

Онищенко Д.Д.

ЭМПИРИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ПРЕДСКАЗАНИЯ КОЛЛАПСА НАГРУЖАЕМОЙ МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

В работе предложена методика оценки ресурса надёжности нагружаемой многоэлементной системы, производимой в режиме реального времени по ходу разрушения системы. Постановка задачи о разрушении – квазистатическая, в качестве модельного примера используется классический пучок Даниэлса.

Методика основана на статистическом анализе последовательностей единовременных отказов нескольких элементов (пакетов разрушений). По мере развития процесса разрушения отмечаются моменты фиксации наибольшей частоты пакетов определённого объёма (единичных, двойных и т.д.). На основании этого при помощи усреднения в рамках «плавающих окон» уточняется статистическая оценка времени, оставшегося до наступления лавины и полного коллапса системы.

Для иллюстрации работы новой методики использованы результаты компьютерного моделирования. Проводится её сравнение с подходами, предлагавшимися ранее другими авторами, показаны её преимущества.

Ключевые слова: квазистатическое разрушение, многоэлементная система, пучок Даниэлса, время жизни, лавина, статистика пакетов разрушений, скользящее окно.

Введение

Задача о предсказании наступления коллапса (полного разрушения) нагружаемой многоэлементной системы встречается в различных её вариациях во многих областях физики (модели разрушения неоднородных сред), техники и инженерного моделирования, причем на существенно различных пространственных и временных масштабах (например, [1]). Характерными примерами могут служить сейсмическая и вулканическая активность, различные модели электромеханических систем, разрушение материалов при эксплуатации инженерных систем и конструкций [2-5]. Ситуация, когда речь идёт о прогнозировании ресурса системы на стадии её проектирования, широко представлена в литературе [6-7]. Однако особый интерес представляют случаи, когда требуется дать прогноз времени наступления коллапса непосредственно по ходу развития процесса разрушения на основе наблюдений за поведением системы.

В общем случае коллапсу предшествует период постепенной деградации системы, выражающийся в последовательных разрушениях отдельных элементов. При этом имеют место как одиночные

разрушения, так и групповые. Задача локализации крупных групповых разрушений (как потенциальных источников зарождения лавины) в исследуемой системе может решаться, например, с помощью разновидностей метода акустической эмиссии [8-9]. С другой стороны, в ряде случаев (например, при выполнении каких-либо условий однородности системы) можно пытаться делать вывод о её близости к коллапсу на основании анализа одной лишь последовательности интенсивностей отдельных промежуточных актов одновременного разрушения элементов, не интересуясь при этом пространственными характеристиками этих актов. Большое число работ по данной теме было посвящено изучению различных дискретных вероятностных моделей, среди которых базовыми являются модификации модели пучка волокон [10-12]. Исследовались также модели непрерывного разрушения [13].

В настоящей работе предлагается методика динамического, т.е. в режиме реального времени, предсказания момента наступления окончательного разрушения системы под действием возрастающей нагрузки. Данная методика, основанная на изучении результатов численных экспериментов, иллюстрируется на примере исходной модели пучка [14], которую принято называть пучком Даниэлса. Помимо описания самой модели и её численной реализации, приводится описание характеристик, используемых для анализа текущего состояния системы (т.е. стадии, на которой находится процесс разрушения, и близости системы к коллапсу) и результаты компьютерного моделирования. Основное внимание уделено анализу изменения частоты фиксации групповых разрушений малого объема. Проводится сравнение предлагаемой методики с подходами, предлагавшимися ранее другими авторами.

Постановка задачи

Вначале приведем краткое описание рассматриваемой классической модели – пучка Даниэлса, лежащей в основе многочисленных более сложных моделей. Речь идёт о математической модели пучка – системы, состоящей из N параллельных волокон, закреплённых с обоих концов таким образом, что удлинения всех волокон под действием растягивающей нагрузки, приложенной к пучку, одинаковы. Каждому волокну сопоставлено положительное число – его прочность, т.е. минимальное значение растягивающего продольного усилия, под действием которого волокно разрушается. Волокна будем считать статистически идентичными, т.е. подразумевается, что закон распределения прочности, как случайной величины, один и тот же для всех волокон в пучке и описывается некоторой функцией распределения $F(x)$, $x \geq 0$.

Предполагается, что на пучок действует продольная растягивающая нагрузка, значение которой монотонно возрастает от нулевого значения. В силу сделанных предположений нагрузка равномерно распределяется между волокнами.

Ясно, что фактически мы имеем дело с абстрактной математической моделью, в которой внешняя нагрузка распределяется равномерно между всеми работоспособными элементами системы. В дальнейшем будем для удобства использовать термин «пучок волокон» для обозначения указанной модели.

Волокно назовем перегруженным, если усилие в нем равно его прочности или превосходит её. При моделировании процесса разрушения пучка, когда волокно оказывается перегруженным, оно удаляется из пучка (разрушается), а суммарная нагрузка на пучок равномерно перераспределяется между оставшимися волокнами. Процесс нагружения рассматривается в квазистатической постановке: удаление перегруженных волокон и перераспределение нагрузки при неизменной текущей

общей нагрузке считается происходящим мгновенно и заканчивается, когда перегруженных волокон не остаётся. Только после этого, если остались не удалённые волокна, продолжается монотонное увеличение нагрузки на пучок.

