


Кибзун А.И., Игнатов А.Н.

ОРГАНИЗАЦИЯ МОНИТОРИНГА И ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОФИЛАКТИКИ ПО ПРЕДУПРЕЖДЕНИЮ ТРАНСПОРТНОГО ПРОИСШЕСТВИЯ НА ЗАДАННОМ УРОВНЕ НАДЕЖНОСТИ

Вероятность транспортного происшествия существенно зависит от различных факторов и групп факторов. В работе исследуется экономическая целесообразность мониторинга случайного фактора и проведение профилактики по предупреждению транспортного происшествия. Предлагается несколько критериев для оценки полезности мониторинга и профилактики для различных стратегий минимизации риска происшествия. Приводится пример использования полученных результатов при формировании железнодорожного состава.

Ключевые слова: *мониторинг, вероятность транспортного происшествия, оптимальная профилактика, надежность, экономическая эффективность.*

1. Введение

Как известно из [1] и [2], на возникновение транспортных происшествий и на их последствия влияют различные факторы и группы факторов. Причем одни факторы влияют на транспортное происшествие в большей степени, а другие – в меньшей. Характеристикой этого влияния служат условные вероятности транспортного происшествия при условии появления факторов [2]. Аналитически эти вероятности найти не удается. Поэтому в рамках [1] и [2] предложена методика их оценки на основе наблюдений за происшествием и реализовавшимися значениями факторов. Вероятность совместного появления факторов и происшествий может быть оценена на основе протоколов происшествий. Но этих протоколов недостаточно для оценки условных вероятностей при появлении различных комбинаций факторов, т.к. эти условные вероятности зависят еще от вероятностей появления факторов, информация о которых в протоколах не содержится. Поэтому актуальной является организация мониторинга фактора. Но на организацию мониторинга могут потребоваться значительные финансовые средства. Следовательно, необходимо сопоставить средства, затрачиваемые на мониторинг, с риском происшествия (средними потерями при происшествии).

Кроме того, после организации мониторинга фактора необходимо провести еще профилактику, направленную на снижение влияния факторов на транспортное происшествие. На подобную профилактику также требуются финансовые средства. Поэтому актуальной является задача по оценке средств, необходимых для организации мониторинга и проведения профилактики, а также сопоставление их с риском происшествия.

В настоящей работе исследуется задача по минимизации влияния случайного фактора на транспортное происшествие с использованием различных критериев, в частности, в форме математического ожидания. Показывается экономическая нецелесообразность мониторинга для нескольких частных случаев. Рассматривается также задача по поиску оптимального уровня фактора, к которому предлагается привести фактор с учетом баланса суммарных затрат и надежности принятия решения. Вычисляется величина экономического эффекта от системы мониторинга и профилактики, гарантированная на заданном уровне надежности. Предлагается последовательность действий по организации мониторинга фактора и оптимальной профилактики по предупреждению происшествия. Приводится пример, связанный с формированием железнодорожного состава.

2. Минимизация влияния фактора на транспортное происшествие

Сформулируем задачу по минимизации влияния случайного фактора на транспортное происшествие.

Пусть A – транспортное происшествие (например, на железной дороге), $P(A)$ – вероятность его возникновения, а c – стоимость ущерба, возникающего при появлении этого события A, которая считается известной. Предположим, что существует некий фактор F, влияющий на частоту возникновения транспортного происшествия. Например, если исследуются происшествия на железнодорожном транспорте, то за F можно принять число вагонов в железнодорожном составе или величину сдвига дорожного полотна. Пусть F имеет дискретный набор числовых значений f_k, которые реализуются с соответствующими вероятностями $p_k, k = 1,\dots,N$.

Вначале сформулируем простую задачу об оценке целесообразности проведения мониторинга фактора и проведения профилактики по предупреждению транспортного происшествия. Затем мы усложним задачу и рассмотрим ее в более общей постановке.

