

## К вопросу об оценке коэффициента вариации наработки до отказа по квантилям малого уровня

Александр В. Федухин, Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Украина

Наталья В. Сеспедес Гарсия, Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Украина



Александр В.  
Федухин



Наталья В.  
Сеспедес Гарсия

**Резюме.** При решении различных задач по оценке надежности систем вероятностно-физическими методами важнейшей априорной информацией, позволяющей эффективно их решать, является информация о коэффициенте вариации наработки до отказа. В условиях малой статистики отказов оценка коэффициента вариации наработки до отказа является сложной задачей из-за сильно цензурированных выборок. В этих случаях используют методы оценки коэффициента вариации с привлечением дополнительной априорной информации и метода квантилей. Решение ряда задач по надежности с учетом различных распределений отказов значительно упрощается, если функции этих распределений табулированы в параметрах относительная наработка и коэффициент вариации. Впервые эффективное решение задач по надежности с использованием таблиц функции DN-распределения предложено для параметризации распределения в параметрах  $x$  и  $v$ , где  $x$  – параметр масштаба, относительная наработка  $x = at$ ;  $v$  – параметр формы, коэффициент вариации  $v = V$ ;  $a$  – средняя скорость деградации. Это позволило при табулировании уйти от реального масштаба времени, упростить табулирование функции и ее использование при решении ряда задач по надежности методом квантилей. В работе проанализирована эффективность метода квантилей по оценке коэффициента вариации наработки до отказа, являющегося одновременно параметром формы DN-распределения, в условиях малой статистики отказов и на его основе предложен новый, более эффективный метод. Метод оценки коэффициента вариации по квантилям малого и сверхмалого уровня опирается на анализ поведения функции  $a_i = f(t)$ , полученной методом квантилей. Наилучшим выбором априорного значения  $v$  считается такой выбор, при котором график зависимости  $a_i = f(t)$  наиболее точно описывается прямой горизонтальной линией, что полностью согласуется с гипотезой о постоянстве скорости деградации, принятой при формализации DN-распределения. В тех случаях, когда по графику зависимости  $a_i = f(t)$  трудно сделать вывод о наилучшем варианте выбора априорного значения  $v$  (особенно сложно сделать выбор по статистике первых отказов), можно воспользоваться следующим формальным критерием: наиболее приемлемое априорное значение параметра формы  $v$  лежит в области значений, при которых происходит смена знака тренда средней скорости деградации ( $h$ ) на графике  $a_i = f(t)$ . Исследованиями установлено, что наиболее значительные ошибки в оценке коэффициента вариации дают первые отказы. При обработке результатов испытаний на надежность считается, что первые отказы в выборке имеют наименьший информационный вес, так как их появление вызвано серьезными дефектами, не обнаруженными в процессе выходного контроля качества продукции. Первые отказы, как правило, «выпадают» из общей статистической закономерности и их рекомендуется исключать из последующего анализа. Предложенный метод оценки коэффициента вариации наработки до отказа по квантилям сверхмалого уровня позволяет в условиях ограниченной статистики отказов, когда другие методы не работают, довольно точно определять не только коэффициент вариации наработки до отказа и параметры DN-распределения, но и делать выводы о возможности и правомерности выравнивания (описания) исследуемой выборки с помощью данного диффузионного распределения, т.е. может использоваться в качестве своеобразного критерия согласия исследуемого эмпирического распределения отказов выбранной теоретической модели надежности. Описанный процесс нахождения наиболее истинных значений коэффициента вариации наработки до отказа с помощью формального критерия согласия может выполняться с использованием ЭВМ.

