УДК 519.873, 004.056
Оригинальная статья
Надежность, том 19, №4, 2019 https://doi.org/10.21683/1729-2646-2019-19-4-12-16

Дисперсия числа отказов в процессах восстановления

Виталий И. Вайнштейн, *ФГАО ВО «Сибирский федеральный университет», Российская Федерация, 660041, Красноярский край, г. Красноярск, пр. Свободный, 79*

Виталий И. Вайнштейн

Резюме. *Оптимальная организация процесса восстановления имеет важное значение в работе технических, информационно-вычислительных систем, так как возникающие при их работе отказы приводят к значительным негативным последствиям. В работе получена формула дисперсии числа отказов для общего процесса восстановления, которая зависит от функций восстановления (среднего числа отказов) простого и общего процессов восстановления. Также получены формулы дисперсий числа отказов и восстановлений при альтернирующем процессе восстановления, когда наряду со временем работы элемента до отказа учитывается, например, время восстановления. Для экспоненциального распределения при простом и общем процессе восстановления выписаны формулы для дисперсии числа отказов, а также выписано неравенство Чебышева и формула для коэффициента вариации числа отказов для простого процесса восстановления. Представлен алгоритм получения дисперсии в виде рядов для законов распределения наработок, характерных для теории надежности. Разработанный математический аппарат предназначен для применения при постановке и решении различных оптимизационных задач информационной и компьютерной безопасности, а также при эксплуатации технических и информационных систем, программных и программно-аппаратных средств защиты информации, когда возникают отказы, угрозы атак, угрозы безопасности, имеющие случайный характер.*

Ключевые слова: *функция распределения, процесс восстановления, функция восстановления, дисперсия числа отказов, коэффициент вариации.*

Для цитирования: *Вайнштейн В.И. Дисперсия числа отказов в процессах восстановления // Надежность. 2019. №4. С. 12-16. https://doi.org/:10.21683/1729-2646-2019-19-4-12-16*

Поступила 03.09.2019 г. / После доработки 22.10.2019 г. / К печати 14.12.2019 г.

Введение. Постановка задачи. Последовательность неотрицательных, взаимно независимых случайных величин X_i с функциями распределения $F_i(t)$ называется процессом восстановления [1-3]. В теории надежности в процессе восстановления после каждого отказа элемент ремонтируется или заменяется на другой (элемент восстанавливается) и X_i – наработки элемента до отказа после $(i–1)$-го восстановления, $F_i(t)$ их функции распределения.

В зависимости от структуры последовательности функций распределения $F_i(t)$ имеются различные модели процесса восстановления [1-8].

Так, если все случайные величины X_i имеют одну и туже функцию распределения $F_1(t)$, $F_i(t)=F_1(t)$ имеем простой процесс восстановления. Если $F_i(t)=F_1(t)$, $i\geq 2$ имеем общий процесс восстановления.

Процесс восстановления задает случайную величину $N(t)$ – количество отказов (восстановлений) за время от 0 до t

$$P\big(N(t)=n\big)=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t), \qquad (1)$$

$F^{(n)}(t)$ – n-кратная свертка функций распределения $F_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$

$$F^{(n)}(t)=(F^{(n-1)}*F_n)(t)=\int_0^t F^{(n-1)}(t-x)\,dF_n(x), F^{(1)}(t)=F_1(t).$$

Важное значение в теоретических и практических задачах теории надежности имеет функция восстановления $H(t)$ – математическое ожидание числа отказов за время от 0 до t в процессе восстановления $H(t)=E(N(t))$

$$H(t)=\sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t). \qquad (2)$$

Пусть $HF_1(t)$ – функция восстановления простого процесса, образованного функцией распределения $F_1(t)$, $HF_1F_2(t)$ – функция восстановления общего процесса, образованного первой функцией распределения $F_1(t)$, второй и следующими $F_2(t)$.