Найдем такой номер K значения f_i фактора F, при котором условная вероятность происшествия A при условии, что фактор F принял значение f_i, будет минимальной

$$K = \arg\min_{i=1,\dots,N} P(A \mid F = f_i).$$

Тогда в случае, если реализовавшееся значение f_i фактора F отлично от f_K, разумным представляется затратить некоторое количество средств c_i для уменьшения влияния фактора F (то есть для приведения его значения к уровню f_K). Именно под этими действиями мы будем понимать профилактику, направленную на снижение риска транспортного происшествия. Заметим, что, с одной стороны при проведении профилактики риск транспортного происшествия уменьшится, а с другой стороны – появятся дополнительные расходы на организацию мониторинга и профилактику. Оценим суммарные расходы возникающие при данной стратегии. Очевидно, что без наблюдения (мониторинга) фактора F организовать профилактику невозможно. Будем считать, что после профилактики значение фактора F будет равно f_K. Тогда суммарные затраты, направленные на организацию мониторинга и профилактики, будут складываться из 3-х величин: постоянной величины c_E, связанной с затратами на установку и эксплуатацию оборудования по мониторингу, случайных затрат C_F^K на изменение значения фактора F (приведения его к уровню f_K) и случайных затрат C_A^K, связанных с возможным ущербом при происшествии A после проведения профилактики.

В связи со сказанным выше затраты C_F^K на изменение фактора F и приведения его к уровню f_K могут быть представлены в виде дискретной случайной величины с рядом распределения

C_F^K	c_1^K	c_2^K	$\dots$	c_N^K
P	p_1	p_2	$\dots$	p_N

где $p_i \overset{def}{=} P\{F = f_i\}$, c_i^K – величина средств, которые нужно потратить для того, чтобы привести значение фактора F с уровня f_i к уровню f_K, $i = 1,\dots,N$. Очевидно, что $c_K^K = 0$, так как в этом случае профилактика не проводится.

В свою очередь, затраты C_A^K на возможный ущерб при осуществлении события A после профилактики могут быть представлены в виде следующего ряда распределения

C_A^K	c	0
P	$P_K(A)$	$1 - P_K(A)$

где $P_K(A)$ – вероятность наступления события A после приведения фактора F к уровню f_K.

По сути $P_K(A)$ есть условная вероятность события A при условии, что проведена профилактика и фактор F приведен к уровню f_K. Поскольку после профилактики фактор F может принимать лишь одно значение f_K с вероятностью 1, то по формуле полной вероятности [3] получаем:

$$P_K(A) = P(A \mid F = f_K)\sum_{i=1}^{N} p_i = P(A \mid F = f_K). \tag{1}$$

Отметим, что вероятность события A без профилактики равняется $P(A)$, то есть безусловной вероятности транспортного происшествия. По формуле полной вероятности получаем, что

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \mid F = f_i) p_i.$$

Но, так как по предположению $P(A \mid F = f_K) \le P(A \mid F = f_i)$ для всех $i \ne K$, то

$$P(A) \ge P(A \mid F = f_K)\sum_{i=1}^{N} p_i = P(A \mid F = f_K).$$

Таким образом, после профилактики уменьшится вероятность транспортного происшествия, а, следовательно, и риск транспортного происшествия $P_K(A)c$, но при этом появятся дополнительные расходы, связанные с мониторингом и профилактикой. Таким образом, при данной стратегии суммарные потери в случае использования системы мониторинга с профилактикой составят

$$\Phi = c_E + C_F^K + C_A^K.$$

Используя критерий в форме математического ожидания, получим, что в среднем затраты, связанные с системой мониторинга и профилактикой, будут равны

$$\overline{\Phi} \overset{def}{=} \mathrm{M}[\Phi] = c_E + \mathrm{M}\left[C_F^K\right] + \mathrm{M}\left[C_A^K\right].$$

Воспользовавшись определением математического ожидания, получим, что

$$\overline{\Phi} = c_E + \sum_{i=1}^{N} c_i^K p_i + cP(A \mid F = f_K). \tag{2}$$

Заметим, что средние затраты L (риск происшествия) без системы мониторинга составляют

$$L \overset{def}{=} \mathrm{M}[C_A] = cP(A), \tag{3}$$

где C_A – случайные потери при происшествии A без проведения профилактики, $P(A)$ – вероятность события A без проведения профилактики, c – ущерб при возникновении происшествия, которая $P(A)$ находится по формуле полной вероятности (1). Таким образом,

$$L = c\sum_{i=1}^{N} P\{A \mid F = f_i\} p_i. \tag{4}$$

В случае, если средние затраты при использовании мониторинга с профилактикой не больше, чем затраты при его отсутствии, то есть при

$$\overline{\Phi} \le L, \tag{5}$$

можно считать, что система мониторинга с предложенной профилактикой будет полезной. В противном случае, использование системы мониторинга следует признать нецелесообразным.