**Ключевые слова:** метод квантилей, коэффициент вариации, квантили малого и сверхмалого уровня, DN-распределение.

**Формат цитирования:** Федухин А.В., Сеспедес Гарсия Н.В. К вопросу об оценке коэффициента вариации наработки до отказа по квантилям малого уровня // Надежность. 2018. Т. 18, № 4. С. 10-15. DOI: 10.21683/1729-2646-2018-18-4-10-15

## 1. Введение

При решении различных задач по оценке надежности систем вероятностно-физическими методами [1] важнейшей априорной информацией, позволяющей эффективно их решать, является информация о коэффициенте вариации наработки до отказа. В условиях малой статистики отказов оценка коэффициента вариации наработки до отказа является сложной задачей из-за сильно цензурированных выборок. В этих случаях используют методы оценки коэффициента вариации с привлечением дополнительной априорной информации [2–4] и метода квантилей [1].

В работе проанализирована эффективность метода квантилей по оценке коэффициента вариации наработки до отказа (параметра формы  $DN$ -распределения [5–8]) в условиях малой статистики отказов и на его основе предложен новый, более эффективный, метод.

## 2. Метод квантилей

Если известно априорное значение параметра формы  $v$ , состоятельной оценкой которого является коэффициент вариации процесса деградации  $V$ , то параметр масштаба  $DN$ -распределения – среднюю скорость деградации  $a$  – можно определить в результате решения уравнения [1]:

$$\Phi\left(\frac{at_r - 1}{v\sqrt{at_r}}\right) + \exp(2v^{-2})\Phi\left(-\frac{at_r + 1}{v\sqrt{at_r}}\right) = \hat{\gamma}, \quad (1)$$

где  $\hat{\gamma} = r / N$  – квантиль, вычисляемая через отношение количества отказов  $r$  к объему выборки  $N$ , поставленной на испытания;  $t_r$  – время появления  $r$ -го отказа.

Решение ряда задач по надежности с учетом различных распределений отказов значительно упрощается, если функции этих распределений табулированы. Впервые эффективное решение задач по надежности с использованием таблиц функции  $DN$ -распределения предложено в [9], где функция  $DN$ -распределения была параметризована и табулирована в параметрах  $x$  и  $v$ . Использование в качестве параметра распределения относительной наработки  $at = x$  позволило при табулировании уйти от реального масштаба времени, упростить табулирование функции и ее использование при решении ряда задач по надежности методом квантилей

$$\Phi\left(\frac{x_r - 1}{v\sqrt{x_r}}\right) + \exp(2v^{-2})\Phi\left(-\frac{x_r + 1}{v\sqrt{x_r}}\right) = \hat{\gamma}, \quad (2)$$

где  $x_r = at_r$ .

С использованием таблиц  $DN$ -распределения [1] по исходным данным о  $\hat{\gamma}$  и  $v$  определяется значение  $x_r$ , и далее по формуле  $a = \frac{x_r}{t_r}$  вычисляется значение средней скорости деградации  $a$ .

Если в процессе оценки параметра масштаба  $DN$ -распределения  $a$  методом квантилей выбрано (ис-

ходя из самых общих рассуждений в области физики отказов [10]) априорное значение параметра формы  $v$ , заведомо превышающее действительное значение  $V$ , то это приводит к заниженным результатам прогноза средней скорости деградации. Если априорное значение параметра формы  $v$  заведомо меньше действительного значения  $V$ , то наоборот, это приводит к завышенным результатам прогноза. И только если выбранная априорная оценка параметра формы близка к действительному значению коэффициента вариации генеральной совокупности  $\hat{V}$ , то оценки  $a_r$ , полученные методом квантилей, располагаются вокруг средней оценки  $\hat{a}$  с минимальной дисперсией и представляют собой график зависимости  $a_i = f(t)$ , максимально приближающийся к горизонтальной прямой вокруг истинного среднего значения.