Последний будем называть разрушенным, когда из него удалены все волокна. Критической нагрузкой назовем такое значение нагрузки на пучок, при котором разрушилось последнее волокно. Величину критической нагрузки, отнесённую к исходному числу волокон N , будем называть критической удельной нагрузкой q_{br} .

Далее назовем пакетом разрушений (или просто пакетом) набор волокон, разрушившихся одновременно, т.е. при одной и той же нагрузке на пучок. Характеристиками пакета являются его порядковый номер (в рамках текущего процесса разрушения), объём (количество разрушившихся волокон) и значение нагрузки, при котором происходило разрушение волокон из данного пакета. Последний пакет (после которого пучок полностью разрушен) будем называть лавиной.

Сформулируем следующую общую задачу: оценить динамически, т.е. по ходу разрушения пучка, время, оставшееся до наступления лавины. Более строго, по некоторому начальному участку процесса разрушения требуется оценить порядковый номер лавины в последовательности пакетов и критическую удельную нагрузку. Ясно, что чем длиннее этот начальный участок, тем, вообще говоря, точнее будут полученные оценки. В то же время, сигнал о приближении лавины хотелось бы получить «не слишком поздно». Последнюю характеристику можно уточнять различными способами.

Планирование численного эксперимента

Двумя параметрами сформулированной задачи являются объём пучка N и функция распределения прочности волокон $F(x)$. Далее в работе приводятся результаты численного анализа рассматриваемой модели для различных значений N и двух типов распределения прочности: а) равномерного на отрезке $[0;1]$ (для которого среднее значение прочности и её дисперсия равны соответственно $1/2$ и $1/12$); б) двухпараметрического распределения Вейбулла с теми же средним и дисперсией. Эти два типа в дальнейшем будем называть соответственно первым и вторым.

В основополагающей работе [14] получен следующий результат: асимптотически при $N \rightarrow \infty$ критическая удельная нагрузка есть нормально распределённая случайная величина с известными средним и дисперсией. Первое равно максимальному значению функции

$$q(x) = x(1 - F(x)),$$

а вторая асимптотически стремится к 0. В частности, для двух указанных типов распределения прочности соответствующие средние значения критической удельной нагрузки суть $q_1 = 0,25$ и $q_2 \approx 0,23$ соответственно.

Важное, хотя и элементарное, замечание состоит в том, что при известных N и $F(x)$ поставленная задача о предсказании лавины сводится к стандартному построению доверительного интервала. Однако на практике основной интерес представляет исследование случая, когда отсутствует возможность измерения нагрузки, а фиксируются лишь акты локального разрушения (пакеты). Кроме того, обычно неизвестен и объём пучка.

При проведении численного эксперимента ограничимся случаем, когда внешняя нагрузка на пучок возрастает пропорционально времени. При этом из данных выше определений вытекает следующее: в рассматриваемой постановке в качестве дискретного аналога времени может быть

выбрано значение порядкового номера пакета или значение нагрузки, соответствующее данному пакету. Вообще процесс разрушения полностью описывается двумя последовательностями: объёмов последовательных пакетов и соответствующих им значений нагрузки. Соответственно в ходе численного моделирования именно эти последовательности составляют выходную информацию по итогам каждого отдельного эксперимента. По накопленным данным производится анализ статистических характеристик процесса разрушения, основное внимание при этом уделяется изучению изменчивости долей пакетов различного объема по мере развития процесса разрушения и поиску возможных закономерностей.

Реализация и анализ результатов

Ход численного моделирования представляет собой следующую логическую последовательность шагов.

1. Для заданного объёма пучка N и типа пучка (I или II) волокнам в пучке присваивают случайные значения прочности.

2. Текущей полной нагрузке на пучок присваивают нулевое значение. Множество разрушенных волокон полагают пустым.

3. Если в пучке имеются неразрушенные волокна, упорядочивают значения их прочности по возрастанию. Скачкообразно увеличивают текущее значение полной нагрузки на пучок до $\nu \cdot \sigma_m$, где ν – текущее число неразрушенных волокон, σ_m – минимальное из значений прочности неразрушенных волокон.

Если неразрушенных волокон в пучке нет, процесс моделирования разрушения считается окончанным.

4. Пока среди неразрушенных волокон имеются перегруженные, последние удаляются из пучка (т.е. присоединяются к множеству разрушенных) с одновременным перерасчётом текущей удельной нагрузки на остальные волокна. Полная нагрузка на пучок в рамках этого цикла остаётся постоянной. Когда перегруженных волокон не остаётся, возвращаются на шаг 3.

По итогам моделирования сохраняется информация о критической удельной нагрузке, последовательных объёмах пакетов, формирующихся на шагах 4, и соответствующих пакетам значениях удельной нагрузки.

Будем графически представлять траекторию возникающего случайного процесса, откладывая по ходу разрушения пучка значения объёмов пакетов по оси ординат, а соответствующие значения удельной нагрузки – по оси абсцисс.