3. Оптимальная профилактика по предупреждению транспортного происшествия

Однако можно использовать имеющиеся финансовые ресурсы более эффективно. Если фактор F отличен от оптимального f_K, необязательно приводить фактор F к уровню f_K, так как это может потребовать значительных финансовых ресурсов, а можно попытаться привести фактор F к какому-либо другому значению f_k, отличающемуся от f_K. При этом могут уменьшится затраты на изменение фактора, а затраты на возможный ущерб увеличиться, но в сумме эти затраты могут уменьшиться. Это будет означать, что средние затраты уменьшатся. Сформулируем соответствующую задачу.

Предположим, что условная вероятность $P(A \mid F = f_i)$ монотонно возрастает по $i = 1, \ldots, N$. Пусть желаемый уровень фактора F равен f_k, тогда суммарные потери будут равны

$$\Phi(k) = c_E + C_F^k + C_A^k,$$

где C_F^k представляет собой случайную величину, характеризующую количество средств, которые нужно направить на приведение фактора F к уровню f_k, а C_A^k – случайная величина затрат при происшествии A после профилактики, то есть после приведения фактора F с уровня f_i к уровню f_k, если $i > k$. В случае, если $i \le k$, профилактику предлагается не проводить, так как по предположению вероятность $P(A \mid F = f_i)$ не выше вероятности $P(A \mid F = f_k)$ для $i \le k$. Пусть случайная величина C_F^k имеет ряд распределения

C_F^k	c_1^k	c_2^k	$\dots$	c_i^k	c_{i+1}^k	$\dots$	c_N^k
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	p_{i+1}	$\dots$	p_N

где c_i^k характеризует величину средств, которые нужно затратить для того, чтобы понизить значение фактора F с уровня f_i до желаемого уровня f_k, $i = 1, \dots, N$, а p_i – вероятность появления фактора F со значением f_i, $i = 1, \dots, N$. Предположим также, что значения f_i монотонно возрастают по $i = 1, \dots, N$. Заметим, что величины $c_i^k = 0$ при $i \le k$, так как профилактика не проводится, если значение фактора f_i не больше f_k, $i \le k$. Если бы мы все-таки при $i \le k$ привели значение фактора F к уровню f_k, то вероятность транспортного происшествия при этом лишь увеличилась бы, также как и дополнительные финансовые средства. Таким образом, после профилактики случайный фактор F может принять лишь k значений, причем F принимает значения f_i при $i < k$ с вероятностями p_i и значение f_k с вероятностью

$$p_k^k \overset{def}{=} p_k + p_{k+1} + \ldots + p_N.$$

Иными словами, чтобы избежать нежелательного увеличения вероятности транспортного происшествия и дополнительных расходов, только в p_k^k случаях мы будем изменять значение фактора F до желаемого уровня f_k. Заметим также, что вероятность случайного события A после профилактики изменится. Поэтому ряд распределения ущерба C_A^k после профилактики примет вид

C_A^k	c	0
P	$P_k(A)$	$1 - P_k(A)$

где $P_k(A)$ – условная вероятность события A после профилактики, когда фактор F приведен к уровню f_k. Эта вероятность может быть вычислена по формуле полной вероятности

$$P_k(A) = \sum_{i=1}^{k-1} P(A \mid F = f_i) p_i + P(A \mid F = f_k) \sum_{i=k}^{N} p_i, k = 1, \dots, N,$$

так как при $i \le k$ профилактика не проводится, а при $i > k$ значение фактора F приводится к уровню f_k. Поэтому средние суммарные затраты в случае использования системы мониторинга с профилактикой составят

$$\overline{\Phi}(k) = c_E + \mathrm{M}\left[C_F^k\right] + \mathrm{M}\left[C_A^k\right] = c_E + \sum_{i=k+1}^{N} c_i^k p_i + c\left(\sum_{i=1}^{k-1} P(A \mid F = f_i) p_i + P(A \mid F = f_k) \sum_{i=k}^{N} p_i\right). \qquad (6)$$

Отметим, что последняя формула при $k = K = 1$ в точности совпадает с приведенной выше формулой (2). В случае, если $k = N$, вероятность $P_k(A)$ совпадает с вероятностью $P(A)$ возникновения события A без проведения профилактики. Средние затраты без системы мониторинга (риск происшествия) как и ранее останутся на уровне (4).

