap [0,t], Q_3^+ \cap [0,t],\dots, Q_n^+ \cap [0,t])}(y)dy.$$

Учитывая смысл индикатора событий и то, что если из $y>t$ следует $y \notin Q_i^+ \cap [0,t]$, то

$$K_s(t)=\int_0^{\infty} P\{y \in \widehat{\varphi}_S(Q_1^+ \cap [0,t], Q_2^+ \cap [0,t], Q_3^+ \cap [0,t],\dots,Q_n^+ \cap [0,t])\}dy = \int_0^t h_s(P_1(y),P_2(y),\dots,P_n(y))dy. \quad (11)$$

Напомним, что по смыслу $P_i(t)=P(\rho_t=1)$ – вероятность безаварийного функционирования i-го элемента в момент времени t. Таким образом, соотношение (11) позволяет свести вычисление $K_S(t)$ к расчету $P_i(t)=P(\rho_t=1)$ для отдельных элементов. Пусть наработка до аварии ρ_i i-го элемента есть случайная величина. После аварии элемент восстанавливается в течение времени δ_i, также случайного. Предполагается, что восстановление полное, т.е. время исправного функционирования элемента после восстановления, равно как и время, после второго и следующих восстановлений, независимы и имеют одно и то же распределение, такое же, как и случайные величины ρ_i, δ_i. Совместное распределение случайных величин ρ_i, δ_i обозначим $F_i(A,B)=P(\rho_i \in A, \delta_i \in B)$; в случае независимости этих величин $F_i(A,B)=P(\delta_i \in B)P(\rho_i \in A)=F_{\rho_i}(A)G_{\delta_i}(B)$.

При вычислении вероятности безаварийного функционирования i-го элемента используем формулу полной вероятности, в соответствии с которой имеем

$$P_i(t)=P(t \in Q_i^+)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P(t \in Q_i^+ | \rho_{i1}=x, \delta_{i1}=y)dF_{\rho_i}(x)dG_{\delta_i}(y),$$

где ρ_{i1} и δ_{i1} – случайные времена до первой аварии и до первого восстановления элемента соответственно. Поскольку процесс функционирования i-го элемента это альтернирующий процесс восстановления, то время его функционирования покрывается непересекающимися циклами регенерации длительности $\rho_i + \delta_i = \tau_i(\rho_i, \delta_i)$. Возможны два варианта развития процесса функционирования: $\tau_i(\rho_i, \delta_i) > t$ и $\tau_i(\rho_i, \delta_i) \le t$. Тогда вероятность безаварийного функционирования i-го элемента $P_i(t)$ будем вычислять так

$$P_i(t) = \iint\limits_{\tau_i(x,y)\le t} P\left(t \in Q_i^+ \Big|_{\rho_{i1}=x,\delta_{i1}=y}\right) dF_{\rho_i}(x) dG_{\delta_i}(y) + \iint\limits_{\tau_i(x,y)> t} P\left(t \in Q_i^+ \Big|_{\rho_{i1}=x,\delta_{i1}=y}\right) dF_{\rho_i}(x) dG_{\delta_i}(y) = I_1 + I_2.$$

Условие $\tau_i(\rho_i, \delta_i) > t$ означает, что момент регенерации i–го элемента наступил после момента времени t, а, следовательно, условие $t \in Q_i^+$ эквивалентно условию $t \in [0, \rho_{i1}]$ и

$$I_2 = \iint\limits_{x+y>t} P\left(t \in [0, \rho_{i1}] \Big|_{\rho_{i1}=x,\delta_{i1}=y}\right) dF_{\rho_i}(x) dG_{\delta_i}(y) = \iint\limits_{x+y>t} \left(J_{t\in[0,x]}\right) dF_{\rho_i}(x) dG_{\delta_i}(y) = 1 - F_{\rho_i}(t).$$