В качестве примера на рис. 1, а приведена типичная траектория возникающего точечного случайного процесса для пучка первого типа (по оси абсцисс – текущая удельная нагрузка, по оси ординат – объёмы фиксируемых пакетов). В данном случае при объёме пучка $N = 10\,000$ волокон значение критической удельной нагрузки оказалось равным 0,2535, а объём лавины составил волокно. На рис. 1, б приведена частотная диаграмма для объёмов пакетов, зафиксированных в процессе разрушения; их общее число в данном эксперименте составило $K_b = 3056$.

Отметим, что отношение K_b/N во всех проведенных экспериментах оказывалось с весьма малой изменчивостью близким к определенному значению. Например, для пучков первого типа это значение составило приблизительно 31 %. Если последующие исследования модели с различными другими типами распределений прочности волокон приведут к аналогичным результатам, то соответствующие эмпирические оценки суммарного количества пакетов могут быть использованы для

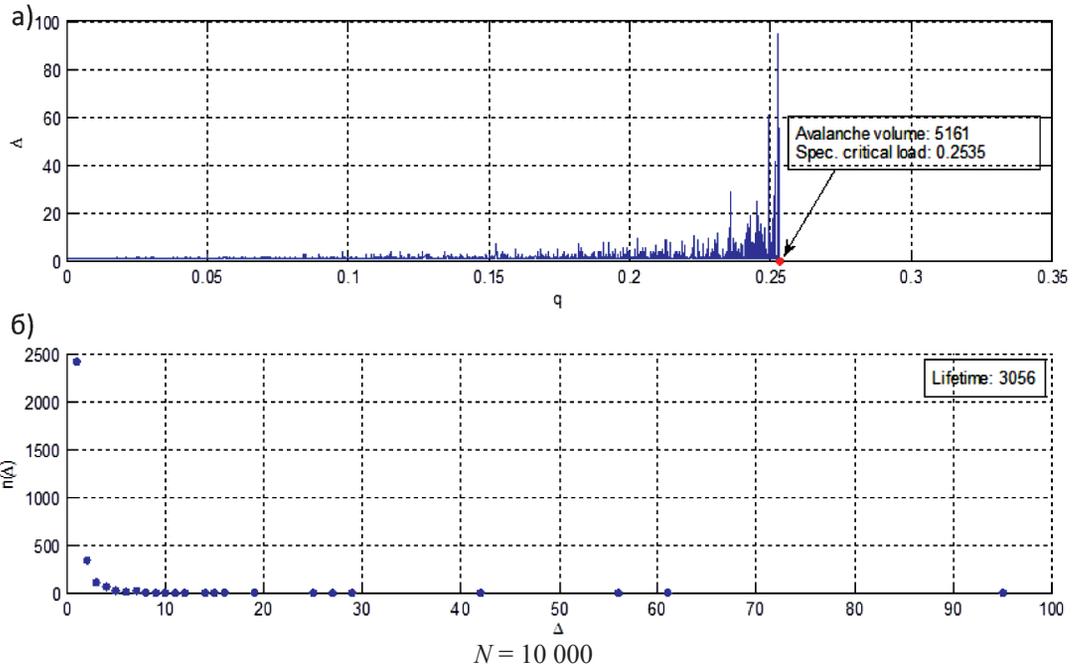


Рис. 1. Результаты численного моделирования разрушения одного пучка: объёмы последовательных пакетов (а), количество зафиксированных пакетов данного объема (б)

предсказания близости лавины в задаче с известной функцией распределения прочности. Найти описание соответствующего аналитического или численного результата в литературе автору не удалось.

Представление частотной диаграммы (рис. 1, б) в логарифмических координатах демонстрирует хорошее соответствие известному асимптотическому соотношению [15]

$$\frac{n(\Delta)}{N} \propto \Delta^{-\frac{5}{2}};$$

где $n(\Delta)$ – общее число зафиксированных по ходу разрушения пакетов объема Δ .

В работе [16] предлагается следующий подход к прогнозированию времени возникновения лавины. Авторы отмечают, что при приближении к коллапсу (т.е. на так называемом предлавином участке) вышеуказанное асимптотическое соотношение трансформируется в

$$\frac{\tilde{n}(\Delta)}{N} \propto \Delta^{-\frac{3}{2}},$$

где $\tilde{n}(\Delta)$ – общее число зафиксированных на предлавином участке пакетов объема Δ . Они предлагают считать изменение оценки показателя степени в выражении Δ^a со значений, близких к $a_1 = -(5/2)$, на значения, близкие к $a_2 = -(3/2)$, указанием на приближение лавины.

Необходимо отметить, однако, что строгое определение предлавиного участка в указанной работе отсутствует, а в своих численных расчетах авторы берут в качестве этого участка такой, в начале которого удельная нагрузка составляла 90 % от критического значения. Поскольку понятие удельной нагрузки не определено в условиях, когда объем пучка неизвестен, данный подход не может быть непосредственно использован для количественного предсказания момента наступления лавины в задаче с неизвестным количеством элементов.

