 Оригинальная статья
https://doi.org/10.21683/1729-2646-2020-20-1-12-20

План испытаний с добавлением. Эффективные оценки показателей надежности

Виктор С. Михайлов, *Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева», Российская Федерация, Москва*
Mvs1956@list.ru

Виктор С. Михайлов

Резюме. Цель *работы – повышение эффективности оценок показателей надежности для плана испытаний с добавлением: вероятности безотказной работы и средней наработки до отказа. Исходя из экономических соображений, для определительных испытаний на надежность высоконадежных, дорогостоящих изделий выставляют минимум изделий, планируя получить безотказные испытания или испытания с одним отказом, тем самым минимизируя количество испытуемых изделий. Наиболее интересен последний случай. Выбирая конкретные величины приемочного числа Q и количества испытуемых изделий, испытатель делает предварительную оценку показателя надежности, а выбирая Q = 1, испытатель минимизирует риски от возникновения маловероятного случайного отказа. Однако с ростом величины Q растет и количество испытуемых изделий, что делает испытания дорогостоящими. Поэтому сокращение количества изделий при испытаниях на надежность является проблемой номер один и, в связи с этим, потребность в экономичном плане испытаний с добавлением возрастает. Будем рассматривать биномиальные испытания (первоначальная выборка) с добавлением одного изделия (дополнительная выборка) на испытания при отказе любого из первоначально выставленных испытуемых изделий. Испытания заканчиваются, когда заканчиваются испытания всех выставленных изделий с любым исходом (в первичной и дополнительной выборках). Здесь и далее имеется в виду, что время испытаний одно и то же для всех изделий. Испытания с приемочным числом отказов больше нуля (Q > 0), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.* **Методы.** *В основе поиска эффективных оценок лежит интегральный подход сформулированный во многих работах. В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(\tau;n;k,m)$, заданного на сумме значений абсолютных (или относительных) смещений оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$, выбранных из некоторого множества, от параметра закона распределения, где n – количество изделий, первоначально выставленных на испытания. Критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(\tau;n;k,m)$, основан на суммарном квадрате абсолютных (или относительных) смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(\tau;n;k,m)$ от вероятности отказа p для всех возможных значений p, n.* **Выводы.** *Проведено исследование оценок вероятности безотказной работы для плана испытаний с добавлением. Для варианта n > 3 оценки $\hat{P}=1-\hat{p}=1-\frac{r}{n+k}$ и составная оценка $1-\overline{p}(\tilde{v}(\beta=0,5))$ являются более эффективными в сравнении с оценкой $1-\tilde{v}(\beta=0,5)$. Составную оценку вероятности безотказной работы $1-\overline{p}(\tilde{v}(\beta=0,5))$ следует использовать для безотказных испытаний. Для варианта n > 3 испытания с приемочным числом отказов больше нуля (Q > 0), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке. Составная оценка средней наработки до отказа $\hat{T}_1=\frac{\tau}{-\ln(1-\overline{p}(k,m,n,\beta=0,6))}$ является эффективной по смещению среди предложенных оценок средней наработки до отказа. Полученные составные оценки $\overline{p}$ и $\hat{T}_1$ имеют направленность практического применения для безотказных испытаний, проводимых по плану испытаний с добавлением*.

Ключевые слова*: схема Бернулли, план испытаний, точечная оценка, вероятность безотказной работы, эффективная оценка, средняя наработка до отказа.*

Для цитирования: *Михайлов В.С. План испытаний с добавлением. Эффективные оценки показателей надежности // Надежность. 2020. №1. С. 12-19. https://doi.org/10.21683/1729-2646-2020-20-1-12-19*

Поступила 09.09.2019 г. / **После доработки** 14.12.2020 г. / **К печати** 20.03.2020 г.

Введение

Исходя из экономических соображений, для определительных испытаний на надежность высоконадежных, дорогостоящих изделий выставляют минимум изделий, планируя получить безотказные испытания (приемочное число $Q = 0$) или испытания с одним отказом ($Q = 1$), тем самым минимизируя количество испытуемых изделий. Наиболее интересен последний случай. Выбирая конкретные величины приемочного числа Q и количества испытуемых изделий, испытатель делает предварительную оценку показателя надежности, а выбирая $Q = 1$, испытатель минимизирует риски от возникновения маловероятного случайного отказа. Однако, с ростом величины Q растет и количество испытуемых изделий, что делает испытания дорогостоящими. Поэтому сокращение количества изделий при испытаниях на надежность является проблемой номер один и, в связи с этим, потребность в экономичном плане испытаний с добавлением возрастает [1].