Функция восстановления $HF_1(t)$ простого процесса удовлетворяет интегральному уравнению

$$HF_1(t)=F_1(t)+\int_0^t HF_1(t-x)\,dF_1(x). \qquad (3)$$

Функция восстановления общего процесса восстановления выражается через функцию восстановления простого процесса по формуле

$$HF_1F_2(t)=F_1(t)+\int_0^t HF_2(t-x)\,dF_1(x).$$

Для простого процесса восстановления формула вычисления дисперсии числа отказов известна [2]

$$D(N(t))=2\int_0^t HF_1(t-x)\,dHF_1(x)+HF_1(t)-H^2F_1(t). \qquad (4)$$

Цель дальнейшего рассмотрения состоит в получении формулы дисперсии числа отказов при общем процессе восстановления и создание метода ее вычисления для различных законов распределения наработок заменяемых элементов при отказах.

Вычисление дисперсии для общего процесса восстановления. По определению

$$D(N(t))=E(N^2(t))-E^2(N(t))=E(N^2(t))-H^2(t).$$

Таким образом, для вычисления дисперсии наряду с функцией восстановления требуется вычисление $E(N^2(t))$. Приведем вычисление $E(N^2(t))$ [9].

Учитывая (1), (2), получаем

$$E(N^2(t))=\sum_{n=1}^{\infty} n^2P(N(t)=n)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2(F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t))=$$
$$=F_1(t)+\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-(n-1)^2)F^{(n)}(t)=F_1(t)+\sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)F^{(n)}(t)=$$
$$=-H(t)+2F_1(t)+2\sum_{n=2}^{\infty} nF^{(n)}(t)=-H\big(t\big)+2\sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}\big(t\big).$$

Таким образом, задача сводится к вычислению для каждой модели процесса восстановления суммы $\sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t)$. В дальнейшем при вычислении этой суммы будет использована формула (2) функции восстановления и определение общего процесса восстановления. Последовательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t)=F_1(t)+2(F_1*F_2)(t)+3(F_1*F_2^{(2)})(t)+\ldots+$$
$$+n(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+\ldots=(F_1(t)+(F_1*F_2)(t)+$$
$$+(F_1*F_2^{(2)})(t)+\ldots+(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+\ldots)+((F_1*F_2)(t)+$$
$$+(F_1*F_2^{(2)})(t)+(F_1*F_2^{(3)})(t)+\ldots+(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+\ldots)+$$
$$+((F_1*F_2^{(2)})(t)+(F_1*F_2^{(3)})(t)+\ldots+(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+\ldots)+$$
$$+(F_1*F_2^{(3)})(t)+\ldots+(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+\ldots)+\ldots+$$
$$+(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+(F_1*F_2^{(n)})(t)+\ldots)=$$
$$+(F_1*F_2^{(3)})(t)+\ldots+(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+\ldots)+\ldots+$$
$$6(F_1*F_2^{(n-1)})(t)+(F_1*F_2^{(n)})(t)+\ldots)=(H(t)+$$
$$+(F_1*HF_2)(t)+(F_1*F_2*HF_2)(t)(F_1*F_2*F_2*HF_2)(t)+$$
$$+\ldots+(F_1*(F_2^{(n)}*HF_2)(t)+\ldots)=H(t)+$$
$$+(HF_2*(F_1+(F_1*F_2)(t)+((F_1*F_2*F_2)(t)+\ldots+$$
$$+(F_1*F_2^{(n)})(t)+\ldots))=H\big(t\big)+\big(HF_2*H\big)\big(t\big).$$

Здесь $H(t)=HF_1F_2(t)$. Окончательно

$$D(N(t))=2\int_0^t HF_2(t-x)\,dHF_1F_2(x)+HF_1F_2(t)-(HF_1F_2\big(t\big))^2. \qquad (5)$$

Пример. Выпишем дисперсии для простого и общего процессов при экспоненциальном распределении наработок

$$F_1(t) = (1 - e^{-\alpha_1 t}), \quad F_2(t) = (1 - e^{-\alpha_2 t}), \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

При простом процессе $H(t)=\alpha_1 t$. После интегрирования в (4) $D(N(t))=\alpha_1 t$.

При простом процессе при экспоненциальном распределении наработок дисперсия совпадает с функцией восстановления.