Очевидно, что средние затраты зависят от уровня f_k, к которому приводится фактор F.

Поставим задачу найти такой номер k_* значения f_k фактора F, при котором средние расходы минимальны

$$k_* = \arg \min_{1 \le k \le N} \overline{\Phi}(k). \qquad (7)$$

Заметим, что если $\overline{\Phi}(k_*) \le L$, систему мониторинга с профилактикой следует признать полезной. В противном случае мониторинг и профилактику проводить нецелесообразно.

Однако в задаче (7) минимизируются лишь средние потери и при этом вероятность того, что затраты на систему мониторинга окупятся, может оказаться очень маленькой. Рассмотрим вероятностную постановку задачи мониторинга, то есть оценим вероятность

$$P_L(k) \overset{def}{=} P\{\Phi(k) \le L\} \qquad (8)$$

такого события, при котором затраты на проведение мониторинга с профилактикой не превысят средние затраты без мониторинга. Сформулируем задачу

$$k_L = \arg \max_{1 \le k \le N} P_L(k), \qquad (9)$$

заключающуюся в том, чтобы найти оптимальный номер k_L уровня f_k фактора F, при котором рассматриваемая вероятность (8) максимальна. Для этой цели построим ряд распределения случайной величины суммарных затрат $\Phi(k)$, предварительно отметив, что набор значений этой случайной величины является конечным и состоит из $c_E, c_E + c_i^k, c_E + c, c_E + c_i^k + c$, где $i = k+1, \ldots, N$. Значение c_E получается, если профилактика не проводится и, кроме того, событие A не происходит. Значение $c_E + c$ получается, если профилактика не проводится, и событие A происходит. Профилактика не проводится, когда $i \le k$, то есть, когда $F \le f_k$. Поэтому

$$P\{\Phi(k) = c_E\} = P(\overline{A} \cdot \{F \le f_k\}) = \sum_{i=1}^{k} (1 - P(A \mid F = f_i)) p_i, \qquad (10)$$

$$P\{\Phi(k) = c_E + c\} = P(A \cdot \{F \le f_k\}) = \sum_{i=1}^{k} P(A \mid F = f_i) p_i. \qquad (11)$$

Значения $c_E + c_i^k$ получаются, если событие A не происходит, а профилактика проводится, при которой фактор F понижается с уровня f_i до уровня $f_k, i > k$. Значение $c_E + c_i^k + c$ получается, если событие A происходит после профилактики. И так как $P\{C_F^k = c_i^k\} = P\{F = f_i\} = p_i$, то

$$P\{\Phi(k) = c_E + c_i^k\} = \left(1 - P(A \mid F = f_k)\right)p_i, i = k+1, \ldots, N, \tag{12}$$

$$P\{\Phi(k) = c_E + c_i^k + c\} = P(A \mid F = f_k)p_i, i = k+1, \ldots, N. \tag{13}$$

Таким образом, получаем ряд распределения

$\Phi(k)$	c_E	$c_E + c_i^k$	$c_E + c$	$c_E + c_i^k + c$
P	$\sum_{i=1}^{k}(1 - P(A \mid F = f_i))\, p_i$	$\left(1 - P(A \mid F = f_k)\right)p_i$	$\sum_{i=1}^{k} P(A \mid F = f_i)p_i$	$P(A \mid F = f_k)p_i$

На основе полученного ряда распределения можно найти вероятность $P_L(k)$. Решая задачу (9), можно найти такой номер k_L значения f_k фактора F, при котором максимальна вероятность такого события, при котором случайные затраты $\Phi(k)$ при профилактике окажутся не больше величины средних потерь L при транспортном происшествии без проведения мониторинга.