При рассмотрении варианта $\rho_i + \delta_i \le t$ следует учитывать то, что момент времени $\rho_{i1} + \delta_{i1}$ является моментом первой регенерации элемента, т.е. в этот момент времени исправность элемента полностью восстановлена, а затем элемент продолжил функционирование и исправно проработал еще время $t - \delta_{i1} - \rho_{i1}$. Учитывая указанное соображение, переписываем I_1 в виде:

$$I_1 = \iint\limits_{\tau_i(x,y)\le t} P\left(t \in [0, \rho_{i1}] \Big|_{\rho_{i1}=x,\delta_{i1}=y}\right) dF_{\rho_i}(x) dG_{\delta_i}(y) = \iint\limits_{\tau_i(x,y)\le t} P_i(t - x - y) dF_{\rho_i}(x) dG_{\delta_i}(y) = \int_0^t P_i(t-z) dF_{\tau_i}(z).$$

Суммируя I_1 и I_2, получаем интегральное уравнение в свертках

$$P_i(t) = g_i(t) + \int_0^t P_i(t-z) dF_{\tau_i}(z), \tag{12}$$

где $g_i(t) = \overline{F}_{\rho_i}(t)$, $F_{\tau_i}(t) = P(\rho_i + \delta_i \le t)$.

В терминах преобразование Лапласа–Стилтьеса решение (12) имеет вид:

$$\widetilde{P}_i(s) = \widetilde{g}_i(s) + \widetilde{P}_i(s)\widetilde{F}_{\tau_i}(s), \text{ или } \widetilde{P}_i(s) = \frac{\widetilde{g}_i(s)}{1 - \widetilde{F}_\tau(s)} = \frac{1 - Me^{-s\rho_i}}{1 - Me^{-s(\rho_i + \delta_i)}}.$$

Как указывалось выше, обратить полученное решение в общем виде не представляется возможным, поэтому здесь запишем лишь его асимптотическое значение при $s \to 0$. Тогда $P_i = \lim\limits_{s\to 0} \widetilde{P}_i(s) = \dfrac{M\rho_i}{M\rho_i + M\delta_i} = K_{гi}$. Таким образом, асимптотическое соотношение $P_i(t)$ совпадает с коэффициентом готовности i-го элемента $K_{гi}$, а, следовательно, асимптотическое соотношение для вероятности нахождения сети в состоянии аварии будем вычислять как $P_a \cong 1 - h(K_{г1}, K_{г2}, ..., K_{гN})$.

Приведем соотношения для вероятности нахождения сети в состоянии аварии широко распространенных топологий ЛВС: звезда, кольцо, общая шина. Так, сеть с топологией «общая шина» переходит в состояние аварии, как только в это состояние перешел хотя бы один из клиентов. Структурная схема сети в этом случае есть последовательное соединение клиентов и сервера и вероятность аварии будет определяться соотношением $P_a = 1 - K_г^S \prod_{i=1}^{N} K_г^{K_i}$. Переход в состояние аварии сети с топологией «кольцо» происходит тогда, когда в такое состояние перешел хотя бы один из клиентов, либо порт, которым осуществляется подключение выше, либо сервер. Вероятность аварии для этой топологии запишем так: $P_a = 1 - K_г^S K_г^P \prod_{i=1}^{N} K_г^{K_i}$. Поскольку сеть с топологией «звезда» переходит в состояние аварии, если произошла потеря данных хотя бы на одном из клиентов или портов концентратора или на сервере, то вероятность аварии будет равна $P_a = 1 - K_г^S \prod_{i=1}^{N+1} K_г^{P_i} \prod_{i=1}^{N} K_г^{K_i}$, где N – число клиентов в сети, $K_г^{K_i}$ – коэффициент готовности i-го клиента, $K_ã^{P_i}$ – коэффициент готовности i-го порта концентратора, $K_г^S$ – коэффициент готовности сервера.