Оценки  $a_r$ , полученные методом квантилей, рекомендуется усреднять, отбросив первые отказы и взяв для усреднения конечный, наиболее линейаризованный, участок зависимости  $a_i = f(t)$ , или воспользоваться формулой для взвешенного среднего, предложенной в [1]. Необходимо иметь в виду, что использование статистической информации о первых отказах приводит к достаточно большим погрешностям в оценке параметра масштаба  $DN$ -распределения. Устойчивой закономерности в этом не обнаружено, так что оценки  $a_r$ , полученные по первым отказам, могут быть как завышенными, так и заниженными по отношению к  $\hat{a}$ , полученной для генеральной совокупности.

Используя закономерности, описанные выше, можно сформулировать следующий метод оценки коэффициента вариации наработки до отказа по малым выборкам.

## 3. Метод оценки коэффициента вариации по квантилям малого уровня

Процесс деградации изделий электронной техники, наряду с монотонными реализациями (механические разрушения при термо-электроциклировании) вследствие электрических явлений, имеет и немонотонные реализации, поэтому в общем случае принято рассматривать деградацию этих изделий как процесс с немонотонными реализациями (рисунок 1). При этом тангенс угла наклона среднего значения определяющих параметров процессов деградации (наклонная сплошная линия на графике), протекающих в изделии, представляет собой постоянную величину, равную средней скорости обобщенного процесса деградации

$$\operatorname{tg} \alpha = \hat{a} = \text{const}. \quad (3)$$

При формализации  $DN$ -распределения процесс деградации для совокупности однотипных изделий предполагается однородным, то есть с постоянной средней скоростью, постоянным средним квадратическим отклонением скорости и, как следствие, постоянным коэффициентом вариации скорости (рисунок 2).

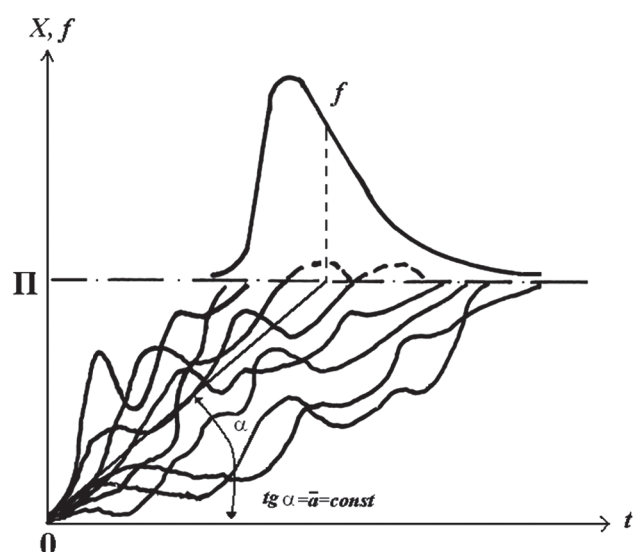


Рисунок 1 – График формирования плотности  $DN$ -распределения для изделия ( $\Pi$  – уровень предельного значения определяющего параметра, при достижении которого наступает отказ объекта)

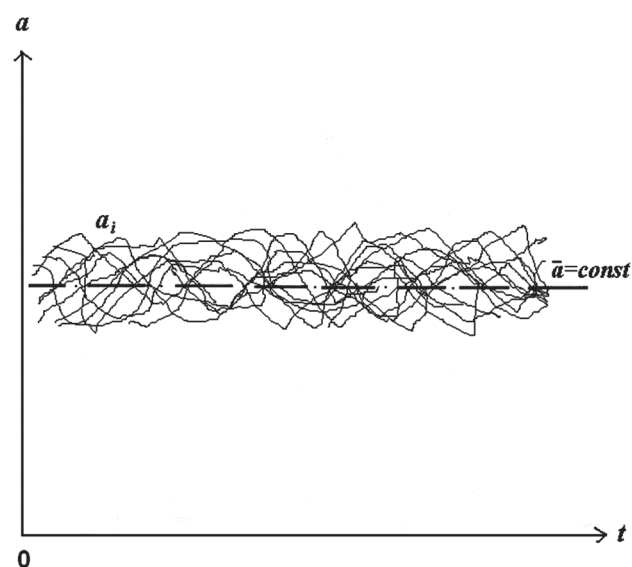


Рисунок 2 – График теоретической зависимости  $a_i = f(t)$  для совокупности изделий