Формулировка плана испытаний с добавлением

Будем рассматривать биномиальные испытания (первоначальная выборка) [1, 2] с добавлением одного изделия (дополнительная выборка) на испытания при отказе любого из первоначально выставленных испытуемых изделий. Испытания заканчиваются, когда заканчиваются испытания всех выставленных изделий с любым исходом (в первичной и дополнительной выборках). Здесь и далее имеется в виду, что время испытаний одно и то же для всех изделий.

Испытания с приемочным числом отказов больше нуля ($Q > 0$), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

Цель работы

Целью работы является повышение эффективности оценок показателей надежности для плана испытаний с добавлением: вероятности безотказной работы (далее – ВБР), средней наработки до отказа (далее – СНДО).

Свойства оценок вероятности безотказной работы для плана испытаний с добавлением

Пусть n – число испытуемых однотипных изделий, первоначально выставленных на испытания, а $R=r$ – число отказавших изделий, включающее k отказов из n первоначально выставленных на испытания изделий и m отказов из k вторично выставленных на испытания изделий, т.е. $r=k+m$. Тогда число испытуемых изделий составит $N=n+k$. Для удобства написания формул в некоторых случаях (там, где это возможно) обозначения случайных величин и их реализаций будут совпадать. Пусть отказы являются независимыми событиями, тогда вероятность возникновения ровно r отказов за испытания (далее – $P_n(R=r)$) выразится формулой, которая получается из следующей процедуры ($n \geq k \geq m; r = k + m \leq 2n$):

$$P_k(m) := C_k^m p^m q^{k-m};$$

$$P_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k} \sum_{m=0}^{k} P_k(m) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q=1–p$, p – вероятность отказа, C_n^k – число сочетаний k из n элементов.

$$P_n(k,m) := P_n(k) P_k(m) = C_n^k C_k^m p^{k+m} q^{n-m},$$

$$P_n(R=r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m: m+k=r,\, m \leq k} P_n(k,m),$$

$$r = k+m = 0,1,2,\ldots,2n;\ k = 0,1,2,\ldots,n;$$
$$m : m+k = r, m \leq k.$$

Из определения вероятности $P_n(k=x, m=y) = P_n(k=x) P_n(m=y)$, где $x, y = 0,1,2,\ldots,n$ и $P_n(R=r)$ легко получить вероятностную функцию плана испытаний с добавлением:

$$P_{n\sum}\left(k \leq x, m \leq y\right) = \sum_{k=0}^{x} \sum_{m: m+k \leq x+y,\, m \leq k,\, m \leq y} P_n\left(k,m\right). \quad (1)$$

Среднее число испытуемых изделий за время испытаний с добавлением состоит из количества первоначально выставленных на испытания изделий и среднего числа отказавших из первоначально выставленных на испытания изделий, т.е. $N=n+np$. Тогда среднее число за время испытаний с добавлением составит $E(R,n)=Np=E(k,n)+E(m,n)=np+np*p=(n+np)p=n(p+p^2)$.

Оценка ВБР $\hat{p} = \dfrac{r}{n+k}$ является эффективной для плана испытаний с добавлением [1]. Изучим свойства полученной оценки $\hat{p} = \dfrac{r}{n+k}$ и, как следствие, оценки ВБР $\hat{P} = 1 - \hat{p} = 1 - \dfrac{r}{n+k} = \dfrac{n-m}{n+k}$ [1].

Пусть $k+m=r>1$, $\hat{p} = \dfrac{r}{n+k} = \dfrac{r}{n+r-m}$, тогда для различных $m_1>m_2$ выполняется неравенство

$$\hat{p}\left(k_1+m_1=r; k_1, m_1\right) = \frac{r}{n+r-m_1} >$$
$$> \hat{p}\left(k_2+m_2=r; k_2, m_2\right) = \frac{r}{n+r-m_2}. \quad (2)$$

Т.е. надежность контролируемой партии изделий по результатам испытаний выборки, в которой количество отказавших из первоначально выставленных испытуемых изделий больше, чем в выборке сравниваемой партии изделий при одном и том же количестве отказов, всегда будет выше, чем у этой сравниваемой партии изделий. Т.е. при сравнении результатов двух окончательно сформированных выборок (при равенстве в количестве отказов) приоритет в надежности отдается тем изделиям, чьи отказы в основном произошли в первоначально выставленной выборке, а не в дополнительной. И, в этом смысле, дополнительная выборка дает шанс на реабилитацию при неудачных первичных испытаниях. И в этом преимущество плана испытаний с добавлением.

