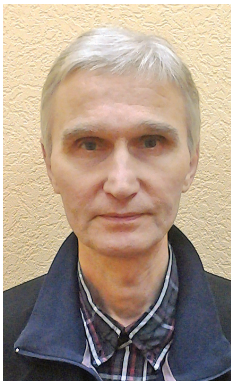
Оригинальная статья
DOI: 10.21683/1729-2646-2019-19-3-12-20

План испытаний с добавлением

Виктор С. Михайлов, *Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно исследовательский институт химии и механики им. Д.М. Менделеева» ФГУП «ЦНИИХМ», Российская Федерация, Москва*



Виктор С. Михайлов

Резюме. *На практике часто приходится сталкиваться с задачей определения величин показателей надежности (точечное оценивание). Обычно, в качестве показателя надежности выбирают вероятность безотказной работы (далее – ВБР). Исходя из экономических соображений, для определительных испытаний на надежность высоконадежных и дорогостоящих изделий выставляют минимум изделий, планируя получить безотказные испытания (приемочное число Q = 0) или испытания с одним отказом (Q = 1), тем самым минимизируя количество испытуемых изделий. Наиболее интересен последний случай. Выбирая конкретные величины приемочного числа и количества испытуемых изделий, испытатель делает предварительную оценку планируемой ВБР, а выбирая Q = 1, испытатель минимизирует риски от возникновения маловероятного случайного отказа. Однако с ростом величины Q растет и количество испытуемых изделий, что делает испытания дорогостоящими. Поэтому сокращение количества изделий при испытаниях на надежность является проблемой номер один.* **Формулировка плана испытаний с добавлением.** *Будем рассматривать биномиальные испытания (первоначальная выборка) с добавлением одного изделия (дополнительная выборка) на испытания при отказе любого из первоначально выставленных испытуемых изделий. Испытания заканчиваются, когда заканчиваются испытания всех выставленных изделий с любым исходом (в первичной и дополнительной выборках). Здесь и далее имеется в виду, что время испытаний одно и то же для всех изделий. Испытания с приемочным числом отказов больше нуля (Q > 0), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.* **Цель работы.** *Целью работы является построение и исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением.* **Методы исследования оценок показателей надежности.** *В основе поиска эффективных оценок лежит интегральный подход, сформулированный в работах [6, 8-10]. В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки, заданного на сумме значений абсолютных (или относительных) смещений оценок, выбранных из некоторого множества, от параметра закона распределения, где в нашем случае n – количество изделий, первоначально выставленных на испытания.* **Критерий выбора эффективной оценки для ВБР.** *Критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок, основан на суммарном квадрате абсолютных (или относительных) смещений математического ожидания оценок* $E\hat{\theta}(n,k,m)$ *от вероятности отказа p для всех возможных значений p, n.* **Выводы.** *Проведено построение и исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением. Для варианта n > 3 оценка ВБР* $\hat{P}(n,k,m)=1-\hat{p}(n,k,m)=1-(k+m)/(n+k)$ *в сравнении с неявно заданной оценкой* $\hat{V}(n,k,m)=1-\hat{v}(n,k,m)$ *является эффективной по смещению. Испытания с приемочным числом отказов больше нуля (Q > 0), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке. Оценки* $\hat{p}_2$, $\hat{w}_2$ *и* $\hat{w}_3$ *являются несмещенными и, как следствие, эффективными по смещению для вариантов соответственно n = 2 и n = 3.*

Ключевые слова: *схема Бернулли, план испытаний, точечная оценка, вероятность безотказной работы, эффективная оценка, средняя наработка до отказа*

Формат цитирования: *Михайлов В.С. План испытаний с добавлением // Надежность. 2019. №3. С. 12-20. DOI: 10.21683/1729-2646-2019-19-3-12-20*

Введение

На практике часто приходится сталкиваться с задачей определения величин показателей надежности (точечное оценивание). Обычно, в качестве показателя надежности выбирают вероятность безотказной работы (ВБР). Исходя из экономических соображений, для определительных испытаний на надежность высоконадежных и дорогостоящих изделий выставляют минимум изделий, планируя получить безотказные испытания (приемочное число Q=0) или испытания с одним отказом (Q=1), тем самым минимизируя количество испытуемых изделий. Наиболее интересен последний случай. Выбирая конкретные величины приемочного числа Q и количества испытуемых изделий, испытатель делает предварительную оценку планируемой ВБР, а выбирая Q=1, испытатель минимизирует риски от возникновения маловероятного случайного отказа. Однако с ростом величины Q растет и количество испытуемых изделий, что делает испытания дорогостоящими. Поэтому сокращение количества изделий при испытаниях на надежность является проблемой номер один.

Формулировка плана испытаний с добавлением

Будем рассматривать биномиальные испытания (первоначальная выборка) [1, 2] с добавлением одного изделия (дополнительная выборка) на испытания при отказе любого из первоначально выставленных испытуемых изделий. Испытания заканчиваются, когда заканчиваются испытания всех выставленных изделий с любым исходом (в первичной и дополнительной выборках). Здесь и далее имеется в виду, что время испытаний одно и то же для всех изделий.

Испытания с приемочным числом отказов больше нуля (Q>0), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

Цель работы

Целью работы является построение и исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением.

Построение и исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением

Пусть n – число испытуемых однотипных изделий, первоначально выставленных на испытания, а $R=r$ – число отказавших изделий, включающее k отказов из n первоначально выставленных на испытания изделий и m отказов из k вторично выставленных на испытания изделий, т.е. $r=k+m$. Тогда число испытуемых изделий составит $N=n+k$. Пусть отказы являются независимыми событиями, тогда вероятность возникновения ровно r отказов за испытания (далее – $P_n(R=r)$ легко выразить посредством производящей функции, для этого воспользуемся свойствами производящей функции [3].