Метод оценки коэффициента вариации по квантилям малого уровня опирается на анализ поведения графиков зависимости  $a_i = f(t)$ , полученной методом квантилей. Наилучшим выбором априорного значения  $\nu$  считается такой выбор, при котором график зависимости  $a_i = f(t)$  наиболее точно описывается прямой горизонтальной линией, что согласуется с гипотезой о постоянстве скорости деградации, принятой при формализации  $DN$ -распределения [4, 9] (рисунок 2).

В тех случаях, когда по графику зависимости  $a_i = f(t)$  трудно сделать вывод о наилучшем варианте выбора априорного значения  $\nu$  (особенно сложно сделать выбор по статистике первых отказов), можно воспользоваться следующим формальным критерием.

**Критерий подбора априорного значения параметра формы.** Наиболее приемлемое априорное значение параметра формы  $\nu$  лежит в области значений, при которых происходит смена знака тренда средней скорости деградации ( $h$ ) на графике  $a_i = f(t)$

$$h = \frac{a_n - a_1}{\bar{a}_i}, \quad (4)$$

где  $a_1$ ,  $a_n$  – оценки скорости деградации изделия, полученные по квантилям, соответственно, минимального и максимального уровней;  $\bar{a}_i$  – среднее значение оценок скоростей деградации, полученных методом квантилей

$$\bar{a}_i = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}. \quad (5)$$

Проиллюстрируем эффективность работы данного критерия на примере натурных испытаний на долговечность образцов изделий, статистика отказов которых хорошо описывается  $DN$ -распределением.

Таблица 1 – Таблица данных

$r$	$\gamma$	$t_p, 10^3$ цикл
1	0,0021	44
5	0,0107	49
10	0,0215	57
15	0,0323	59
20	0,0431	63
25	0,0539	66
30	0,0647	68
35	0,0755	73
40	0,0863	75
45	0,0971	78
50	0,1079	79
55	0,1187	82
60	0,1295	84
65	0,1403	86
70	0,1511	89
75	0,1619	91
80	0,1727	93
85	0,1835	95
90	0,1943	97
95	0,2051	99
100	0,2159	102
105	0,2267	102
110	0,2375	105
115	0,2483	106
120	0,2591	107
125	0,2699	108
130	0,2807	109
135	0,2915	111
140	0,3023	113
145	0,3131	114

**Пример.** Рассмотрим в качестве примера испытания образцов изделий из алюминиевого сплава В-95 на усталостную долговечность [10]. Необходимо оценить коэффициент вариации наработки до отказа предлагаемым методом по малым выборкам.

Первые элементы выборки объемом  $N = 463$  с соответствующими квантилями в диапазоне от 0,0021 до 0,3131 приведены в таблице 1. В таблице 1 введены следующие обозначения:  $r$  – накопленное количество отказов на момент времени  $t_r$ ;  $t_r$  – время испытаний, соответствующее накопленному количеству отказов;  $\gamma$  – эмпирическая вероятность отказа.

Проверим работу метода оценки коэффициента вариации по квантилям сверх малого уровня. В качестве исходных данных возьмем квантили уровня от 0,0021 до 0,0215. Для различных значений параметра  $v$  определим методом квантилей значения  $a_i$  по данным о  $\gamma$  и  $r$  и вычислим значение критерия  $h$  по формуле (4). Данные приведены в таблице 2.

График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0021 до 0,0215 приведен на рисунке 3.