Но может возникать такая ситуация, когда вероятность $P_L(k)$ для некоторых k окажется большой и нет смысла ее дальше максимизировать. В такой ситуации определенный интерес представляет величина экономического эффекта от системы мониторинга, гарантированная на заданном уровне надежности α. В связи с этим рассмотрим квантильную постановку задачи мониторинга и оценим гарантированный экономический эффект от проведения мониторинга с профилактикой

$$\varphi_\alpha(k) \overset{def}{=} \max\{\varphi : P\{L - \Phi(k) \geq \varphi\} \geq \alpha\}. \tag{14}$$

Решим задачу

$$k_\alpha = \arg \max_{1 \leq k \leq N} \varphi_\alpha(k). \tag{15}$$

Тогда при найденном номере k_α уровня f_k фактора F экономический эффект от проведения мониторинга с профилактикой составит $\varphi_\alpha(k_\alpha)$ и этот эффект гарантируется с вероятностью α.

Выберем уровень надежности α также из экономических соображений. Найдем такой уровень α_* надежности α, при котором величина экономического эффекта при использовании квантильной стратегии не будет отрицательной

$$\alpha_* = \max\{\alpha : \varphi_\alpha(k_\alpha) \geq 0\}. \tag{16}$$

Таким образом, в α_* случаях убытки будут отсутствовать, а величина экономического эффекта составит $\varphi_{\alpha_*}(k_{\alpha_*})$. Отметим, что если решение этой задачи не существует, то для любого α в терминах квантили мы получим убытки при организации мониторинга и профилактики. Это значит, что проведение мониторинга и профилактики нецелесообразно в принципе.

4. Анализ полученных соотношений

Рассмотрим некоторые частные случаи применения полученных нами соотношений.

Будем считать, что транспортное происшествие A «слабо» зависит от фактора F, если

$$P(A \mid F = f_i) \approx p, i = 1, \ldots, N,$$

то есть условная вероятность события A мало меняется от одного значения фактора F к другому. Заметим, что если $P(A \mid F = f_i) = p, i = 1, \ldots, N$, то имеет место полное отсутствие этой зависимости транспортного происшествия A от фактора F. В случае полного отсутствия этой зависимости средние расходы при проведении мониторинга и профилактики будут равны

$$\overline{\Phi}(k) = c_E + \sum_{i=k+1}^{N} c_i^k p_i + cp, k = 1, \ldots, N.$$

В связи с тем, что величины c_i^k неотрицательны, минимальные потери будут достигаться при $k = N$, то есть

$$\Phi^* = \overline{\Phi}(N) = c_E + cp.$$

Полученный результат показывает, что желаемое значение фактора находится на уровне f_N. Это говорит о том, что никаких действий по изменению фактора предпринимать не нужно, если транспортное происшествие не зависит от фактора F. Кроме того, в связи с тем, что затраты на эксплуатацию системы мониторинга за редким исключением равны нулю, то средний ущерб (риск происшествия) L, в данном случае равный

$$L = cp,$$

оказывается меньше, чем потери при использовании системы мониторинга. Это значит, что мониторинг за фактором F проводить не имеет смысла, если связь между транспортным происшествием и фактором полностью отсутствует. В случае «слабой» зависимости результат оказывается аналогичным.

Будем считать, что транспортное происшествие A «сильно» зависит от фактора F, если

$$P\{A \mid F = f_i\} = t^{i-1} p, i = 1, \ldots, N, \tag{17}$$

для некоторых $t \in T \overset{def}{=} \{t \in \mathbb{R}^1 : t > 1, t^{N-1} p \le 1\}$ и $p \in (0,1)$. В случае, если $i = 1$, то $P(A \mid F = f_1) = p$. Предположим также для простоты, что уровни фактора F равновероятны, то есть

$$p_i \overset{def}{=} P\{F = f_i\} = \frac{1}{N}, i = 1, \ldots, N.$$

Тогда в этом случае согласно (6) получаем

$$\overline{\Phi}(k) = c_E + \frac{1}{N} \sum_{i=k+1}^{N} c_i^k + c\left(\frac{p}{N} \sum_{i=1}^{k-1} t^{i-1} + \frac{t^{k-1} p(N-k+1)}{N}\right), k = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