При общем процессе [3]

$$HF_1F_2(t) = \alpha_2 t + (1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1})(1 - e^{-\alpha_1 t}).$$

После интегрирования в (5)

$$D\left(N\left(t\right)\right) = \alpha_2^2 t^2 + \frac{2\alpha_2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)}{\alpha_1} t -$$

$$-\frac{2\alpha_2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)}{\alpha_1^2}\left(1 - e^{-\alpha_1 t}\right) + HF_1F_2\left(t\right) - H^2F_1F_2\left(t\right).$$

Для многих известных законов распределения, характерных для теории надежности [10], например, экспоненциального, Вейбулла-Гнеденко, Эрланга, нормального, Максвелла, Релея, гамма-распределения и их смесей, функция восстановления получена в явном виде или выписана в виде степенных рядов [2, 3, 11, 12].

В [3, 12] замечено, что указанные функции распределения и их смеси разлагаются в степенные ряды вида

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n + \gamma}, \qquad \gamma \geq 0,\ \beta > 0. \tag{6}$$

Это дает возможность построения единого алгоритма нахождения функций восстановления простых процессов, образованных функциями распределения вида (6) при условии, если числа β и γ целые, неотрицательные или связаны соотношением $\gamma=l\beta$, l – целое, неотрицательное. В этом случае функции восстановления определяются как решение соответствующего интегрального уравнения (3), если решение искать в виде

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\beta n + \gamma}. \tag{7}$$

Коэффициенты c_n определяются.

По такой схеме в [12] находятся функции восстановления для смесей указанных выше функций распределения за исключением смеси гамма-распределений. При ненатуральных значениях величины γ условие $\gamma=l\beta$, (β=1) не выполняется.

В полученные формулы для вычисления дисперсии входят интегралы $\int_0^t H_1(t-x)dH_2(x)$ от функций восстановления. Пусть в соответствии с (7)

$$H_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n} t^{\beta_i n + \gamma_i}, i = 1, 2.$$

Имеем

$$\int_0^t H_1(t-x)dH_2(x) =$$

$$= \int_0^t (\sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n}(t-x)^{\beta_1 n + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{2,k}(\beta_2 k + \gamma_2) x^{\beta_2 k + \gamma_2 - 1}) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2,k}(\beta_{2,k} + \gamma_2) \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n} \int_0^t (t-x)^{\beta_1 n + \gamma_1} x^{\beta_2, k + \gamma_2 - 1}) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2,k}\left(\beta_2 + \gamma_2\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,n} t^{(\beta_1 n + \beta_2 k + \gamma_1 + \gamma_2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\beta_1 n + \gamma_1 + 1\right)\Gamma\left(\beta_2 k + \gamma_2\right)}{\Gamma\left(\beta_1 n + \beta_2 k + \gamma_1 + \gamma_2 + 1\right)}. \tag{8}$$

Здесь учли

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha} x^{\beta} dx = t^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+2\right)},$$

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция.

Если β_1=β_2=β, то в (8) можно прийти только к одной бесконечной сумме в результате замены n+k+s

$$\int_0^t H_1(t-x)dH_2(x) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^{\beta s + \gamma_1 + \gamma_2}}{\Gamma(\beta s + \gamma_1 + \gamma_2 + 1)} \sum_{n+k=s} c_{1,n} c_{2,k} \Gamma \cdot$$

$$\cdot (\beta n + \gamma_1 + 1)\Gamma(\beta k + \gamma_2) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\beta n + \gamma_1 + \gamma_2}}{\Gamma(\beta n + \gamma_1 + \gamma_2 + 1)} \sum_{k=0}^{n} c_{2,k} c_{1,n-k} \Gamma \cdot$$

$$\cdot (\beta(n-k) + \gamma_1 + 1)\Gamma(\beta k + \gamma_2).$$

При определении процесса восстановления предполагалось, что восстановление отказавшего элемента происходит мгновенно. На практике это предположение часто не выполняется. Наряду со временем безотказной работы, не менее важное значение может иметь время простоя, время выяснения причин отказа, время самого восстановления.

Рассмотрим так называемый простой альтернирующий процесс восстановления [2, 3].

Пусть (X_n), (Y_n) – две последовательности неотрицательных, взаимно независимых случайных величин, каждая из которых образует простой процесс восстановления с функциями распределения $F(t)$, $G(t)$ соответственно. Последовательность (X_n, Y_n) называется простым альтернирующим процессом восстановления [2, 3].