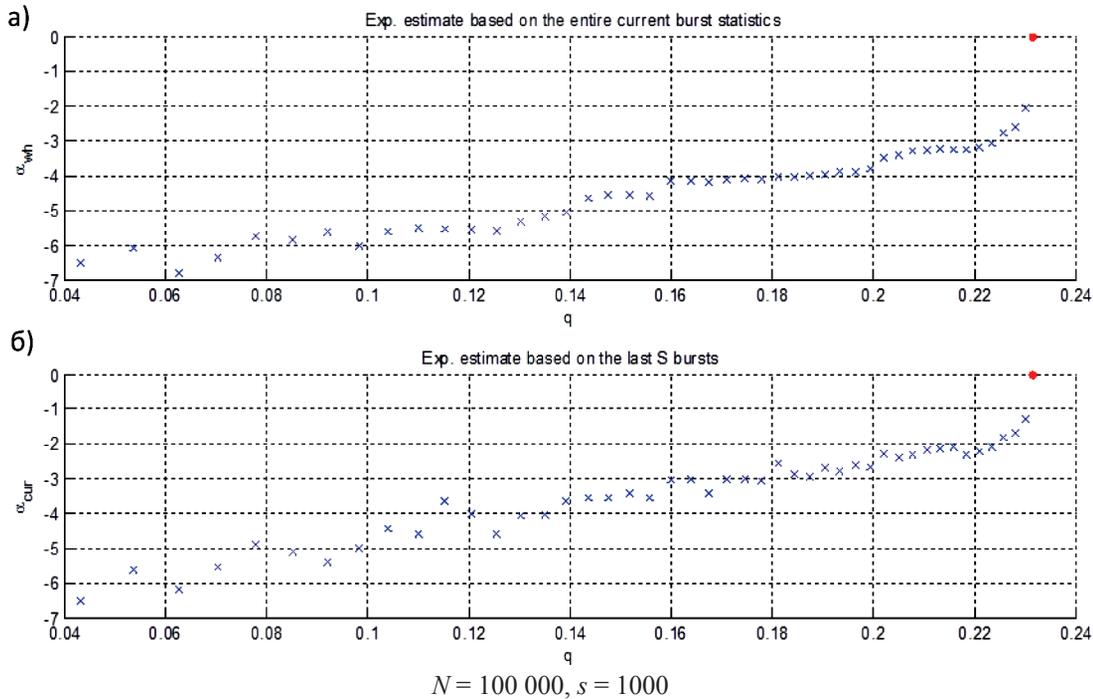


Рис. 2. Оценка показателя степени в законе распределения объемов пакетов в одном эксперименте: по всем зафиксированным к текущему моменту времени пакетам (а), по последним s зафиксированным пакетам (б)

Попытаемся модифицировать этот подход, используя оценку α по скользящему временному окну (т.е. по s последним пакетам, где s – некоторое наперед заданное число). На рис. 2 приведены результаты численного моделирования разрушения пучка второго типа. Пучок состоит из $N = 100\,000$ волокон, ширина окна наблюдения составляет $s = 1000$ пакетов.

При этом на рис. 2, а оценка показателя степени получена с учетом суммарного количества пакетов, зафиксированных с самого начала процесса разрушения, а на рис. 2, б – с учетом количества

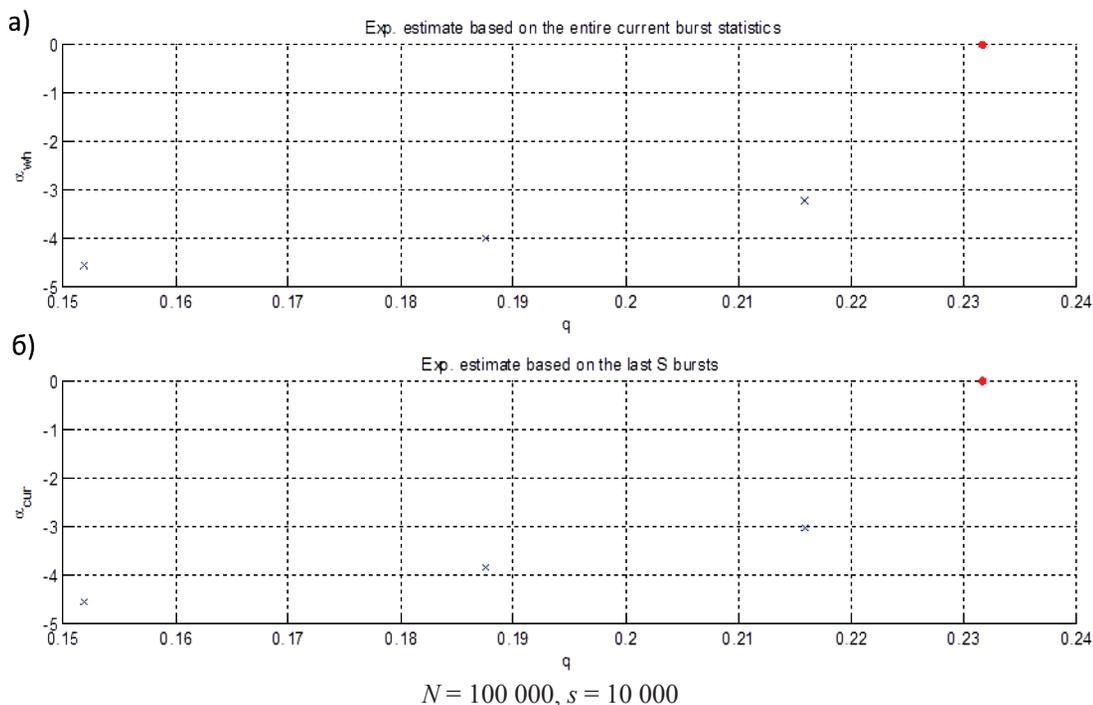


Рис. 3. Оценка показателя степени в законе распределения объемов пакетов в одном эксперименте: по всем зафиксированным к текущему моменту времени пакетам (а), по последним s зафиксированным пакетам (б)