В силу формулы для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{i=1}^{k-1} t^{i-1} = \frac{t^{k-1}-1}{t-1}, \tag{19}$$

величина средних суммарных потерь, определяемая по формуле (18), равняется

$$\overline{\Phi}(k) = c_E + \frac{1}{N}\sum_{i=k+1}^{N} c_i^k + c\left(\frac{p}{N}\frac{t^{k-1}-1}{t-1} + \frac{t^{k-1}p(N-k+1)}{N}\right), k = 1,\ldots,N. \tag{20}$$

Средний ущерб (риск происшествия) без системы мониторинга в случае «сильной» зависимости события A от фактора F согласно формулам (4) и (19) равняется

$$L = c\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}pt^{i-1} = \frac{cp}{N}\sum_{i=1}^{N}t^{i-1} = \frac{cp}{N}\frac{t^N-1}{t-1}. \tag{21}$$

Рассмотрим «критический» случай, при котором условная вероятность $P(A\,|\,F=f_N)$ возникновения события A будет равна единице, то есть согласно (17), когда

$$t^{N-1}p = 1\ . \tag{22}$$

Пусть профилактика состоит в приведении фактора F к уровню f_1. Так как по предположению условные вероятности $P(A\,|\,F=f_i)$ монотонно возрастают по $i=1,\ldots,N$, то в данном случае номер K, определенный в разделе 2, равен 1. Поэтому средние потери при такой профилактике будут определяться по формуле (2) для $K=1$. Найдем такие значения параметра p при фиксированном количестве N значений фактора F, при которых средние суммарные затраты на мониторинг с профилактикой были не больше средних затрат без мониторинга, то есть согласно (20) и (21) из условия

$$B(p,N) \overset{def}{=} \overline{\Phi} - L = c_E + \frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N}c_i^1 + cp - \frac{cp}{N}\frac{t^N-1}{t-1} \le 0. \tag{23}$$

Отметим, что согласно (22)

$$t = p^{-1/(N-1)}.$$

Поэтому, переходя к пределу в (23), получаем

$$B_*(p) = \lim_{N\to\infty} B(p,N) = c_E + \mathrm{M}[C_F^1] + cp + \frac{c-cp}{\ln(p)} \le 0, \tag{24}$$

так как по правилу Лопиталя [4]

$$\lim_{N\to\infty} N(p^{-1/(N-1)}-1)=\lim_{N\to\infty}\frac{p^{-1/(N-1)}-1}{1/N}=\lim_{N\to\infty}\frac{-N^2\ln(p)p^{-1/(N-1)}}{(N-1)^2}=-\ln(p).$$

и, кроме того,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N}c_i^1=\mathrm{M}[C_F^1].$$

Разрешая неравенство (24) относительно p, можно найти такое значение p_1 параметра p, при котором средние расходы при профилактике и мониторинге не превысят риск происшествия L. Отметим, что с помощью (24) можно для любых достаточно больших N намного проще отыскать все p, при которых стратегия минимизации влияния фактора будет целесообразна, нежели вычислять (2), (4), (5).

5. Пример

Рассмотрим пример использования полученных соотношений. Под транспортным происшествием A будем понимать крушение железнодорожного состава, а в качестве фактора F будем рассматривать число вагонов в составе. Используем гипотетические данные, основанные на данных из американской статистики [5]. Будем считать, что некоторому заказчику требуется от 61 до 80 вагонов, причем число вагонов в заказе случайно и их число равновероятно. Предположим, что, чем длиннее состав, тем больше вероятность его крушения, причем в геометрической прогрессии с некоторым знаменателем t и числителем p, то есть

$$P(A\,|\,F=f_i)=pt^{i-1},$$

где параметры $p=2\cdot10^{-6}$ и $t=1.8$. Пусть стоимость ущерба в случае крушения состава составляет $c=1500000$ \$; стоимость отправки одного вагона груза заказчику другим транспортом составляет $c_0=1500$ \$. Иными словами, если $i-k$ вагонов отстыковать от состава в целях профилактики происшествия (уменьшения длины состава до желаемого количества $60+k$), то возникнут экономические потери, равные $c_i^k=c_0(i-k)$. Отметим, что согласно (1) и (19) вероятность $P(A)$ крушения поезда без проведения мониторинга и профилактики равна

$$P(A)=\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{20}pt^{i-1}=10^{-7}\sum_{i=1}^{20}t^{i-1}\approx0.0159.$$