Производящая функция (далее – $\psi_R(z)$) – математическое ожидание от степенной функции вида z^R, т.е. для плана испытаний с добавлением [3]:

$$\psi_R(z) = Ez^R = \sum_{i=0}^{2n} z^i P_n(R=i).$$

Для случая, когда первоначальная выборка состоит из одного изделия производящая функция примет вид [3]:

$$\psi_R(z) = Ez^R = \sum_{i=0}^{2n} z^i P_n(R=i) = q + qpz + p^2z^2.$$

Тогда для случая, когда первоначальная выборка состоит из n изделий, производящая функция примет вид [3]:

$$\psi_{n;R}(z) = \left(q + qpz + p^2z^2\right)^n.$$

Вероятность получить ноль отказов за испытания первоначальной выборки объема n [3]:

$$P_n(R=0) = \psi_{n;R}(z) = \left(q + qpz + p^2z^2\right)^n \big|_{z=0} = q^n.$$

Математическое ожидание случайной величины R находят из выражения [3]: $ER = \psi^{(1)}_{n;R}(z=1)$ – первая производная.

А вероятность получить ровно r отказов – из выражения [3]:

$$P_n(R=r) = \psi^{(r)}_{n;R}(z=0)/r!.$$

Построим первую производную производящей функции:

$$\psi^{(1)}_{n;R}(z) = n\left(q + qpz + p^2z^2\right)^{n-1}\left(2p^2z + pq\right),$$

откуда непосредственно следует, что среднее число отказов за испытания составит

$$ER = \psi^{(1)}_{n;R}(z=1) = n\left(q + qp + p^2\right)^{n-1}\left(2p^2 + pq\right) = np(1+p).$$

Тогда вероятность получить один отказ за испытания вычисляется по формуле:

$$P_n(R=1) = \psi^{(1)}_{n;R}(z=0) = nq^{n-1}pq = npq^n$$

Построение производных высших порядков имеет громоздкий вид и поэтому не приводятся.

Полученные результаты являются не лучшим вариантом для ведения расчетов, поэтому построим более удобную формулу для вероятности возникновения ровно r отказов за испытания, которая получается из следующей процедуры построения ($n \ge k \ge m; r = k + m \le 2n$):

$$P_k(m) := C_k^m p^m q^{k-m};$$

$$P_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k} \sum_{m=0}^{k} P_k(m) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где q=1–p, p – вероятность отказа, C_n^k – число сочетаний k из n элементов.

$$P_n(k,m) := P_n(k) P_k(m) = C_n^k C_k^m p^{k+m} q^{n-m};$$

$$P_n(r=0) = P_n(k=0, m=0) = q^n;$$

$$P_n(r=1) = P_n(k=1, m=0);$$

$$P_n(r=2; r \le n) = P_n(k=1, m=1) + P_n(k=2, m=0);$$

$$P_n(r=3; r \le n) = P_n(k=2, m=1) + P_n(k=3, m=0);$$

$$P_n(r=4; r \le n) = P_n(k=2, m=2) + \\ + P_n(k=3, m=1) + P_n(k=4, m=0);$$

$$P_n(r=5; r \le n) = P_n(k=3, m=2) + \\ + P_n(k=4, m=1) + P_n(k=5, m=0);$$

$$P_n(r=6; r \le n) = P_n(k=3, m=3) + P_n(k=4, m=2) + \\ + P_n(k=5, m=1) + P_n(k=6, m=0);$$

$$P_n(r=7; r \le n) = P_n(k=4, m=3) + P_n(k=5, m=2) + \\ + P_n(k=6, m=1) + P_n(k=7, m=0);$$

$$\ldots$$

$$P_n(R=r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m: m+k=r, m \le k} P_n(k,m);$$

$$\ldots$$

$$P_n(r=2n) = P_n(k=n, m=n) = p^{2n}.$$

Из логики построения получаем искомую формулу для вероятности возникновения ровно r отказов:

$$P_n(R=r) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m: m+k=r, m \le k} P_n(k,m),$$

где r=k+m=0,1,2,…,2n; k=0,1,2,…,n; m:m+k=r, $m \le k$.

Из определения вероятности $P_n(k=x, m=y) = P_n(k=x) P_n(m=y)$, где x, y = 0, 1, 2, ..., n и $P_n(R=r)$ легко получить вероятностную функцию плана испытаний с добавлением:

$$P_{n\sum}(k \le x, m \le y) = \sum_{k=0}^{x} \sum_{m: m+k \le x+y, m \le k, m \le y} P_n(k,m), \quad (1)$$

которая на всем множестве событий r=k+m=0,1,2,…, 2n должна быть равна единице. Проверим этот факт.

Вероятностную функцию на всем множестве событий можно представить в виде суммы произведений каждого члена основного многочлена на многочлен, где многочлены имеют биномиальные коэффициенты, а именно:

$$P_{n\sum}(n,n) = \sum_{r=0}^{2n} P_n(r) = \sum_{k+m=0}^{2n} P_n(k) P_k(m) =$$

$$= \sum_{k+m=0}^{2n} C_n^k p^k q^{n-k} C_k^m p^m q^{k-m} = q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} \sum_{m=0}^{1} C_1^m p^m q^{1-m} + \ldots +$$

$$+ C_n^k p^k q^{n-k} \sum_{m=0}^{k} C_k^m p^m q^{k-m} + \ldots + p^n \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1,$$

или сразу представить в виде:

$$P_{n\sum}(n,n) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

Более простым способом можно найти и выражение для ER, так среднее число испытуемых изделий за время испытаний с добавлением состоит из количества первоначально выставленных на испытания изделий и среднего числа отказавших из первоначально выставленных на испытания изделий, т.е. N=n+np. Тогда среднее число отказавших изделий за время испытаний с добавлением составит

$$E(R,n) = Np = E(k,n) + E(m,n) = \\ = np + np * p = (n + np) p = np(1+p).$$

Заметим, что именно вероятность $P_n(k,m)$ определяет шансы на исход испытаний (k,m), поэтому в качестве оценки параметра p следует выбирать оценку, которая доставляет максимум вероятности $P_n(k,m)$.