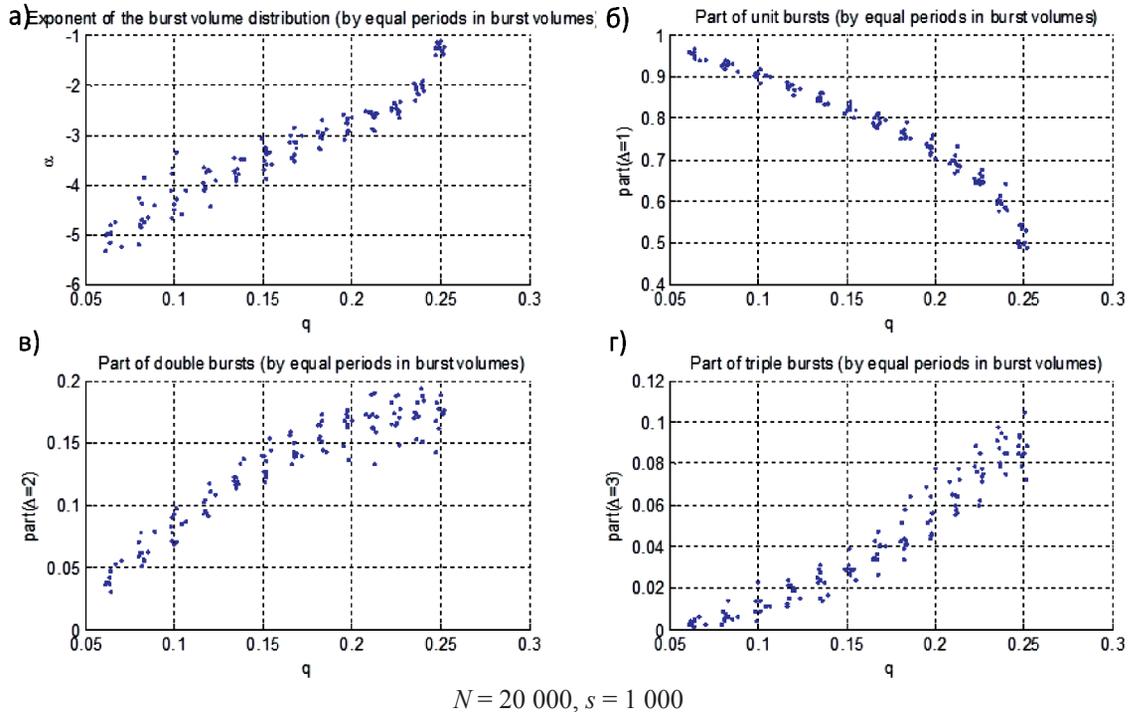


Рис. 4. Результаты численного моделирования разрушения 10 пучков с равномерным распределением прочности волокон: оценка показателя степени в распределении пакетов (а), доля пакетов объема 1 (б), доля пакетов объема 2 (в), доля пакетов объема 3 (г)

пакетов, зафиксированных в пределах текущего окна. Видно, что стабилизация оценки около значения a_1 практически отсутствует, причем в первом случае ситуация существенно хуже. Результаты численных экспериментов показывают, что при больших значениях объема пучка стабилизация если и имеет место, то происходит медленно. Кроме того, переход к значениям показателя, близким к a_2 , происходит без характерного ступенчатого скачка, который позволил бы локализовать момент начала предлавиного участка. Важно, что описанная картина не зависит от размера s используемого окна. Например, на рис. 3 приведены соответствующие графики для той же реализации процесса разрушения, что и на рис. 2, но при другом значении размера окна: $s = 10\,000$.

Предлагаемая методика предсказания лавины

Более эффективным и одновременно более простым оказывается следующий подход к статистическому анализу процесса разрушения. Зададимся некоторым достаточно большим значением s ширины скользящего окна. Начиная с пакета под номером s через каждые $s/2$ пакетов будем вычислять доли пакетов объема 1, 2 и 3, фиксируемые в текущем окне. Параллельно будем отслеживать оценку вышеупомянутого показателя степени по тем же последним s пакетам.