Таким образом, выше приведена математическая модель надежности и получены выражения для вычисления вероятности потери данных (аварии) и среднего времени до первой аварии произвольной сети с восстанавливаемыми элементами. Однако при этом не учтена возможность потери данных из-за исчезновения питания сети. Исчезновение электропитания сети приводит к так называемым *множественным отказам* или *отказам по общей причине*.

Для учета отказов элемента сети по общей причине введем следующие обозначения. Пусть случайная величина ζ – наработка до отказа, а случайная величина ν – время восстановления системы энергоснабжения. Случайные величины ζ и ν – взаимно независимые величины с функциями распределения $F_\zeta(t) = P(\zeta \le t)$ и $F_\nu(t) = P(\nu \le t)$. Пусть δ – случайная наработка до отказа резервной системы энергоснабжения с функцией распределения $F_\delta(t) = P(\delta \le t)$. Исправное функционирование системы энергоснабжения является критичным для безаварийного функционирования сети, поэтому будем считать, что в случае отказа основной системы энергоснабжения подача электричества может осуществляться с помощью резервной системы. За время работы резервной системы должна быть восстановлена основная система энергоснабжения, иначе произойдет авария сети. Считаем, что резервная система способна поддерживать функционирование клиента только в течение ограниченного времени. Очевидно, если восстановление основной системы энергоснабжения не закончится до отказа резервной системы, то клиент будет обесточен, т.е. произойдет авария клиента. В то же время будем считать, что если основная система энергоснабжения будет восстановлена до отказа резервной, то резервная система мгновенно вернется к своему исходному состоянию.

Авария элемента сети, таким образом, может произойти либо по внутренним причинам, либо вследствие потери питания. Введем обозначения ρ – время до аварии элемента по внутренним причинам, β – время до аварии элемента вследствие потери питания и α – время до первой аварии элемента. Поскольку время до аварии это минимум из времени до аварии по внутренним причинам и времени до аварии вследствие потери питания, то очевидно, что $\alpha = \rho J_{\beta > \rho} + \beta J_{\beta \le \rho} = \rho \wedge \beta$. Тогда для функции распределения времени до первой аварии элемента сети будем определять следующим соотношением:

$$F_\alpha(t) = P(\alpha \le t) = F_\rho(t) + F_\beta(t) - F_\rho(t) F_\beta(t). \tag{13}$$

Среднее время до первой аварии соответственно можно записать:

$$M\alpha = M\rho + M\beta - \int_0^\infty (1 - F_\rho(t)F_\beta(t))dt. \tag{14}$$

Найдем теперь распределение времени до аварии элемента сети из-за отказа системы энергоснабжения. Нетрудно заметить, что распределение времени до аварии вследствие обесточивания определяется так

$$P\{\beta \le t\} = P\left\{\sum_{k=1}^{\pi-1} (\zeta_k + \nu_k) + (\zeta_\nu + \delta_\nu) \le t\right\},$$

где π – номер цикла регенерации процесса функционирования системы энергоснабжения, на котором произошла авария элемента сети.

Учитывая, что процесс функционирования элемента это регенерирующий процесс, то легко определить, что $P\{\pi = n\} = q_{эл} p_{эл}^{n-1}$ – вероятность того, что авария произошла на n–м цикле регенерации, где $q_{эл}$ – вероятность аварии на цикле регенерации, $p_{эл} = 1 - q_{эл}$. Тогда $P\{\beta \le t\}$ следует вычислять по формуле полной вероятности

$$F_\beta(t) = q_{эл} \sum_{n=1}^\infty (F_\zeta^{*(n)} * F_\nu^{*(n-1)} * F_\delta)(t)(1 - q_{эл})^{n-1}.$$

Для вычисления $P\{\beta \le t\}$ функции распределения времени до наступления первой аварии системы энергоснабжения опять будем использовать преобразование Лапласа-Стилтьеса и ее запишем в следующем виде:

$$\widetilde{F}_\beta(s) = q_{эл} \sum_{n=1}^\infty (\widetilde{F}_\zeta(s))^n (\widetilde{F}_\nu(s))^{n-1} \widetilde{F}_\delta(s)(1 - q_{эл})^{n-1},$$