Решим классическую задачу определения максимума функции

$$b(r,p,k,n) = P_n(k,m) = C_n^k C_k^m p^{k+m} q^{n-m}$$

относительно переменной p. Для этого прологарифмируем функцию $b(r,p,k,n)$, возьмем производную относительно переменной p, приравняем полученный результат нулю и решим полученное уравнение относительно переменной p. Полученная оценка $\hat{p} = r/(n+k) = r/(n+r-m)$ доставляет максимум функции $b(r,p,k,n)$. Изучим свойства полученной оценки $\hat{p} = r/(n+k)$ и как следствие оценки ВБР

$$\hat{P} = 1 - \hat{p} = 1 - r/(n+k) = (n-m)/(n+k).$$

Пусть $k+m=r>1$, тогда для различных $k_1 > k_2$, $m_1 < m_2$ выполняется неравенство

$$\hat{p}(k_1,m_1) = \frac{r}{n+k_1} < \hat{p}(k_2,m_2) = \frac{r}{n+k_2}, \quad (2)$$

т.е. надежность контролируемой партии изделий (ВБР: $\hat{P}(k_1,m_1) = 1 - \hat{p}(k_1,m_1)$) по результатам испытаний выборки, в которой количество отказавших из первоначально выставленных испытуемых изделий k_1 больше, чем в выборке сравниваемой партии изделий k_2 при одном и том же количестве отказов r, всегда будет выше $\hat{P}(k_1, m_1) > \hat{P}(k_2, m_2)$, чем у этой сравниваемой партии изделий. Т.е. при сравнении результатов двух окончательно сформированных выборок (при равенстве в количестве отказов) приоритет в надежности, отдается изделиям, чьи отказы в основном произошли в первоначально выставленной выборке, а не в дополнительной. И, в этом смысле, дополнительная выборка дает шанс на реабилитацию при неудачных первичных испытаниях. И в этом преимущество плана испытаний с добавлением.

Нахождение несмещенных оценок

Определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n;k,m) = r/(n+k)$:

$$E\left(\hat{p}\left(n;k,m\right)\right) = \sum_{r=0}^{2n} \frac{r}{n+k} P_n\left(r\right).$$

Можно доказать, что оценка $E(\hat{p}(n;k,m))$ в общем виде смещенная. Чтобы доказать этот факт достаточно показать это на частом случае.

Определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n=1) = r/(1+k)$:

$$n=1: E(\hat{p}(n=1)) = \sum_{r=0}^{2} \frac{r}{1+k} P_1(r) = 0*P_1(k=0, m=0) +$$

$$+\frac{1}{2}P_1(k=1, m=0) + 1*P_1(k=1, m=1) =$$

$$= \frac{1}{2}pq + p^2 = 0,5(p+p^2).$$

Следовательно, оценка $\hat{p}(n=1) = r/(1+k)$ – смещенная. Оценка $\hat{p}(n=1)$ представима в виде:

$$\hat{p}\left(n=1\right) = \frac{r}{1+k} \equiv \begin{cases} 0, r=0, k=0, m=0; \\ \frac{1}{2}, r=1, k=1, m=0; \\ 1, r=2, k=1, m=1. \end{cases}$$

Приравнивая математическое ожидание неизвестной оценки $\hat{w}_1(n=1;k,m)$ параметру p легко получить несмещенную оценку вероятности отказа $\hat{w}_1$ для случая $n=1$; p_0, p_1, p_2 – неизвестные вероятности:

$$E(\hat{w}_1) = \sum_{r=0}^{2} \frac{r}{1+k} \hat{w}_1 P_1(r) = p_0(1-p) + p_1\left(p-p^2\right) + p_2 p^2 = p;$$

$$p^0 : p_0 p^0 = p_0 * 1 = 0 \Rightarrow p_0 = 0; p^1 : p_1 p^1 = p \Rightarrow p_1 = 1;$$

$$p^2 : -p^2 p_1 + p^2 p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = p_1 = 1;$$

$$\hat{w}_1 \equiv \begin{cases} 0, r=0, k=0, m=0; \\ 1, r=1, k=1, m=0; \\ 1, r=2, k=1, m=1. \end{cases}$$

Несмещенная оценка представляет собой индикаторную функцию, т.е. в случае появления отказов оценка $\hat{w}_1$ становится равной единице, в противном случае – нулю. Вариант, когда $n=1$, для практики не интересен, т.к. совпадает с биномиальным планом, и, поэтому, в настоящей работе далее рассматриваться не будет.

Определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n=2) = r/(2+k)$

$$n=2: E(\hat{p}(n=2)) = \sum_{r=0}^{4} \frac{r}{2+k} P_2(r) = 0*P_2\ (k=0, m=0) +$$

$$+(1/3)P_2(k=1, m=0) + (2/3)P_2(k=1, m=1) +$$

$$+(1/2)P_2(k=2, m=0) + (3/4)P_2(k=2, m=1) + 1*$$

$$*P_2(k=2, m=2) = 0*q^2 + (1/3)2p^1q^2 + (2/3)2p^2q +$$

$$+(1/2)p^2q^2 + (3/4)2q^3q + 1*p^4 = 2p\,(1-p)(1/3 - (1/3)p +$$

$$+(2/3)p + (1/4)p - (1/4)p^2) + (3/2)p^3 - (3/2)p^4 + p^4 =$$

$$= 2p(1-p)(1/3 + (7/12)p - (1/4)p^2) + (3/2)p^3 -$$

$$-(3/2)p^4 + p^4 = \left(\frac{2}{3}\right)p + \left(\frac{7}{6}\right)p^2 - \left(\frac{1}{2}\right)p^3 - \left(\frac{2}{3}\right)p^2 - \left(\frac{7}{6}\right)p^3 +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)p^4 + \left(\frac{3}{2}\right)p^3 - \left(\frac{3}{2}\right)p^4 + p^4 = \left(\frac{2}{3}\right)p + \left(\frac{1}{2}\right)p^2 - \left(\frac{1}{6}\right)p^3;$$

$$p = 0,5: E(\hat{p}(n=2)) = 1/3 + 1/8 - 1/(6*8) = 21/48.$$

Следовательно, оценка $\hat{p}(n=2) = r/(2+k)$ – смещенная. Оценка $\hat{p}$(n=2) представима в виде:

$$\hat{p}(n=2) \equiv \begin{cases} 0, & r=0, k=0, m=0; \\ 1/3, r=1, k=1, m=0; \\ 2/3, r=2, k=1, m=1; \\ 1/2, r=2, k=2, m=0; \\ 3/4, r=3, k=2, m=1; \\ 1, & r=4, k=2, m=2. \end{cases}$$