Несмещенные оценки

Математическое ожидание оценки $\hat{p}(n;k,m)=\dfrac{r}{n+k}$ выразится формулой [1]:

$$E\left(\hat{p}\left(n;k,m\right)\right)=\sum_{r=0}^{2*n}\frac{r}{n+k}P_n(r).$$

Оценка $\hat{p}(n;k,m)=\dfrac{r}{n+k}$ – в общем виде смещенная $E\left(\hat{p}\left(n;k,m\right)\right)\neq p$ [1].

Приравнивая математическое ожидание оценки $\hat{p}(n=1)$ параметру p легко получить несмещенную оценку вероятности отказа $\hat{p}_1$ для случая n=1 [1]:

$$\hat{p}_1=\begin{cases}0, r=0\\ 1, r>0\end{cases}=\begin{cases}0,\ r=0, k=0, m=0;\\ 1,\ r=1, k=1, m=0;\\ 1,\ r=2, k=1, m=1.\end{cases}$$

Несмещенная оценка представляет из себя индикаторную функцию, т.е. в случае появления отказов оценка $\hat{p}_1$ становится равной единице, в противном случае – нулю. Вариант, когда n = 1, для практики не интересен, т.к. совпадает с биномиальным планом, и, поэтому, в настоящей работе, далее рассматриваться не будет.

Математическое ожидание оценки $\hat{p}(n=2)=\dfrac{r}{2+k}$:

$$n=2: E\left(\hat{p}\right)=\sum_{r=0}^{4}\hat{p}(r)P\left(n=2, R=r\right).$$

Несмещенная оценка для параметра p в случае n = 2 выразится формулой [1]:

$$\hat{p}_2(k,m)\equiv\begin{cases}p_{00}=0, r=0, k=0, m=0;\\ p_{10}=1/2, r=1, k=1, m=0;\\ p_{11}=5/8, r=2, k=1, m=1;\\ p_{20}=6/8, r=2, k=2, m=0;\\ p_{21}=7/8, r=3, k=2, m=1;\\ p_{22}=1, r=4, k=2, m=2.\end{cases}$$

Эта оценка не единственная. Второй вариант оценки параметра p для случая n = 2 [1]:

$$\hat{w}_2\left(r\right): \hat{w}_2\left(0\right)=0;\ \hat{w}_2(1)=\frac{1}{2};$$
$$\hat{w}_2(2)=\frac{2}{3};\ \hat{w}_2(3)=\frac{5}{6};\ \hat{w}_2(4)=1.$$

Несмещенная оценка вероятности отказа для случая n=3 ($\hat{w}_3(r)$) [1]:

$$\hat{w}_3\left(r\right): \hat{w}_3\left(0\right)=0;\ \hat{w}_3\left(1\right)=\frac{1}{3};\ \hat{w}_3\left(2\right)=\frac{1}{2};\ \hat{w}_3\left(3\right)=\frac{9}{14};$$
$$\hat{w}_3\left(4\right)=\frac{65}{84};\ \hat{w}_3\left(5\right)=\frac{75}{84};\ \hat{w}_3\left(6\right)=1.$$

Оценки $\hat{p}, \hat{p}_2, \hat{w}_2\left(r\right), \hat{w}_3\left(r\right)$ становятся бесполезными, когда необходимо оценить неизвестный параметр p величиной отличной от нуля и единицы.

Введем понятие центрируемой оценки [1, 7] (не путать с центральными оценками [4]), а именно: пусть оценка вероятности отказа (далее – $\hat{v}$) центрирует вероятностную функцию (в нашем случае – $P_{n\sum}(x,y)$ относительно предельных границ изменения ее значений. Это означает, что интервалы $[0;\hat{v}]$ и $[\hat{v};1]$ значений этих оценок с вероятностью равной 0,5 накрывают оцениваемый параметр p. Такие оценки будем называть центрируемыми. Заметим, что центрируемые оценки для некоторых планов испытаний близки к эффективным оценкам [7]. В нашем случае центрируемая оценка $\hat{v}(\beta=0,5)$ находится из выражения: $P_{n\sum}\left(x,y\right)=\beta=0,5$, где β уже не несет в себе смысл доверительной вероятности. Заметим также, что закон распределения статистики $\hat{v}$ определяется законом распределения случайной величины R, что позволяет определять доверительные границы.