Если Y_n – время восстановления элемента после n-го отказа, X_n – время наработки элемента после (n–1)-го восстановления (восстановление начинается после первого отказа), то в моменты

$$T_1 = X_1, \quad T_2 = X_1 + Y_1 + X_2, \ldots,$$
$$T_n = X_1 + Y_1 + X_2 + \cdots + Y_{n-1} + X_n, \ldots$$

происходят отказы, а в моменты

$$S_1 = X_1 + Y_1, S_2 = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2, \ldots,$$
$$S_n = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 + \cdots + X_n + Y_n, \ldots$$

заканчиваются восстановления.

Промежутки между очередными отказами (с учетом времени восстановления) образуют общий процесс восстановления, образованный первой функцией распределения $F(t)$ и второй $(F*G)(t)$. Промежутки между очередными восстановлениями образуют простой процесс восстановления с функцией распределения $(F*G)(t)$ [2, 3].

Среднее число отказов и среднее число восстановлений определяются функциями восстановления $H_0(t) = HF(F*G)(t)$, $H_1(t) = H(F*G)(t)$ соответственно.

Пусть $D_0(t)$ дисперсия числа отказов, $D_1(t)$ дисперсия числа восстановлений. В соответствии с (4, 5) запишем формулы для дисперсий

$$D_0(t) = 2\int_0^t H(F*G)(t-x)dHF(F*G)(x) + H_0(t) - H_0^2(t),$$

$$D_1(t) = 2\int_0^t H(F*G)(t-x)dH(F*G)(x) + H_1(t) - H_1^2(t).$$

Отметим, что знание функции восстановления и дисперсии числа отказов дает возможность решать различные прикладные задачи, связанные с коэффициентом вариации и неравенством Чебышева.

Запишем коэффициент вариации $V(N(t))$ и неравенство Чебышева для процесса восстановления

$$V(N(t)) = \frac{\sigma(N(t))}{H(t)},$$

($\sigma(N(t))$ – среднее квадратическое отклонение)

$$P(|N(t) - H(t)| \geq \int) \leq \frac{D(N(t))}{\int^2}.$$

Рассмотрим простой процесс восстановления при экспоненциальном распределении наработок $F(t)=1-e^{-\alpha t}$. В этом случае $H(t)=\alpha t$, $D(N(t))=\alpha t$ и

$$V(N(t)) = \frac{1}{\sqrt{\alpha t}}.$$

При увеличении времени эксплуатации коэффициент вариации уменьшается.

Положив $\int = 3\sqrt{D(N(t))}$ и переходя к противоположному событию в неравенстве Чебышева, получаем известную форму неравенства Чебышева, которая для процесса восстановления принимает вид

$$P\left(|N(t) - H(t)| < 3\sqrt{D(N(t))}\right) \geq \frac{8}{9}.$$

Для простого процесса восстановления при экспоненциальном распределении наработок

$$P(|N(t) - \alpha t| < 3\sqrt{\alpha t}) \geq \frac{8}{9}.$$

Заключение. При работе технических и информационных систем, а также программных и программно-аппаратных средств защиты информации происходят отказы, возникают угрозы атак, угрозы безопасности и множество других воздействий, имеющих случайный характер, которые оказывают негативное влияние на их работу. Такие воздействия приводят к процессам восстановления. Число отказов, угроз атак и угроз надежности являются случайными величинами, зависящими от времени и от их функций распределения. Характер изменения этих функций распределения приводит к различным моделям процессов восстановления для которых разработаны методы нахождения математического ожидания (функции восстановления) числа отказов.

В работе для общего и альтернирующего процессов восстановления получена формула для дисперсии, зависящая от функции восстановления двух процессов – простого и общего. Предложен алгоритм вычисления функции восстановления для функций распределения наработок характерных для теории надежности. В качестве примеров получены выражения для дисперсий для простого, общего процесса при экспоненциальном распределении. Для этого случая выписано неравенство Чебышева и коэффициент вариации.

Отметим, что получение формул дисперсии числа отказов для других моделей процессов восстановления представляет самостоятельный интерес.