Заметим, что для полученных результатов $\hat{p}(r=2, k=1, m=1) = 2/3$ и $\hat{p}(r=2, k=2, m=0) = 1/2$ надежность контролируемой партии изделий, у которой некоторые изделия в выборке отказали только в первоначальном испытании, выше, чем у изделий, чьи отказы возникали при повторном испытании и при одном и том же количестве отказов. Что соответствует свойству оценки $\hat{p} = r/(n+k)$, выражаемому формулой (2).

Легко получить несмещенную оценку ($\hat{s}_2$) для параметра p:

$$\hat{s}_2 \equiv \begin{cases} 0, & r=0, k=0, m=0; \\ 1/2, r=1, k=1, m=0; \\ 5/8, r=2, k=1, m=1; \\ 6/8, r=2, k=2, m=0; \\ 7/8, r=3, k=2, m=1; \\ 1, & r=4, k=2, m=2. \end{cases}$$

Для этого следует математическое ожидание предполагаемой несмещенной оценки с неизвестными вероятностями p_{ik} приравнять параметру p и провести необходимые преобразования:

$$E(\hat{p}(n=2)=\sum_{r=0}^{4}\hat{p}(n=2)P_2(r)=[p_{00}=0;p_{22}=1]=p_{00}q^2+$$
$$+p_{10}2pq^2+p_{11}2p^2q+p_{20}p^2q^2+p_{21}2p^3q+p^4=2p_{10}p-$$
$$-2p_{10}2p^2+2p_{10}p^3+2p_{11}p^2-2p_{11}p^3+p_{20}p^2-2p_{20}p^3+$$
$$+p_{20}p^4+p_{21}2p^3-p_{21}2p^4+p_{22}p^4=2p_{10}p-4p_{10}p^2+$$
$$+2p_{11}p^2+p_{20}p^2+2p_{10}p^3-2p_{11}p^3-2p_{20}p^3+p_{21}2p^3+$$
$$+p_{20}p^4-p_{21}2p^4+p_{22}p^4=p.$$

Для того чтобы выполнялось это равенство, необходимо, чтобы коэффициенты при различных степенях параметра p равнялись нулю, за исключением первой степени, при которой коэффициент должен быть равен единице, а именно:

$$p^1:2p_{10}p^1=p=>p_{10}=1/2;$$
$$p^2:-4p_{10}p^2+2p_{11}p^2+p_{20}p^2=0=>2p_{11}+p_{20}=2=>$$
$$=>2p_{11}=2-p_{20};$$
$$p^3:2p_{10}p^3-2p_{11}p^3-2p_{20}p^3+2p_{21}p^3=0=>2p_{11}+2p_{20}-2p_{21}=$$
$$=1=>2-p_{20}+2p_{20}-p_{20}-1=1=>p_{20}=6/8=>p_{11}=5/8;$$
$$p^4:p_{20}p^4-p_{21}2p^4+p_{22}p\,\hat{}\,4=0=>[p_{22}=1]:2p_{21}-p_{20}=$$
$$=p_{22}=>2p_{21}=p_{20}+1=>p_{21}=7/8.$$

Данная неоднородная система линейных уравнений всегда разрешима и имеет бесконечное множество подобных решений (число переменных больше, чем число уравнений):

$$p_{00}=0;p_{10}=1/2;p_{11}=5/8;p_{20}=6/8;p_{21}=7/8;p_{22}=1.$$

Заметим, что вероятности отказов должны удовлетворять нестрогому неравенству $0\le p_{ij}\le 1$. Заметим также, что на практике для двух контролируемых партий изделий и при одном и том же количестве отказов в сформированных выборках для полученных результатов $p_{20}=6/8$ и $p_{11}=5/8$ надежность первой контролируемой партии изделий $1-p_{20}=1-6/8=2/8$, у которой некоторые изделия в первоначальной и дополнительной выборках отказали только в первоначальном испытании (k=2, m=0), следует считать ниже, чем у изделий второй контролируемой партии $1-p_{11}=1-5/8=3/8$, чьи отказы возникали и при повторном испытании в дополнительной выборке. Такой эффект противоречит свойству (см. формулу (2)) смещенной оценки $\hat{p}(r=k+m,k,m)=r/(n+k)$ и вносит неопределенность при выборе эффективной оценки.

В дальнейшем, чтобы избежать противоречий при поиске новых оценок вероятности отказа, будем исходить из того, что величины оценок для одного и того же количества отказов не зависят от того в какой выборке (первичной или дополнительной) произошли отказы. Следовательно, этот принцип по поиску новых оценок вероятности отказа $\hat{w}(n;k,m)$ можно записать следующим образом:

$$\hat{w}(k\_1+m\_1=r,k\_1,m\_1)=$$
$$=\hat{w}(k\_2+m\_2=r,k\_2,m\_2), \qquad (3)$$

т.е. отказываемся от свойства оценки $\hat{p}$, выражаемого формулой (2).