Из определения центрируемой оценки следует, что она определяет нижнюю (верхнюю) доверительную границу (далее – НДГ (ВДГ)) интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью γ = 0,5 или уровнем значимости α = 0,5. С другой стороны, любую оценку НДГ (ВДГ) интервала неизвестного параметра p можно трактовать как точечную оценку параметра p с сильным смещением вниз (вверх). НДГ (далее – $\hat{p}_н$) (ВДГ (далее – $\hat{p}_в$)) интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью γ = 1 – α вычисляют по формулам (случай монотонного убывания [1]):

$$P_{n\sum}\left(x,y,\hat{p}_н\right)=\gamma,\ P_{n\sum}\left(x,y,\hat{p}_в\right)=\alpha. \qquad (3)$$

Заметим, что центрируемые оценки близки по своей эффективности к лучшим оценкам [7-9], и что, несмотря на оптимистическое определение центрируемой оценки $\hat{v}(\beta=0,5)$, эта оценка является смещенной относительно оцениваемого параметра $L\left(\hat{v}(n;r;\beta=0,5)\right)>0$. Однако это смещение можно уменьшить, а значит и улучшить эффективность [9]. Для этого достаточно минимизировать функционал $L\left(\tilde{v}(n;r)\right)$ варьируя величиной вероятности β=0,5+x в выражении $P_{n\sum}=0,5+x$, где x>0 – некоторое положительное вещественное число. Полученная таким образом оценка (далее – $\tilde{v}(\beta=0,5+x)$

) уже не является центрируемой, но имеет меньшее смещение в сравнении с центрируемой оценкой $\hat{v}(\beta = 0,5)$, а следовательно, от оценки $\tilde{v}(\beta = 0,5 + x)$ можно ожидать и большую эффективность.

Заметим, что функция $P_{n\sum}$ монотонно убывает с ростом p (доказано для случаев n<3) [1], а следовательно, уравнение

$$P_{n\sum} = \beta = 0,5 + x$$

имеет единственное решение. Заметим еще раз, что вероятность β уже не несет в себе смысл доверительной вероятности и не может организовать двусторонний доверительный интервал, т.к. его границы «перехлестывают» друг друга во встречных направлениях. Вероятность β является маркирующим параметром, который выделяет оценку среди множества подобных по методу построения β≥0,5.

Кроме того, доверительная граница (β≤0,5) представляет из себя точечную оценку с сильным смещением относительно оцениваемого параметра. С ростом доверительной вероятности β>0 двусторонний доверительный интервал вырождается сначала в точку, а потом перестает существовать. Односторонний доверительный интервал с ростом доверительной вероятности β>0,5 перестает считаться таковым, т.к. с большой вероятностью β>0,5 не накроет оцениваемый параметр. А множество оценок с маркирующим параметром $\tilde{v}(\beta = 0,5 + x)$ становится потенциальным носителем эффективной оценки.

Сформулируем критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР), построим на основе сформулированного критерия улучшенную (но смещенную) оценку вероятности отказа (и, следовательно, оценку ВБР) для плана испытаний с добавлением для $n > 3$ и выберем среди предложенных оценок эффективную.

Методы исследования оценок показателей надежности

В основе поиска эффективных оценок лежит интегральный подход сформулированный в работах [6–11]. В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n;k,m)$, заданного на сумме значений абсолютных (или относительных) смещений оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$, выбранных из некоторого множества, от параметра закона распределения, где n – количество изделий, первоначально выставленных на испытания.

Критерий выбора эффективной оценки для ВБР

Критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$, основан на суммарном квадрате абсолютных (или относительных) смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(n;k,m)$ от вероятности отказа p для всех возможных значений p, n.

Пусть τ – время испытания одного изделия, тогда для выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) потребуется только понятие абсолютно эффективной оценки по смещению и изменение параметра p в пределах 0≤p≤1. Поэтому для простоты, в качестве критерия получения эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n;k,m)$ строится функционал (далее – $L(\hat{\theta}(n;k,m))$) на ограниченном множестве 1≤n≤I [7-9]:

$$L\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right) = \frac{1}{I}\sum_{n=1}^{I}\int_0^1 \left\{E\hat{\theta}(n;k,m) - p\right\}^2 \partial p. \quad (4)$$

Оценка $\hat{\theta}_0(n;k,m)$ минимизирующая функционал $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ на заданном множестве оценок называется эффективной оценкой по смещению на заданном множестве смещенных оценок. Среди оценок, доставляющих примерно один и тот же минимум функционалу $L(\hat{\theta}(n;k,m))$, следует выбрать оценку, которая имеет минимальное уклонение в среднеквадратическом смысле (классическое определение эффективной несмещенной оценки [2]). Данную оценку будем называть как более эффективную в сравнении с выбранными.