Наличие формул для среднего и дисперсии числа отказов и рассмотрение в процессе восстановления совместного изменения среднего и дисперсии числа отказов от функций распределения наработок до отказа восстанавливаемых элементов естественным образом приводит к рассмотрению новых оптимизационных задач в процессах восстановления. Например, минимизации дисперсии отказов при ограничении на величину среднего числа отказов во время эксплуатации, приводит к близкой по постановке известной задаче Марковица об оптимальном формировании пакета ценных бумаг [13, 14].

Таким образом, разработанный в работе математический аппарат найдет применение при постановке и решении различных оптимизационных задач информационной и компьютерной безопасности, а также при эксплуатации технических, информационных, социально-экономических, биологических и других систем, в условиях, когда возникновения отказов, имеют случайный характер.

Библиографический список

1. **Боровков А.А.** Теория вероятностей [Текст] / А.А. Боровков. – М.: Либроком, 2009. – 652 с.

2. **Байхельт Ф.** Надежность и техническое обслуживание. Математический подход [Текст]: [пер. с англ.] / Ф. Байхельт, П. Франкен. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.

3. **Вайнштейн И.И.** Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности [Текст] / И.И. Вайнштейн. – Красноярск: СФУ, 2016. – 189 с.

4. **Вайнштейн И.И.** О моделях процессов восстановления в теории надежности [Текст] / И.И. Вайнштейн, В.И. Вайнштейн, Е.А. Вейсов // Вопросы математического анализа: сб. науч. тр. / ред. В. И. Половинкин. ИПЦ КГТУ, Красноярск. – 2003. – Вып. 6. – С. 78-84.

5. **Булинская Е.В.** Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения [Текст] / Е.В. Булинская, А.И. Соколова // Современные проблемы математики и механики. – 2015. – С. 37-62.

6. **Анкудинов А.В.** Уравнение восстановления для процессов Кижима-Сумиты [Текст] / А.В. Анкудинов, А.В. Антонов, В.А. Чепурко // Надежность. – 2018. – №18(2). – С. 3-9.

7. **Чумаков И.А.** Некоторые свойства моделей неполного восстановления Кижима [Текст] / И.А. Чумаков, А.В. Антонов, В.А. Чепурко // Надежность. – 2015. – №3(54). – С. 3-15.

8. **Перегуда А.И.** Математическая модель надежности компьютерных сетей [Текст] / А.И. Перегуда, А.А. Перегуда, Д.А. Тимашев // Надежность. – 2013. – №4. – С. 18-43.

9. **Вайнштейн И.И.** Дисперсия числа отказов в моделях процессов восстановления технических и информационных систем. Оптимизационные задачи. [Текст] / И.И. Вайнштейн, В.И. Вайнштейн // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Том 7. – №3.

10. **Литвиненко Р.С.** Практическое применение непрерывных законов распределения в теории надежности технических систем [Текст] / Р.С. Литвиненко, П.П. Павлов, Р.Г. Идиятуллин // Надежность. – 2016. – №16(4). – С. 17-23.

11. **Вайнштейн В.И.** Численное нахождение функции восстановления для одной модели процесса восстановления [Текст] / В.И. Вайнштейн, Е.А. Вейсов, О.О. Шмидт // Вычислительные технологии. – 2005. – №10. – С. 4-9.

12. **Вайнштейн В.И.** Функции восстановления при распределении наработок элементов технических систем как смесь n функций распределения [Текст] / В.И. Вайнштейн // Современные наукоемкие технологии. – 2018. – №6. – С. 44-49.

13. **Markowits Harry M.** Portfolio Selection [Text] / Harry M. Markowits // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – №1. – P. 71-91.

14. **Касимов Ю.Ф.** Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг [Текст] / Ю.Ф. Касимов. – М: Информационно-издательский дом «Филинъ», 1998. – 144 с.

Сведения об авторе

Виталий И. Вайнштейн – кандидат физико-математических наук, ФГАО ВО «Сибирский федеральный университет», доцент-заведующий НУЛ «Информационная безопасность» кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности, Российская Федерация, Красноярский край, г. Красноярск, e-mail: vit037@mail.ru

Вклад автора в статью

Получена формула для дисперсии числа отказов общего процесса восстановления и формулы для дисперсий числа отказов и числа восстановлений при альтернирующем процессе восстановления. Предложен алгоритм для нахождения дисперсии числа отказов в виде рядов для законов распределения наработок характерных для теории надежности.