Аналогично предыдущим рассуждениям продемонстрируем этот способ поиска новых оценок:

$$\hat{w}_2(0):=p_0;\ \hat{w}_2(1):=p_1;\ \hat{w}_2(2):=p_2;\ \hat{w}_2(3):=p_3;\ \hat{w}_2(4):=p_4$$

$$E(\hat{w}_2)=\sum_{r=0}^{4}\hat{w}_2(r)P_2(r)=p=p_0q^2+p_12pq^2+p_22p^2q+$$
$$+p_2p^2q^2+p_32p^3q+p_4p^4=2p_1p-2p_12p^2+2p_1p^3+$$
$$+2p_2p^2-2p_2p^3+p_2p^2-2p_2p^3+p_2p^4+p_32p^3-p_32p^4+$$
$$+p_4p^4\,2p_1p-4p_1p^2+2p_2p^2+p_2p^2+2p_1p^3-2p_2p^3-$$
$$-2p_2p^3+p_32p^3+p_2p^4-p_32p^4+p_4p^4.$$

Для того чтобы выполнялось это равенство, необходимо, чтобы коэффициенты при различных степенях равнялись нулю, за исключением первой степени, при которой коэффициент должен быть равен единице:

$$p^0:p_0p^0=p_0*1=0=>p_0=0;$$

$$p^1:2p_1=1=>p_1=1/2;$$

$$p^2:-4p_1p^2+2p_2p^2+p_2p^2=0=>-2+3p_2=0=>p_2=2/3;$$

$$p^3:2p_1p^3-2p_2p^3-2p_2p^3+p_32p^3=$$
$$=0=>1-8/3+2p_3=0=>p_3=5/6;$$

$$p^4:p_2p^4-p_32p^4+p_4p^4=$$
$$=0=>2/3-10/6+p_4=0=>p_4=1;$$

$$p_0=0;p_1=1/2;p_2=2/3;p_3=5/6;p_4=1.$$

Данная неоднородная система линейных уравнений всегда разрешима и имеет единственное решение (число переменных 2*n равно рангу (числу линейно независимых уравнений) [5]), которое и будет принято за оценку $\hat{w}_2$!

Аналогично предыдущему примеру (случай n=2), определим математическое ожидание оценки $\hat{p}(n=3)=r/(3+k)$:

$$n=3:\ E(\hat{p}(n=3))=\sum_{r=0}^{6}\frac{r}{3+k}P_3(r).$$

Произведя последовательно все необходимые манипуляции (не приводятся из-за громоздкости выражений), приходим к выводу, что оценка $\hat{p}(n=3)=\sum_{r=0}^{6}\frac{r}{3+k}$ – смещенная. Оценка $\hat{p}(n=3)=\sum_{r=0}^{6}\frac{r}{3+k}$ представима в виде:

$$\hat{p}(n=3)=\sum_{r=0}^{6}\frac{r}{3+k}\equiv\begin{cases}0, r=0, k=0, m=0;\\ 1/4, r=1, k=1, m=0;\\ 1/2, r=2, k=1, m=1;\\ 2/5, r=2, k=2, m=0;\\ 3/5, r=3, k=2, m=1;\\ 4/5, r=4, k=2, m=2;\\ 1/2, r=3, k=3, m=0;\\ 2/3, r=4, k=3, m=1;\\ 5/6, r=5, k=3, m=2;\\ 1, r=6, k=3, m=3.\end{cases}$$

Найдем несмещенную оценку вероятности отказа для случая n=3 ($\hat{w}_3(r)$), используя принцип, выражаемый формулой (3). Определение величин вероятностей этой оценки проводится через ее математическое ожидание, которое должно равняться оцениваемому параметру p:

$$\hat{w}_3(0):=p_0;\hat{w}_3(1):=p_1;\hat{w}_3(0):=p_2;\hat{w}_3(3):=p_3;$$
$$\hat{w}_3(4):=p_4;\hat{w}_3(5):=p_5;\hat{w}_3(6):=p_6;$$

$$E(\hat{w}_3(r))=p=p_0q^3+p_1 3pq^3+3p_2\left(p^2q^2+p^2q^3\right)+$$
$$+p_3\left(6p^3q^2+p^3q^3\right)+p_4\left(3p^4q+3p^4q^2\right)+p_5 3p^5q+$$
$$+p_6p^6=3p_1\left(p-3p^2+3p^3-p^4\right)+3p_2\left(p^2-2p^3+p^4\right)+$$
$$+3p_2\left(p^2-3p^3+3p^4-p^5\right)+6p_3\left(p^3-2p^4+p^5\right)+$$
$$+p_3\ (p^3-3p^4+3p^5-p^6\ )+3p_4\ (p^4-p^5\ )+$$
$$+3p_4\ (p^4-2p^5+p^6)+3p_5\ (p^5-p^6)+p_6p^6$$

$$p^0: p_0p^0=p_0*1=0; p_0=0;$$

$$p^1: 3p_1=1; p_1=1/3;$$

$$p^2: -9p_1+3p_2+3p_2=0 => 6p_2=3 => p_2=1/2;$$

$$p^3: 9p_1-6p_2-9p_2+6p_3+p_3=0 => 6p_2+$$
$$9p_2-6p_3-p_3=3 => p_3=9/14;$$

$$p^4: -3p_1+3p_2+9p_2-12p_3-3p_3+3p_4+3p_4=$$
$$=0 => 12p_2-15p_3+6p_4=1 => p_4=65/84;$$

$$p^5: -3p_2+6p_3+3p_3-3p_4-6p_4+3p_5=0 => p_5=75/84;$$

$$p^6: -p_3+3p_4-3p_5+p_6=0 => p_6=1;$$

$$\hat{w}_3(r)\equiv\begin{cases}0, r=0;\\ 1/3, r=1;\\ 1/2, r=2;\\ 9/14, r=3;\\ 65/84, r=4;\\ 75/84, r=5;\\ 1, r=6.\end{cases}$$

Аналогичный поиск несмещенных оценок для случаев n=4 и n=5 к успеху не привел, т.к. полученные результаты величин вероятностей превысили единицу, что не приемлемо. Из этого следует, что для n>3 построение несмещенной оценки по правилу $\hat{p}(k_1+m_1=r,k_1,m_1)=\hat{p}(k_2+m_2=r,k_2,m_2)$ проблематично!