Средний ущерб без системы мониторинга (риск происшествия) в данном примере согласно формуле (3) равен

$$L=cP(A)\approx 23903\$.$$

В данном случае мониторинг заключается в подсчете количества вагонов в составе, поэтому естественно предположить, что величина затрат, связанных с мониторингом, равна нулю, то есть $c_E=0$. Поэтому согласно (6) средние суммарные затраты составят

$$\overline{\Phi}(k) = \frac{1}{20}\sum_{i=k+1}^{20} c_i^k + c\left(\frac{p}{20}\sum_{i=1}^{k-1} t^{i-1} + \frac{t^{k-1}p(20-k+1)}{20}\right), k = 1,\ldots,20. \qquad (25)$$

Отметим, что в последней формуле величины $c_i^k = c_0(i-k)$ характеризуют стоимость отправки $i-k$ вагонов груза другим транспортом в случае, если состав будет формироваться лишь из 60+k вагонов. Поэтому

$$\overline{\Phi}(k) = \frac{1}{20}\sum_{i=k+1}^{20} 1500(i-k) + c\left(\frac{p}{20}\frac{t^{k-1}-1}{t-1} + \frac{t^{k-1}p(20-k+1)}{20}\right), k = 1,\ldots,20. \qquad (26)$$

Основываясь на (19) и (25) получим следующие значения для средних суммарных потерь (в долларах) при профилактике, заключающейся в уменьшении длины железнодорожного состава с 60+i до 60+k вагонов (Таблица 1).

Таблица 1. Средние потери при профилактике в зависимости от количества вагонов

$L=\overline{\Phi}(20)$	$\overline{\Phi}(1)$	$\overline{\Phi}(2)$	$\overline{\Phi}(3)$	$\overline{\Phi}(4)$	$\overline{\Phi}(5)$	$\overline{\Phi}(6)$	$\overline{\Phi}(7)$	$\overline{\Phi}(8)$	$\overline{\Phi}(9)$
23903	14253	12831	11485	10216	9027	7921	6903	5981	5169
$\overline{\Phi}(10)$	$\overline{\Phi}(11)$	$\overline{\Phi}(12)$	$\overline{\Phi}(13)$	$\overline{\Phi}(14)$	$\overline{\Phi}(15)$	$\overline{\Phi}(16)$	$\overline{\Phi}(17)$	$\overline{\Phi}(18)$	$\overline{\Phi}(19)$
4450	3978	3688	3705	4152	5201	7075	10014	14160	19257

Решая задачу (7), из данной таблицы можно найти оптимальный номер k_*=12. Это означает, что если заказчику требуется более 60+12=72 вагонов, то следует сформировать состав лишь из 72 вагонов, а весь остальной груз, который необходимо перевезти, следует отправить каким-то другим способом. Этот результат связан с тем, что расходы на перевозку нежелезнодорожным транспортом монотонно убывают по k, однако при этом наблюдается существенный рост по k вероятности крушения поезда, что увеличивает возможный ущерб при происшествии.

Решим теперь задачу (15) для различных уровней α надежности. В итоге получим следующие результаты (Таблица 2).

Таблица 2. Гарантированный экономический эффект от проведения профилактики в зависимости от уровня надежности

α	0.95	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999	0.99997	0.99999
k_α	20	18	16	12	11	8	5	3
$\varphi_\alpha(k_\alpha)$	23903	20903	17903	11903	10403	5903	1403	-1598