где $\widetilde{F}_\zeta(s)$, $\widetilde{F}_\nu(s)$ и $\widetilde{F}_\delta(s)$ – преобразования Лапласа-Стилтьеса соответствующих функций распределения. Математическое ожидание времени до наступления первой аварии элемента сети вследствие обесточивания можно записать в виде:

$$M\beta = M\zeta + M\delta + \frac{1 - q_{эл}}{q_{эл}}(M\zeta + M\nu). \tag{15}$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$\widetilde{F}_\beta(s) = \frac{q_{эл}\widetilde{F}_\zeta(s)\widetilde{F}_\delta(s)}{1 - (1 - q_{эл})\widetilde{F}_\zeta(s)\widetilde{F}_\nu(s)}. \tag{16}$$

Таким образом, удалось получить преобразование Лапласа-Стилтьеса функции распределения времени до наступления первой аварии элемента сети вследствие обесточивания. Для использования соотношения математического ожидания времени до наступления первой аварии необходимо вычислить вероятность аварии элемента сети $q_{эл}$ на цикле регенерации процесса функционирования системы энергоснабжения из-за отказа системы энергоснабжения. Очевидно, что условие аварии для n–го цикла можно представить в виде $\nu \geq \delta$. Тогда для $q_{эл}$ запишем следующее выражение

$$q_{эл} = P(\nu \geq \delta) = \int_0^\infty P(\delta \leq t) dF_\nu(t) = \int_0^\infty F_\delta(t) dF_\nu(t) = MF_\delta(\nu).$$

Функцию распределения времени до первой аварии клиента можно найти, записав обратное преобразование для (2) и (16) и подставив соответствующие функции распределения в (13). Функцию распределения времени до первой аварии порта находим, записывая обратное преобразование для (5) и (16) и подставив соответствующие функции распределения в соотношение (13). Функцию распределения времени до первой аварии сервера найдем, записав обратное преобразование для (9) и (16) и подставив соответствующие функции распределения в (13). Среднее время до первой аварии клиента находим из соотношений (3), (9) и (15), порта – (5), (10) и (15), а сервера – (7), (10) и (15). Затем, используя функцию надежности сети, записываем формулы для вычисления вероятностей аварии сети на основе вероятностей состояний отдельных элементов.

Заключение

Таким образом, разработана математическая модель надежности ЛВС произвольной структуры с восстанавливаемыми элементами. Получены выражения для расчета вероятности аварии сети при самых общих предположениях о законах распределения случайных величин. Получены соотношения для нахождения показателей надежности вероятности потери данных в ЛВС и асимптотические соотношения, среднего времени до первой аварии элементов сети. Используя эти соотношения, можно вычислить вероятность нахождения в состоянии аварии сети с произвольной топологией из-за множественных отказов элементов.

Литература

1. **Богатырев В.А.** Надежность и эффективность резервированных компьютерных сетей //Информационные технологии. – 2006. – №9.

2. **Перегуда А.И., Твердохлебов Р.Е.** Математическая модель надежности локальной вычислительной сети клиент-серверной архитектуры с произвольной структурой //Информационные технологии. – 2007. – №1.

3. **Перегуда А.И., Тимашев Д.А.** Математическая модель надежности локальной вычислительной сети// Информационные технологии. – 2008. – №10. – С.7-15

4. **Островский Е.И., Перегуда А.И.** Оптимальный периодический контроль с восстановлением// Известие АН СССР – №3. – С.198 – 201

5. **Перегуда А.И., Тимашев Д.А.** Математическая модель функционирования автоматизированного технологического комплекса “объект защиты-система безопасности” с восстанавливаемыми элементами и периодическим контролем системы безопасности//Известие вузов. Ядерная энергетика – 2007. – №3 – С.101-109.

6. **Байхельт Ф., Франкен П.** Надежность и техническое обслуживание, Математический подход: Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.