Численный анализ показывает, что получающиеся графики (роль времени, как упоминалось выше, играет текущее значение удельной нагрузки на пучок) обладают свойством универсальности в следующем смысле: их статистическое усреднение, т.е. по итогам независимо проведенных численных экспериментов, есть (при фиксированном типе пучка) траектория, не зависящая ни от объема пучка, ни от размера используемого скользящего окна. На рис. 4, 5 и 6 приведены результаты расчетов по итогам пяти численных экспериментов для каждого из пучков объема $N = 20\,000$, $50\,000$ и $100\,000$ соответственно. На соответствующих рис. (а) показаны графики изменения показателя степени a ; на соответствующих рис. (б) – графики изменения доли пакетов единичного объема относительно общего числа зафиксированных в текущем окне пакетов, на соответствующих

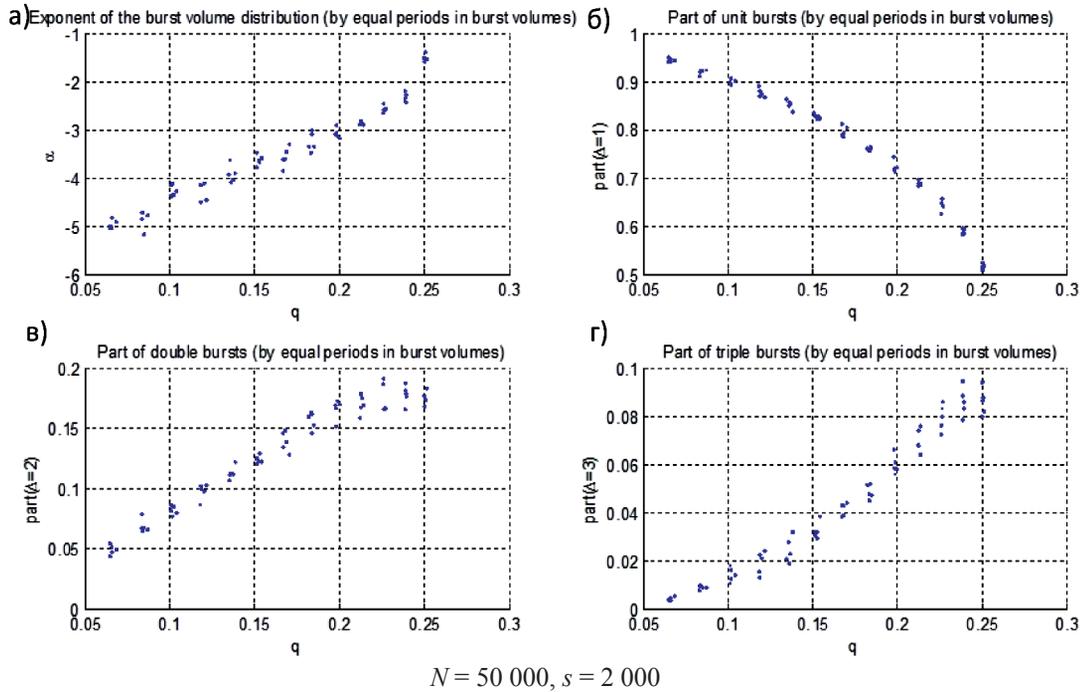


Рис. 5. Результаты численного моделирования разрушения 5 пучков с равномерным распределением прочности волокон: оценка показателя степени в распределении пакетов (а), доля пакетов объёма 1 (б), доля пакетов объёма 2 (в), доля пакетов объёма 3 (г)

рис. (в) – графики изменения доли пакетов объёма $\Delta=2$ и на соответствующих рис. (г) – графики изменения доли пакетов объёма $\Delta=3$. Каждая точка на рис. 4 – 6 получена по результатам фиксации в «окне наблюдения», соответственно, из $s = 1000, 2000$ и 3000 последовательных пакетов, при этом сдвиг между окнами составляет $s/2$ пакетов. По оси абсцисс отложены значения нагрузки, соответствующие последним пакетам в текущем окне.