Для выбора оценок, обладающих минимальным уклонением, строится функционал (далее – $D(\hat{\theta}_0(n;k,m))$ основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}_0(n;k,m)$ от параметра p для всех возможных значений p, n [7 – 9]:

$$D\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right) = \frac{1}{I}\sum_{n=1}^{I}\int_0^1 E\left\{\hat{\theta}(n;k,m) - p\right\}^2 \partial p. \quad (5)$$

Оценку, которая доставляет нуль функционалу $L(\hat{\theta}_0(n;k,m))$=0 (несмещенная оценка) и минимум функционалу $D(\hat{\theta}_0(n;k,m))$, будем называть абсолютно эффективной по смещению.

Ограничим объем испытаний 4≤n≤10, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула (4) примет вид:

$$L\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right) = \frac{1}{7}\sum_{n=4}^{10}\int_0^1 \left\{E\hat{\theta}(n;k,m) - p\right\}^2 \partial p.$$

А формула (5) примет вид:

$$D\left(\hat{\theta}(n;k,m)\right) = \frac{1}{7}\sum_{n=4}^{10}\int_0^1 E\left\{\hat{\theta}(n;k,m) - p\right\}^2 \partial p.$$

Проведенные расчеты показали, что оценке $\hat{v}(\beta = 0,5 + x)$, минимизирующей функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$, соответствует β=0,5+x=0,5, т.е. x = 0 и следовательно $\hat{v}(\beta = 0,5) = \tilde{v}(\beta = 0,5 + x)$.

В таблице 1 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$, в соответствии с формулами (1) и (2), следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\tilde{v}, \hat{p}, \overline{p}$ [1], где

$$\overline{p} = \begin{cases} \tilde{v}\left(0, n, \beta = 0,5\right), r = 0; \\ \dfrac{r}{n+k}, \; r > 0. \end{cases}$$

Вычисления функционалов $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$ проводилось с шагом $\partial p = 10^{-3}$. А вычисления неявно заданных оценок $\tilde{\nu}$ и $\overline{p}$ проводилось с точностью 10^{-4}. Объем испытаний ограничивался интервалом $4 \leq n \leq 10$.

Таблица 1 – Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$

Вид функционала	$\tilde{\nu}(\beta=0,5)$ $4 \leq n \leq 10$	$\hat{p} = \dfrac{r}{n+k}$ $4 \leq n \leq 10$	$\overline{p}(\tilde{\nu}(\beta=0,5))$ $4 \leq n \leq 10$
$L(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,00229	0,000219	0,000805
$D(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,0205	0,0186	0,0164

Из таблицы 1 следует, что для объема испытаний $4 \leq n \leq 10$ преобладают оценки $\hat{p}$ и составная оценка $\overline{p}(\tilde{\nu}(\beta=0,5))$, приобретая минимальные смещения.

Из таблицы 1 так же следует, что оценка $\hat{p}$ и составные оценки $\overline{p}$ примерно равносильны по уклонению своих значений от параметра p и незначительно превосходят в этом качестве оценку $\tilde{\nu}$. Поэтому оценку $\hat{p}$ можно принять в качестве искомой оценки эффективной по смещению среди предложенных, когда объем испытаний $n>3$. Однако когда необходимо оценить неизвестный параметр p величиной отличной от нуля и единицы, следует использовать оценку $\overline{p}$.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом суммирования ($\partial p = 10^{-3}$) приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Пример 1. Изделия входят в состав агрегата и применяются по схеме с резервированием. Требуется сделать точечную оценку ВБР изделий по результатам биномиальных испытаний на надежность этих изделий. При планировании определительных испытаний на надежность испытатель при расчете объема выборки ($N=n+k=5$) учел один отказ ($Q=k=1$), минимизируя риски от возникновения этого маловероятного случайного отказа.

Для расчетов прогнозируемого значения ВБР использована эффективная по смещению составная оценка [9]:

$$\dot{P} = \begin{cases} 1 - \tilde{b}\left(0, N, \beta = 0,86\right), R = 0; \\ 1 - \dfrac{R}{N},\ R > 0, \end{cases}$$

где $\tilde{b}\left(0, N, \beta = 0,86\right)$ – неявно заданная оценка биномиального плана испытаний [9]. При этом прогнозируемое значение ВБР составило $\dot{P}(r=1) = 1 - \dfrac{r}{N} = \dfrac{4}{5} = 0,8$, что соответствует требованиям технического задания (ТЗ) (ВБР *должна быть не менее* 0,8) на изделия. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек. В процессе испытаний допустимы два исхода: безотказные испытания и испытания с одним отказом (планируемые). В случае безотказных испытаний отпадает необходимость в испытаниях дополнительной выборки. Результаты расчета вариантов оценок ВБР приведены в таблицах 2 и 3.