В соответствии с (16) получим, что $\alpha_* = 0.99997$. Следовательно, оптимальная стратегия принятия решения $k_{\alpha_*} = 5$ (то есть состав должен быть сформирован не более, чем из 60+5=65 вагонов). Причем в 0.99997 случаях будет получен гарантированный положительный экономический эффект от системы мониторинга с профилактикой в размере 1403 $. Из таблицы видно, что при увеличении длины состава в α случаях экономический эффект возрастает, но при этом в $(1 - \alpha)$ неблагоприятных случаях возрастают и убытки. Например, при $k_\alpha = 12$ (что соответствует решению задачи (7) при минимизации средних затрат) в 999 случаях из тысячи экономический эффект от профилактики составит более 11903 $, а в одном случае из тысячи убытки могут оказаться неприемлемо большими. Поэтому рекомендуемое для данного примера значение $k_\alpha = 5$, при этом лишь в 3-х случаях из 100 тысяч возникают убытки, а экономический эффект от мониторинга и проведения профилактики будет не ниже 1403 $.

6. Алгоритм проведения мониторинга и профилактики

С учетом сказанного выше опишем рекомендуемую последовательность действий при проведении мониторинга и профилактики.

1. Устанавливаются датчики для измерения частоты появления фактора $F = f_i$ (например, величины сдвига дорожного полотна), $i = 1,\dots,N$.

2. Вычисляется частота появления i–го значения f_i фактора F, то есть находится оценка $\widetilde{p}_i$ вероятности $p_i = P\{F = f_i\}, i = 1,\dots,N$.

3. Оценка $\widetilde{p}_i$ уточняется на основе логистической схемы обработки данных по малой выборке [2].

4. Обрабатываются протоколы происшествий, по которым оцениваются вероятности $P(A \cdot \{F = f_i\})$ одновременного появления события A и фактора F со значением $f_i, i = 1,\dots,N$. Для этого опять же используется логистическая схема обработки данных.

5. Вычисляется условная вероятность события A при условии, что фактор F принял значение f_i, которое по определению [3] равняется

$$P(A \mid F = f_i) = \frac{P(A \cdot \{F = f_i\})}{P\{F = f_i\}}, i = 1,\dots,N.$$

6. Находится согласно (10)-(13) ряд распределения случайных затрат $\Phi(k)$ на проведение мониторинга и профилактики, направленной на приведение фактора F к уровню $f_k, k = 1,\dots,N$.

7. По формулам (14), (15) определяется оптимальный номер k_α уровня f_k, к которому необходимо привести фактор F.

8. Решается задача (16), в которой выбирается оптимальное значение надежности α_* принятия решения о проведении профилактики.

9. Профилактика проводится, если фактор F принял значение f_i, где $i > k_{\alpha_*}$. Если у фактора F значение f_i окажется с номером $i \le k_{\alpha_*}$, то профилактика не проводится.

10. Экономический эффект от системы мониторинга с профилактикой в таком случае составит не менее $\varphi_{\alpha_*}(k_{\alpha_*})$, который определяется по формуле (14) для $\alpha = \alpha_*$.

7. Заключение

В работе исследована проблема управления рисками и ресурсами, связанными с транспортными происшествиями. С этой целью рассмотрена задача по минимизации влияния фактора на транспортное происшествие с использованием различных критериев, в частности, в форме математического ожидания. Исследована экономическая целесообразность априорного мониторинга за случайным фактором и проведения апостериорной профилактики по предупреждению транспортного происшествия. Предложены критерии в форме математического ожидания, вероятности и квантили для оценки полезности мониторинга и профилактики для различных стратегий минимизации риска происшествия. В частности, исследован случай минимизации риска при «сильной» и «слабой» зависимости транспортного происшествия от фактора. Приведен пример использования полученных результатов при формировании железнодорожного состава, основанный на гипотетических данных из американской статистики.

Литература

1. **Розенберг Е.Н., Замышляев А.М., Прошин Г.Б.** Определение опасности возникновения транспортных происшествий и событий на основе контроля состояния факторов, влияющих на их возникновение // Надежность, 2009, № 3 (31), с. 37-50.

2. **Замышляев А.М., Кан Ю.С., Кибзун А.И., Шубинский И.Б.** Статистическая оценка опасности возникновения происшествий на железнодорожном транспорте // Надежность, 2012, № 2 (41), с. 104-117.

3. **Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

4. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. т.1

5. Rail Equipment Accident Report 6180.54 for 2010. U.S. Department of Transportation Federal Railroad Administration (http://safetydata.fra.dot.gov).