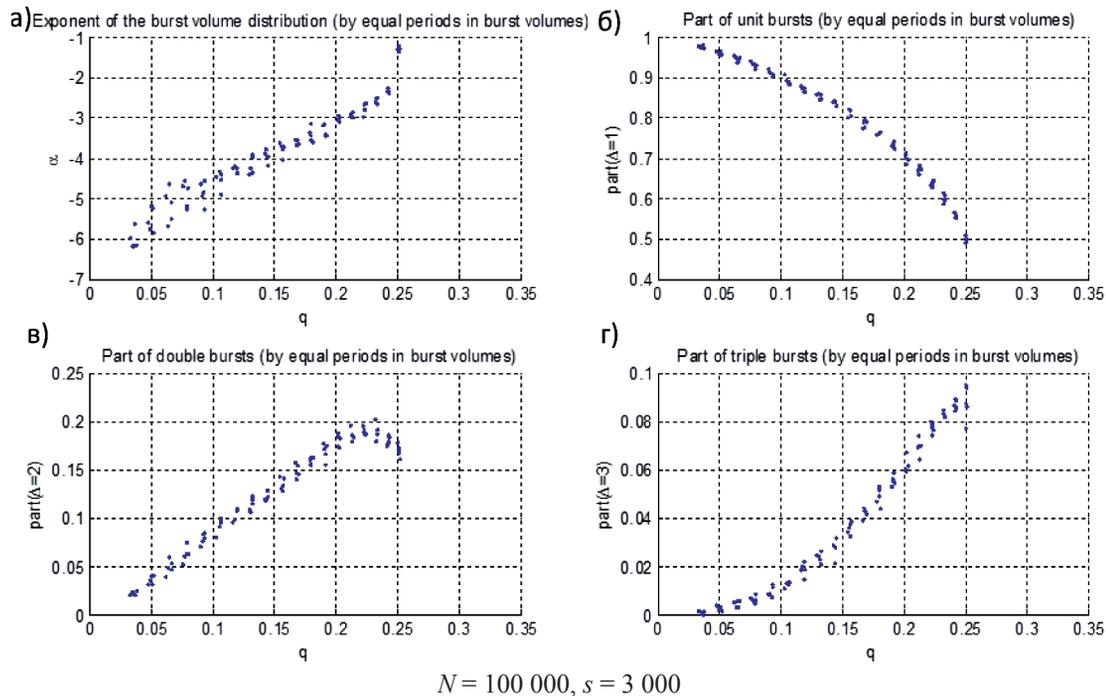
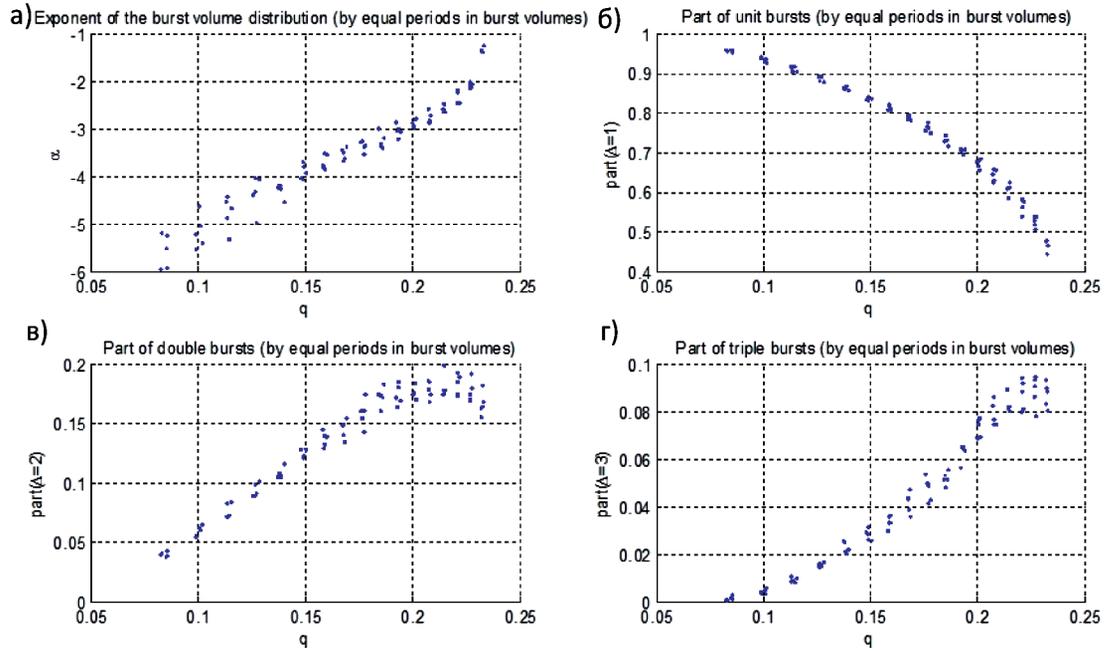


Рис. 6. Результаты численного моделирования разрушения 5 пучков с равномерным распределением прочности волокон: оценка показателя степени в распределении пакетов (а), доля пакетов объёма 1 (б), доля пакетов объёма 2 (в), доля пакетов объёма 3 (г)



$$N = 100\,000, s = 2\,500$$

Рис. 7. Результаты численного моделирования разрушения 5 пучков с вейбулловским распределением прочности волокон: оценка показателя степени в распределении пакетов (а), доля пакетов объема 1 (б), доля пакетов объема 2 (в), доля пакетов объема 3 (г)

Видно, что доля пакетов единичного объема значительно убывает со временем, в то время как доли пакетов объема 2 и 3 возрастают по мере приближения системы к коллапсу. Особенно характерной представляется форма графиков для $\Delta=2$ (рис. (в)): наблюдается устойчивое наличие выраженного максимума доли двойных пакетов незадолго до лавины. Время от прохождения этого максимума до наступления лавины составляет для пучков первого типа в среднем 10 % от полной длительности процесса разрушения.

Важно отметить, что характерные формы соответствующих траекторий типичны и для пучков второго типа. На рис. 7 представлены аналогичные зависимости для случая распределения Вейбулла. Сохраняются как свойства монотонности траекторий, так и относительная величина временной паузы между прохождением максимума доли двойных пакетов и моментом разрушения системы.

В силу описанной универсальности, данное эмпирическое наблюдение может служить одним из критериев предсказания лавины в рассматриваемой модели пучка. Получая в реальном времени (по ходу разрушения) последовательные точки дискретной траектории для $\Delta=2$, сигнал о приближении лавины предлагается подавать немедленно после прохождения локального максимума доли двойных пакетов. При этом абсолютную величину времени, оставшегося до лавины, предлагается оценивать (в условиях, когда N неизвестно, и априори оценить длительность процесса разрушения невозможно) с помощью сравнения формы траекторий для $\Delta=1,3$, получаемых в реальном времени, с формой траекторий из модельных примеров. На основании этого сравнения следует производить масштабирование оси абсцисс на обсуждаемых графиках.