Заметим, что в случае проведения биномиальных испытаний по сокращенной выборке $N=n=4$, $Q=0$ и когда при этом возникнет один отказ $r=1$, то по правилам потребуется проведение повторных испытаний по тем же правилам, т.к. $\dot{P} = 1 - \dfrac{r}{N} = \dfrac{3}{4} = 0,75 < 0,8$ [3]. Причем в повторном биномиальном испытании отказы не допускаются. Для проведения безотказных биномиальных испытаний при приемочном числе отказов $Q=1$

Таблица 2 – Результаты безотказных испытаний примера 1.

ВБР (безотказные испытания с добавлением) $r=0$, $n=4$, $N=n+k=4+0=4$, $Q=1$			ВБР (биномиальные испытания) $r=0$, $N=n=4$, $Q=0$ $\dot{P} = 1 - \tilde{b}(0, N, \beta = 0,86)$
$1-\tilde{\nu}$ β=0,5 [1]	$1-\hat{p} = 1 - \dfrac{r}{n+k}$	$1-\overline{p}\left(\tilde{\nu}\right)$ β=0,5	
0,871	1	0,871	0,963

Таблица 3 – Результаты испытаний с одним отказом примера 1.

ВБР (безотказные испытания с добавлением) $r=1$, $n=4$, $N=n+k=5$, $Q=1$			ВБР (биномиальные испытания) $r=1$, $N=n=5$, $Q=1$ $\dot{P} = 1 - \dfrac{r}{N}$
$1-\tilde{\nu}$ β=0,5	$1-\hat{p}$	$1-\overline{p}\left(\tilde{\nu}\right)$ β=0,5	
0,687	0,8	0,8	0,8

потребуется выборка объема N=5, что больше первичной выборки испытаний с добавлением N=4.

В этом и есть преимущество испытаний с добавлением, которые позволяют сделать вывод о соответствии ТЗ по результатам только одних испытаний с различными исходами: $N=n+k=4$, $r=0$ и $N=n+k=5$, $r=1$ (без проведения повторных испытаний в том же объеме $N=n+k=4$, $r=0$ как в случае биномиальных испытаний, где допустим один исход $Q=0$).

Пример 2. В рамках примера 1 испытатель при расчете объема выборки (N=4) учел один отказ ($Q=k=1$). При этом прогнозируемое значение ВБР составило $\dot{P}=1-\frac{r}{N}=\frac{3}{4}=0,75$, что соответствует требованиям ТЗ (ВБР *должна быть не менее* 0,75) на изделия. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек. Результаты расчета вариантов оценок ВБР приведены в таблицах 4 и 5.

Критерий выбора эффективной оценки для средней наработки до отказа

Будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей (далее – з.р.) с параметром T_0, где последний совпадает со средней наработкой до отказа (далее – СНДО). Тогда расчетное значение ВБР одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством:

$$P_0(\tau)=e^{\left(-\frac{\tau}{T_0}\right)}.$$

В качестве критерия получения эффективной оценки СНДО строится функционал (далее – $V(\hat{\theta})$), основанный на суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\hat{\theta}(k,m,n,\tau)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных значений t, n [6]:

$$V\left(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^2\{E\hat{\theta}(k,m,n,\tau=10^i)-t\}^2\partial t. \quad (3)$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра (СНДО) $t\in[0;\infty]$.

Рассмотрим функционал (далее – $H(\hat{\theta})$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(k,m,n)$ от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных значений t, n [6]:

$$H\left(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{5}\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^2 E\{\hat{\theta}(k,m,n,\tau=10^i)-t\}^2\partial t. \quad (4)$$

Задачей функционалов $H\left(\hat{\theta}(k,m,n,\tau)\right)$ является определение степени разброса значений предложенных оценок.

Оценка, минимизирующая предлагаемые функционалы, является эффективной среди предложенных оценок СНДО.

Выбор эффективной оценки СНДО

Определим оценку СНДО ($\hat{T}_2$) для плана испытаний с добавлением как:

$$\hat{T}_2=\frac{S(k,m,\tau,s_i,n)}{R},$$

где s_i – моменты отказов, $i=1,2,\ldots,R>0$, S – суммарная наработка. Доопределим оценку $\hat{T}_2$ при $R=0$ величиной $\hat{T}_2=S(k,m,\tau,n)$.

Другой вариант. Чтобы уйти от деления на ноль для оценки СНДО $\hat{T}_2$ представим ее в виде:

$$\hat{T}_3=\frac{S(k,m,\tau,s_i,n)}{R+1}.$$

Таблица 4 – Результаты безотказных испытаний примера 2.