Введем новое понятие, а именно: пусть оценка вероятности отказа (далее – $\hat{v}$) центрирует вероятностную функцию $P_{n\sum}$ относительно предельных границ изменения ее значений. Это означает, что интервалы $[0;\hat{v}]$ и $[\hat{v};1]$ значений этих оценок с вероятностью равной 0,5 накрывают оцениваемый параметр p. Такие оценки будем называть центрируемыми. Заметим, что центрируемые оценки для некоторых планов испытаний близки к эффективным оценкам [6, 8]. В нашем случае центрируемая оценка $\hat{v}$ находится из выражения (заменяя p на $\hat{v}$ в формуле (1)):

$$P_{n\sum}(k\le x, m\le y,\hat{v})=\sum_{k=0}^{x}\sum_{m:m+k\le x+y, m\le k, m\le y}P_n(k,m,\hat{v})=0,5.$$

Чтобы решение этого уравнения существовало и было единственным, необходимо проверить монотонность $P_{n\sum}$ относительно переменной p [1, 7]. Напомним, что $P_n(k,m):=C_n^k\,C_k^m\,p^{k+m}\,q^{n-m}, r=k+m.$

Беря производную от $P_{n\sum}$ по параметру p, получаем:

$$(P_{n\sum}(k\le x, m\le y, p))'_p=$$
$$=\sum_{k=0}^{x}\sum_{m:m+k\le x+y, m\le k, m\le y}C_n^kC_k^{r-k}(rp^{r-1}q^{n-r+k}-(n-r+k)p^rq^{n-r+k-1})$$

Из-за громоздкости полученного выражения не удается доказать или опровергнуть монотонность $P_{n\sum}$. Однако для наиболее интересных для практики случаев r=0, r=1 и r=2 это удается. Рассмотрим эти случаи:

$$r=0:\ (P_{n\sum}(n,p,k=0,m=0))'_p=$$
$$=C_n^0\,C_0^{0-0}\ \ [(0+0)p^{-1}q^n-np^0q^{n-1}\ ]=-nq^{n-1}<0;$$

$$r=1:\ (P_{n\sum}(n,p,k=1,m=0))_p^{'}=$$
$$=C_n^1C_1^0\left[\left(1+0\right)p^0q^n-npq^{n-1}\right]-C_n^0C_0^0nq^{n-1}=$$
$$=nq^n-n^2pq^{n-1}-nq^{n-1}=nq^{n-1}\left(1-p-np-1\right)=$$
$$=-pn\left(n+1\right)q^{n-1}<0;$$
$$r=2:\ (P_{n\sum}(n,p,k=1,m=1))_p^{'}=C_n^1C_1^1[(1+1)pq^{n-1}-$$
$$-(n-1)p^2q^{n-2}\ ]+C_n^1C_1^0[\left(1+0\right)p^0q^n--npq^{n-1}]-$$
$$-C_n^0C_0^0nq^{n-1}=2npq^{n-1}-n(n-1)p^2q^{n-2}+nq^n-n^2pq^{n-1}-$$
$$-nq^{n-1}=npq^{n-2}(2(1-p)-(n-1)p)-pn(n+1)q^{n-1}=$$
$$=npq^{n-2}(2-p-np)-pn(n+1)q^{n-1}=npq^{n-2}(2-n-1)\le 0$$

$$r=2:\ (P_{n\sum}(n,p,k=2,m=0))_p^{'}=C_n^2C_2^0[(2+0)pq^n-$$
$$-np^2q^{n-1}\ ]+C_n^1C_1^0[(1+0)p^0q^n-np^1q^{n-1}\ ]-C_n^0C_0^0nq^{n-1}=$$
$$=n(n-1)pq^n-0{,}5n^2(n-1)p^2q^{n-1}+nq^n-n^2pq q^{n-1}-$$
$$-nq^{n-1}=n(n-1)pq^{n-1}(1-p-0{,}5np)-pn(n+1)q^{n-1}=$$
$$=npq^{n-2}(0{,}5np-n)\le 0.$$

Следовательно, для случаев r=0, r=1, r=2 вероятностная функция $P_{n\sum}$ монотонно убывает с ростом параметра p, а, следовательно, центрируемая оценка $\hat{v}$ параметра p для плана испытаний с добавлением является единственной.

Из определения центрируемой оценки следует, что она определяет нижнюю (верхнюю) доверительную границу (далее – НДГ (ВДГ)) интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью γ=0,5 или уровнем значимости α=1–γ=0,5. С другой стороны, любую оценку НДГ (ВДГ) интервала неизвестного параметра p можно трактовать как точечную оценку параметра p с сильным смещением (вниз – для НДГ и вверх – для ВДГ). Односторонние НДГ (далее – $\hat{p}_н$) и ВДГ (далее – $\hat{p}_в$) интервала неизвестного параметра p с довертельной вероятностью γ=1–α вычисляют соответственно по формулам:

$$P_{n\sum}(x,y,\hat{p}_н)=\gamma,\ P_{n\sum}(x,y,\hat{p}_в)=\alpha.$$

Границы центрального доверительного интервала вычисляют по формулам [4]:

$$P_{n\sum}(x,y,\hat{p}_н)=1-\alpha/2,\ P_{n\sum}(x,y,\hat{p}_в)=\alpha/2.$$

В таблицах 1, 2 и 3 приведены соответственно значения НДГ, ВДГ параметра p и значения центрируемой оценки $\hat{v}$ для наиболее реальных для практики объемов испытаний и событий возникновения отказа.

Сформулируем критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР), и построим на основе сформулированного критерия улучшенную (но смещенную) оценку вероятности отказа (и, следовательно, оценку ВБР) для плана испытаний с добавлением для n>3 и выберем среди предложенных оценок эффективную.