Что касается резкого скачка оценки a , который действительно наблюдается (рис. 4, а; 5, а; 6, а), то он происходит непосредственно перед лавиной и не может помочь предсказать момент наступления коллапса системы с запасом по времени.

Заключение

В работе на основе статистической обработки результатов численных экспериментов по моделированию процесса разрушения пучка Даниэлса выявлены некоторые закономерности изменения во времени (по мере увеличения нагрузки) доли пакетов разрушений малого объема в общем количестве фиксируемых пакетов. Эмпирически показано, что при достаточно большом размере пучка графики изменения доли пакетов объема $\Delta=2$ относительно общего числа пакетов, зафиксированных в текущем окне наблюдения, имеют выраженный максимум незадолго до лавины. Предварительные оценки показывают, что участок от точки максимума до момента начала лавины составляет около 10 % от длительности всего процесса разрушения. При этом имеются основания предполагать универсальность данного критерия предсказания лавины в модели пучка, поскольку это значение оказалось одинаковым для обоих типов рассмотренных распределений прочности волокон – равномерного и вейбулловского, и оно реализуется для пучков различного объема и при использовании окон наблюдения различной длины.

Интересной задачей представляется проверка гипотезы о том, что при неограниченном росте объема пучка максимумы будут возникать также и на графиках долей пакетов объема $\Delta > 2$, причём тем ближе к моменту наступления лавины, чем больше значение Δ . Подтверждение этой гипотезы позволило бы выстраивать подобие иерархического плана предсказания коллапса системы.

Среди других возможных направлений дальнейшей работы можно выделить проверку наличия аналогичных закономерностей в более сложных моделях, в частности, моделях пучка с другим типом перераспределения нагрузки, моделях неоднородного пучка (т.е. содержащего различные по статистическим свойствам волокна) [17], иерархических моделях типа деревьев.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11_08-01243а.

Литература

1. Statistical Models for the Fracture of Disordered Media // Ed. H. J. Herrmann and R. Roux. Amsterdam: North-Holland. 1990. 368 p.
2. Zapperi S., Ray P., Stanley H. E., Vespignani A. Avalanches in breakdown and fracture processes // Phys. Rev. E. 1999. V. 59, No. 5. P. 5049–5057.
3. Gabrielov A., Zaliapin I., Newman W.I., Keilis-Borok V.I. Colliding cascades model for earthquake prediction // Geophys. J. Int. 2000. V. 143. P. 427–437.
4. Newman W.I., Turcotte D.L., Gabrielov A.M. Log-periodic behavior of a hierarchical failure model with applications to precursory seismic activation // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. No. 5. P. 4827–4835.
5. Moreno Y., Gomez J.B., Pacheco A.F. Instability of scale-free networks under node-breaking avalanches // Eur. Phys. Lett. 2002. V. 58. P. 630.
6. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
7. Богданов Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
8. Брагинский А.П. О прогнозировании структурных перестроек в материалах по особенностям коллективного поведения источников акустической эмиссии // Физические аспекты прогнозирования разрушения и деформирования гетерогенных материалов: сб. Л., 1987. С. 55-75.

9. **Еренков О.Ю., Мазин Р.С., Халин А.А., Сушков П.С.** Экспериментальное исследование кинетики процесса разрушения полимерных материалов методом акустической эмиссии. // Изв. ЮЗГУ, № 1 (2011). С. 7-15.
10. **Онищенко Д.А.** Вероятностное моделирование многомасштабного разрушения. // Механика твёрдого тела, № 5 (1999). С. 27-48.
11. **Hemmer P.C., Hansen A., Pradhan S.** Rupture processes in fibre bundle model // Lect. Notes Phys. 2007. V. 705. P. 27–55.
12. **Kun F., Raischel F., Hidalgo R.C., Herrmann H.J.** Extensions of Fibre Bundle Models // Lect. Notes Phys. 2007. V. 705. P. 57–92.
13. **Hidalgo R.C., Kun F., Herrmann H.J.** Bursts in a fiber model with continuous damage. / Phys. Rev. E 2001. V. 64. No. 6 (pt. 2).
14. **Daniels H. E.** The Statistical Theory of the Strength of Bundles of Threads. I. // Proc. Roy. Soc. London 1945 V. A183. P. 405.
15. **Kloster M., Hansen A., Hemmer P.C.** Burst avalanches in solvable models of fibrous materials // Phys. Rev. E 1997. V. 56. P. 2615.
16. **Pradhan S., Hansen A., Hemmer P.C.** Burst Statistics as a Criterion for Imminent Failure // in F.M. Borodich (ed.) IUTAM Bookseries, 1, vol. 10, IUTAM Symposium on Scaling in Solid Mechanics, Springer, 2009.
17. **Herrmann H.J., Kun F., Raischel F.** Some New Results on Fibre Models // Scaling in Solid Mechanics // Ed. F.M. Borodich. Springer Science, 2009. P. 263–272.