ВБР (безотказные испытания с добавлением) $r=0$, $k=0$, $n=3$, $N=n+k=3+0=3$, $Q=1$				ВБР (биномиальные испытания) $r=0$, $N=n=3$, $Q=0$ $\dot{P}=1-\tilde{b}(0,N,\beta=0,86)$
$1-\tilde{v}$, β=0,5	$1-\hat{p}=1-\frac{r}{n+k}$	$1-\hat{w}_3(0)$	$1-\overline{p}(\tilde{v})$, β=0,5	
0,841	1	1	0,841	0,951

Таблица 5 – Результаты испытаний с одним отказом примера 2.

ВБР (безотказные испытания с добавлением) $r=1$, $k=1$, $n=3$, $N=n+k=4$, $Q=1$				ВБР (биномиальные испытания) $r=1$, $N=n=4$, $Q=1$ $\dot{P}=1-\frac{r}{N}$
$1-\tilde{v}$, β=0,5	$1-\hat{p}$	$1-\hat{w}_3(1)$	$1-\overline{p}(\tilde{v})$, β=0,5	
0,616	0,75	0,642	0,75	0,75

Будем рассматривать простой случай и сократим число переменных для оценок $\hat{T}_3$ и $\hat{T}_2$. Для этого будем предполагать, что разброс s_i происходит симметрично относительно τ/2. Это выполнимо для высоконадежных изделий $\frac{\tau}{T_0} < 0{,}1$ [3]. Поэтому $S(k,m,\tau,n)=(n-k)*\tau+(k+m)*\tau/2$.

Определим следующие оценки СНДО для плана испытаний с добавлением как:

$$\hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{v}(k,m,n,\beta=0{,}5))},$$

$$\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\overline{p}(k,m,n,\beta=0{,}6))}.$$

Таблица 6 – Результаты подстановки в функционалы $V(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$ и $H(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$ оценок СНДО: $\hat{T}_0$, $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$, $\hat{T}_3$

Вид функционала	$\hat{T}_0(\tilde{v})$ β=0,5	$\hat{T}_1(\overline{p})$ β=0,6	$\hat{T}_2=\frac{S}{R}$	$\hat{T}_3=\frac{S}{R+1}$
$V(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$	10,89	10,80	2363	1836
$H(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$	27,47	25,54	2373	1845

Вычисления функционалов $V(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$ и $H(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$ проводилось с шагом $\partial p = 10^{-3}$. А вычисления неявно заданных оценок $\tilde{v}$ и $\overline{p}$ проводилось с точностью 10^{-4}.

В таблице 6 приведены результаты подстановки в функционалы $V(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$ и $H(\hat{\theta}(\tau;n;k,m))$, в соответствии с формулами (3) и (4), следующих оценок СНДО $\hat{\theta}$: $\hat{T}_0$, $\hat{T}_3$, $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$.

Из таблицы 6 следует, что оценка $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\overline{p}k,m,n,\beta=0{,}6))}$ является эффективной среди предложенных оценок.

Пример 3. В рамках примера 1 изделия испытывались 10 000 час. Воспользуемся классической эффективной оценкой СНДО $\hat{T} = \frac{\tau}{-\ln(1-\hat{b}(r,n))}, \hat{b}(r,n) = \frac{r}{n}$ для биномиального плана [7] и эффективной оценкой СНДО $\hat{T}_b = \frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{b}(R=0,N,\gamma=0{,}6))}$ [9], и построим на их основе следующую составную оценку СНДО для биномиальных испытаний:

$$\hat{T}_{БИ} = \begin{cases} \dfrac{\tau}{-\ln(1-\hat{b})}, R>0; \\ \dfrac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(R,n,\beta=0{,}6)\right)}, R=0, \end{cases}$$

где $\tilde{b}(r,n,\beta=0{,}6)$ – неявно заданная оценка вероятности отказа биномиального плана испытаний [9].

Таблица 7 – Результаты безотказных испытаний примера 3.

СНДО (безотказные испытания с добавлением) r=0, k=0, n=4, N=n+k=4+0=4, Q=1 $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\overline{p}(k=0,m=0,n,\beta=0{,}5))}$	СНДО (биномиальные испытания) r=0, N=n=4, Q = 0 $\hat{T}_{БИ} = \begin{cases} \frac{\tau}{-\ln(1-\frac{r>0}{n})} \\ \frac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(r=0,n,\beta=0{,}6)\right)} \end{cases}$
$\frac{10000}{-\ln(1-\tilde{v}(k=0,m=0,n=4,\beta=0{,}5))} = 72411$	$\frac{10000}{-\ln\left(1-\tilde{b}(r=0,n=4,\beta=0{,}6)\right)} = 78304$

Таблица 8 – Результаты испытаний с одним отказом примера 3.