Методы исследования оценок показателей надежности

В основе поиска эффективных оценок лежит интегральный подход, сформулированный в работах [6, 8-10]. В основе интегрального подхода лежит построение правила выбора эффективной оценки $\hat{\theta}_0(n;k,m)$, заданного на сумме значений абсолютных (или относительных)

Таблица 1 – Значения НДГ параметра *p* для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали) при γ=0,8

	n	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	m=0	0,199	0,105	0,071	0,054	0,043	0,036	0,031	0,027
k=1	m=0	0,445	0,287	0,212	0,168	0,139	0,119	0,104	0,092
k=1	m=1	1	0,445	0,287	0,212	0,168	0,139	0,119	0,104

Таблица 2 – Значения ВДГ параметра *p* для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали) при *a*=0,2

	n	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	m=0	0,800	0,552	0,415	0,331	0,275	0,235	0,205	0,182
k=1	m=0	0,894	0,710	0,582	0,488	0,422	0,370	0,330	0,297
k=1	m=1	1	0,894	0,710	0,582	0,488	0,422	0,370	0,330

Таблица 3 – Значения центрируемой оценки $\hat{v}$ для различных объемов испытаний (по горизонтали) и событий возникновения отказа (по вертикали)

	n	1	2	3	4	5	6	7	8
k=0	m=0	0,292	0,206	0,159	0,129	0,108	0,094	0,082	0,074
k=1	m=0	0,707	0,5	0,384	0,313	0,264	0,226	0,201	0,179
k=1	m=1	1	0,707	0,5	0,384	0,313	0,264	0,226	0,201

Таблица 4 – Результаты подстановки предложенных оценок вероятности отказа в функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$

Функционал	$\hat{p}_2(n=2)$	$\hat{w}_2(n=2)$	$\hat{w}_3(n=3)$	$\hat{p}(n>3)$	$\hat{v}(n>3)$
$L(\hat{\theta}(n;k,m))$	$2{,}6\cdot10^{-33}$	$2{,}6\cdot10^{-33}$	$5{,}1\cdot10^{-33}$	$2\cdot10^{-4}$	$1{,}51\cdot10^{-3}$
$D(\hat{\theta}(n;k,m))$	0,0687	0,0418	0,0418	0,0187	0,0164

смещений оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$, выбранных из некоторого множества, от параметра закона распределения, где в нашем случае n – количество изделий, первоначально выставленных на испытания.

Критерий выбора эффективной оценки для ВБР

Критерий выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) на множестве оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$ основан на суммарном квадрате абсолютных (или относительных) смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(n;k,m)$ от вероятности отказа p для всех возможных значений p, n.

Для выбора эффективной оценки вероятности отказа (или ВБР) потребуется только понятие абсолютно эффективной оценки по смещению и изменение параметра p в пределах $0\le p\le1$. Для получения конечного результата в качестве критерия получения эффективной оценки $\hat{\theta}(n;k,m)$ строится функционал (далее – $L(\hat{\theta}(n;k,m))$) на ограниченном множестве $n_1\le n_i\le n_j$, $i=1,\dots,j$[6, 8-10]:

$$L(\hat{\theta}(n;k,m))=\frac{1}{j}\sum_{n_1\le n_i\le n_j}\int_0^1(E\hat{\theta}(n_i;k,m)-p)^2\,dp \qquad (4)$$

Оценка $\hat{\theta}_0(n;k,m)$, минимизирующая функционал $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ на заданном множестве оценок, называется эффективной оценкой по смещению на заданном множестве смещенных оценок. Среди оценок, доставляющих примерно один и тот же минимум функционалу $L(\hat{\theta}(n;k,m))$, следует выбрать оценку, которая имеет минимальное уклонение в среднеквадратическом смысле (классическое определение эффективной оценки [1]). Данную оценку будем называть как более эффективную в сравнении с выбранными.

Для выбора оценок, обладающих минимальным уклонением, строится функционал (далее – $D(\hat{\theta}(n;k,m))$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(n;k,m)$ от параметра p для всех возможных значений p, n [6, 8-10]:

$$D(\hat{\theta}(n;k,m))=\frac{1}{j}\sum_{n_1\le n_i\le n_j}\int_0^1 E(\hat{\theta}(n_i;k,m)-p)^2\,dp \qquad (5)$$

Оценку, которая доставляет нуль функционалу $L(\hat{\theta}(n;k,m))=0$ (несмещенная оценка) и минимум функционалу $D(\hat{\theta}(n;k,m))$, будем называть абсолютно эффективной по смещению.

Ограничим объем испытаний $0\le n\le10$, что для высоконадежных и сложных изделий является пределом затрат. Тогда формула (4) примет вид:

$$L(\hat{\theta}(n;k,m))=\frac{1}{10}\sum_{1\le i\le10}\int_0^1(E\hat{\theta}(n_i;k,m)-p)^2\,dp.$$

А формула (5) примет вид:

$$D\left(\hat{\theta}\left(n;k,m\right)\right)=\frac{1}{10}\sum_{1\le i\le10}\int_0^1 E\left(\hat{\theta}\left(n_i;k,m\right)-p\right)^2 dp.$$

В таблице 4 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(n;k,m))$ и $D(\hat{\theta}(n;k,m))$ в соответствии с формулами (4) и (5) следующих оценок вероятности отказа $\hat{\theta}$: $\hat{p},\hat{p}_2,\hat{w}_2,\hat{w}_3,\hat{v}$. Вычисления проводились с шагом $dp=10^{-3}$.

Из таблицы 4 следует, что для вариантов $n>3$ оценка $\hat{p}$ обладает минимальным смещением в сравнении с оценкой $\hat{v}$. Оценки $\hat{p}_2$, $\hat{w}_2$ и $\hat{w}_3$ являются несмещенными и, как следствие, эффективными для вариантов соответственно $n=2$ и $n=3$.