**Выводы по оценкам параметров.** Смена знака тренда  $h$  произошла при  $0,3 < v < 0,4$ , поэтому

$$v = \frac{0,3 + 0,4}{2} = 0,35; \bar{a}_i = 8,473 \cdot 10^{-6} \text{ цикл}^{-1};$$

$$\delta_v = \frac{0,56 - 0,35}{0,56} = 0,375;$$

$$\delta_a = \frac{8,473 \cdot 10^{-6} - 5,9 \cdot 10^{-6}}{5,9 \cdot 10^{-6}} = 0,436.$$

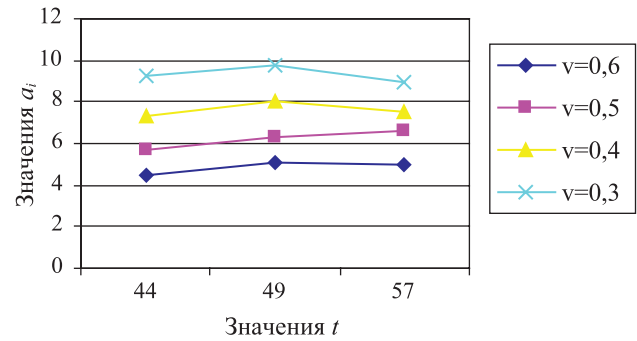


Рисунок 3 – График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0021 до 0,0215

Ошибки в оценке как параметра формы, так и параметра масштаба, по первым отказам довольно значительные. Известно, что при обработке результатов испытаний на надежность считается, что первые отказы в выборке имеют наименьший вес, так как их появление

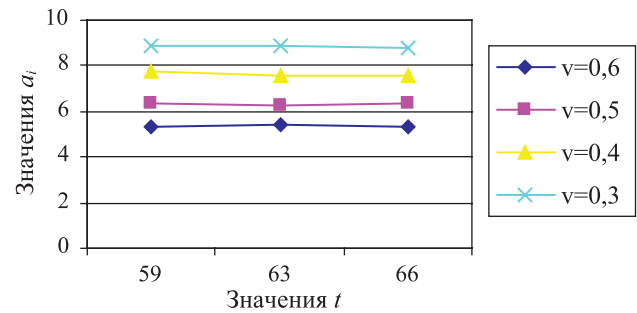


Рисунок 4 – График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0539

Таблица 2. Таблица данных

r	$\gamma$	$t_r, 10^3 \text{ цикл}$	$v = 0,6$		$v = 0,5$		$v = 0,4$		$v = 0,3$	
			$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$
1	0,0021	44	4,545	0,1106	5,681	0,1503	7,272	0,0358	9,318	<b>-0,0397</b>
5	0,0108	49	5,102		6,327		7,959		9,796	
10	0,0215	57	5,088		6,614		7,544		8,947	

Таблица 3. Таблица данных

r	$\gamma$	$t_r, 10^3 \text{ цикл}$	$v = 0,6$		$v = 0,5$		$v = 0,4$		$v = 0,3$	
			$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$
15	0,0323	59	5,254	0,0092	6,44	<b>-0,0119</b>	7,797	<b>-0,0288</b>	8,915	<b>-0,0143</b>
20	0,0431	63	5,397		6,349		7,619		8,889	
25	0,0539	66	5,303		6,364		7,576		8,788	

Таблица 4. Таблица данных

r	$\gamma$	$t_r, 10^3 \text{ цикл}$	$v = 0,6$		$v = 0,5$		$v = 0,4$		$v = 0,3$	
			$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$	$a_i, 10^{-6} \text{ цикл}^{-1}$	$h$
15	0,0323	59	5,254	0,0148	6,44	<b>-0,0273</b>	7,797	<b>-0,0615</b>	8,915	<b>-0,0747</b>
20	0,0431	63	5,397		6,349		7,619		8,889	
25	0,0539	66	5,303		6,364		7,576		8,788	
30	0,0647	68	5,441		6,47		7,647		8,823	
35	0,0755	73	5,342		6,164		7,260		8,356	
40	0,0863	75	5,333		6,267		7,333		8,267	



вызвано серьезными дефектами, не обнаруженными в процессе выходного контроля качества продукции. Первые отказы, как правило, «выпадают» из общей статистической закономерности, поэтому для дальнейшего анализа мы их отбросим и продолжим исследование эффективности метода оценки коэффициента вариации по квантилям уровня от 0,0323 до 0,0539. Данные значений  $a_i$  и  $h$  приведены в таблице 3.