СНДО (безотказные испытания с добавлением) r=1, k=1, n=4, N=n+k=4+1=5, Q=1 $\hat{T}_1 = \frac{\tau}{-\ln(1-\overline{p}(k,m,n,\beta=0{,}5))}$	СНДО (биномиальные испытания) r=1, N=n=5, Q = 1 $\hat{T}_{БИ} = \begin{cases} \frac{\tau}{-\ln(1-\frac{r>0}{n})} \\ \frac{\tau}{-\ln\left(1-\tilde{b}(r=0,n,\beta=0{,}6)\right)} \end{cases}$
$\frac{10000}{-\ln(1-\frac{k+m}{n+k})} = 44814$	$\frac{10000}{-\ln(1-\frac{1}{5})} = 44814$

Испытатель определил прогнозируемое значение СНДО

$$\hat{T}_{БИ}(r=1,n=5)=\frac{\tau}{-\ln(1-\tilde{b}(r,n))}=$$

$$=\frac{10000}{-\ln(1-\frac{r}{n})}=\frac{10000}{-\ln(1-\frac{1}{5})}=44814 \text{ час},$$

что соответствует требованиям ТЗ ($T_0 \geq 40000$) на изделия. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с добавлением с целью сокращения издержек.

Выводы

Проведено исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением. Для варианта $n > 3$ оценки $\hat{P}=1-\hat{p}=1-\frac{r}{n+k}$ и $1-\overline{p}(\tilde{v}(\beta=0,5))$ (составная оценка) являются более эффективными в сравнении с оценкой $1-\tilde{v}(\beta=0,5)$. Составную оценку ВБР $1-\overline{p}(\tilde{v}(\beta=0,5))$ следует использовать для безотказных испытаний.

Для варианта $n > 3$ испытания с приемочным числом отказов больше нуля ($Q > 0$), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

Составная оценка СНДО $\hat{T}_1=\frac{\tau}{-\ln(1-\overline{p}(k,m,n,\beta=0,6))}$ является эффективной по смещению среди предложенных оценок СНДО.

Полученные составные оценки $\overline{p}$ и $\hat{T}_1$ имеют направленность практического применения для безотказных испытаний, проводимых по плану испытаний с добавлением.

Библиографический список

1. **Михайлов, В.С.** План испытаний с добавлением [Текст] / В.С. Михайлов // Надежность. – 2019. – № 3. – С. 12-20.

2. **Боровков, А.А.** Математическая статистика [Текст] / А.А. Боровков. – Новосибирск: Наука; Издательство Института математики, 1997. – 772 с.

3. **Барзилович, Е.Ю.** Вопросы математической теории надежности [Текст] / Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов и др.: Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983. – 376 с.

4. **Шуленин, В.П.** Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика [Текст] / В.П. Шуленин. – Томск.: Издательство НТЛ, 2012. – 540 с.

5. **Двайт, Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы [Текст] / Г.Б. Двайт. – М.: Наука, 1966. – 228 с.

6. **Михайлов, В.С.** Исследование интегральных оценок потока отказов [Текст] / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 2 (22). – С. 3-10.

7. **Михайлов, В.С.** Неявные оценки для плана испытаний типа NБτ [Текст] / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 1 (21). – С. 64-71.

8. **Юрков, Н.К.** Оценки показателей надежности для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану [Текст] / Н.К. Юрков, В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 4 (24). – С. 29-39.

9. **Юрков, Н.К.** Частный случай нахождения эффективных оценок [Текст] / Н.К. Юрков, В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 6 (26). – С. 103-113.

10. **Михайлов, В.С.** Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ [Текст] / В.С. Михайлов // Надежность. – 2016. – № 4. – С. 40-42.

11. **Михайлов, В.С.** Оценка гамма-процентного срока для биномиального плана испытаний [Текст] / В.С. Михайлов. // Надежность. – 2019. – № 2. – С. 18-21.

Сведения об авторе

Виктор С. Михайлов – ведущий инженер, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» ФГУП «ЦНИИХМ», Российская Федерация, Москва, e-mail: Mvs1956@list.ru

Вклад автора в статью

Автором статьи выполнено построение эффективных оценок для плана испытаний с добавлением, таких как вероятность безотказной работы $\overline{p}$ и средняя наработка до отказа $\hat{T}_1$. Полученные оценки $\overline{p}$ и $\hat{T}_1$ имеют направленность практического применения для испытаний, не давших отказов и проводимых по плану испытаний с добавлением.