Из таблицы 4 также следует, что оценка $\hat{v}$ имеет небольшое преимущество в сравнении с оценкой $\hat{p}$ в смысле минимального уклонения своих значений от параметра p. Поэтому оценку $\hat{p}=(k+m)/(n+k)$ можно принять в качестве искомой эффективной по смещению оценки среди предложенных.

Заметим, что при вычислениях варьирование шага суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

Пример. Изделия входят в состав агрегата и применяются по схеме с резервированием. Требуется сделать точечную оценку ВБР изделий по результатам биномиальных испытаний на надежность. При планировании определительных испытаний на надежность испытатель при расчете объема выборки (n=6) учел один отказ (Q=1), минимизируя риски от возникновения этого маловероятного случайного отказа. При этом прогнозируемое значение ВБР составило $\hat{P}=1-1/n=5/6=0{,}83$, что соответствует требованиям технического задания (ВБР должно быть не менее 0,83) на изделие. Учитывая, что за время испытаний отказ изделия маловероятен, было принято решение испытания на надежность проводить по схеме испытаний с дополнением с целью сокращения издержек. В процессе испытаний допустимы два исхода: безотказные испытания и испытания с одним отказом (планируемые). В случае безотказных испытаний отпадает необходимость в испытаниях дополнительной выборки. Рассмотрим эти варианты:

1) Безотказные испытания. Безотказные испытания с дополнением:

$$\hat{P} = 1 - \hat{p}(n = 5, k = 0, m = 0) = \\ = 1 - r / (n + k) = 1 - 0 / (5 + 0) = 1;$$

$$\hat{V} = 1 - \hat{v}(n = 5, k = 0, m = 0) = 1 - 0,108 = 0,892.$$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 5, \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,2 = 0,8$ составила (см. таблицу 2)

$$\hat{P}_н(n = 5, r = 0) = 1 - \hat{p}_в(n = 5, k = 0, m = 0) = \\ = 1 - 0,275 = 0,725.$$

Безотказные биномиальные испытания:

$$\hat{P}(n = 6, r = 0) = 1 - r / n = 1 - 0 / 6 = 1.$$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 6, r = 0, \gamma = 0,8$ (находится решением уравнения, составленное по правилу Клоппера-Пирсона [2]) составила

$$\hat{P}_i(n = 6, r = 0) = (1 - \gamma)^{1/6} = 0,764.$$

2) Испытания с одним отказом. Испытания с дополнением и с одним отказом:

$$\hat{P} = 1 - \hat{p}(n = 5, k = 1, m = 0) = \\ = 1 - r / (n + k) = 1 - 1 / (5 + 1) = 0,83;$$

$$\hat{V} = 1 - \hat{v}\left(n = 5, k = 1, m = 0\right) = 1 - 0,264 = 0,736.$$

Односторонняя НДГ ВБР при n=5, γ=1−α=1−0,2=0,8 составила (см. таблицу 2)

$$\hat{P}_н\left(n = 5, r = 1\right) = 1 - \hat{p}_в\left(n = 5, k = 1, m = 0\right) = \\ = 1 - 0,422 = 0,588.$$

Биномиальные испытания с одним отказом: $\hat{P} = 1 - r / n = 1 - 1 / 6 = 0,83.$

Односторонняя НДГ ВБР при $n = 6, r = 1, \gamma = 0,8$ (находится решением уравнения, составленное по правилу Клоппера-Пирсона [2]) составила $\hat{P}_н\left(n = 6, r = 1\right) = 0,578.$

Выводы

Проведено построение и исследование оценок ВБР для плана испытаний с добавлением. Для варианта n>3 оценка ВБР $\hat{P}(n,k,m) = 1 - \hat{p}(n,k,m) = 1 - (k + m) / (n + k)$ в сравнении с неявно заданной оценкой $\hat{V}(n,k,m) = 1 - \hat{v}(n,k,m)$ является эффективной по смещению.

Испытания с приемочным числом отказов больше нуля (Q>0), проводимые по схеме испытаний с добавлением, позволяют сократить число испытуемых изделий за счет успешно проведенных испытаний на первоначальной выборке.

Оценки $\hat{p}_2, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ являются несмещенными и, как следствие, эффективными по смещению для вариантов соответственно n=2 и n=3.

Библиографический список

1. **Боровков А.А.** Математическая статистика [Текст] / А.А. Боровков. – Новосибирск: Наука; Издательство Института математики, 1997. – 772 с.
2. **Гнеденко Б.В.** Математические методы в теории надежности [Текст] / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. **Крупкина Т.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 2. Электронный курс лекций [Текст] / Т.В. Крупкина. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 237 с.
4. **Шуленин В.П.** Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика [Текст] / В.П. Шуленин. – Томск.: Издательство НТЛ, 2012. – 540 с.
5. **Кострикин А.И.** Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учебник для вузов [Текст] / А.И. Кострикин. – М.: МЦНМО, 2004. – 272 с.
6. **Михайлов В.С.** Неявные оценки для плана испытаний типа NБτ [Текст] / В.С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 1(21). – С. 64-71.
7. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 [Текст] / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. – 607 с.
8. **Михайлов В.С.** Оценки показателей надежности для безотказных испытаний, проводимых по биномиальному плану [Текст] / В.С. Михайлов, Н.К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – №4 (24). – С. 29-39.
9. **Михайлов В.С.** Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ [Текст] / В.С. Михайлов // Надежность. – 2016. – № 4. – С. 40-42.
10. **Михайлов В.С.** Оценка гамма-процентного срока для биномиального плана испытаний [Текст] / В.С. Михайлов // Надежность. – 2019. – № 2. – С. 18-21.

Сведения об авторе

Виктор С. Михайлов – ведущий инженер, Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный научно-исследовательский институт химии и механики им. Д.И. Менделеева» ФГУП «ЦНИИХМ», Российская Федерация, Москва, e-mail: Mvs1956@list.ru

Поступила: 14.04.2019