График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0539 приведен на рисунке 4.

**Выводы по оценкам параметров.** Последняя смена знака тренда  $h$  произошла при  $0,5 < v < 0,6$ , поэтому

$$v = \frac{0,5 + 0,6}{2} = 0,55; \bar{a}_i = 5,851 \cdot 10^{-6} \text{ цикл}^{-1};$$

$$\delta_v = \frac{0,56 - 0,55}{0,56} = 0,018;$$

$$\delta_a = \frac{5,9 \cdot 10^{-6} - 5,851 \cdot 10^{-6}}{5,9 \cdot 10^{-6}} = 0,008.$$

Анализируя абсолютные значения трендов: 0,0092 и 0,0119, можно сделать еще и дополнительный вывод о том, что истинное значение параметра формы  $v$  находится ближе к значению 0,6.

Увеличим количество статистической информации об отказах до квантилей уровня 0,0863. Данные значений  $a_i$  и  $h$  приведены в таблице 4.

График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0863 приведен на рисунке 5.

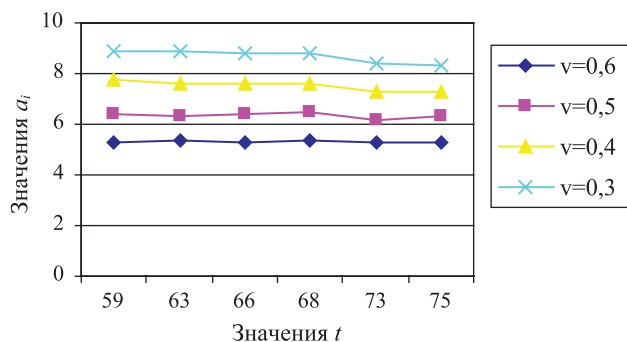


Рисунок 5 – График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0323 до 0,0864

**Выводы по оценкам параметров.** Смена знака тренда  $h$  не изменилась при увеличении статистики отказов и вновь произошла при  $0,5 < v < 0,6$ . Поэтому

$$v = \frac{0,5 + 0,6}{2} = 0,55; \bar{a}_i = 5,844 \cdot 10^{-6} \text{ цикл}^{-1};$$

$$\delta_v = \frac{0,56 - 0,55}{0,56} = 0,018;$$

$$\delta_a = \frac{5,9 \cdot 10^{-6} - 5,844 \cdot 10^{-6}}{5,9 \cdot 10^{-6}} = 0,009.$$

При имеющейся дискретности изменения априорного значения  $v$ , равной 0,1, дальнейшее увеличение статистики отказов не приводит к уточнению оценки параметра формы. Если принять дискретность равной 0,05, то значение  $v$  можно было бы оценить еще более точно. Важно отметить, что описанный процесс нахождения наиболее истинного значения выборочной оценки параметра формы  $v$  с помощью формального критерия согласия достаточно алгоритмичен и может с успехом выполняться на ЭВМ.

Посмотрим, какой график изменения средней скорости деградации получается при увеличении статистической информации до квантилей малого уровня 0,3131.

В [1, 10] приведены данные, полученные в результате обработки полной выборки образцов изделий В-95:  $N = 463$ ,  $\hat{V} = 0,56$ ,  $\hat{S} = 169 \cdot 10^3$  цикл,  $\hat{a} = 5,9 \cdot 10^{-6}$  цикл<sup>-1</sup>.

Оценки коэффициента вариации наработки до отказа по квантилям малого уровня с использованием предложенного формального критерия согласия, очень близки ( $v = 0,55$ ;  $\bar{a}_i = 5,844 \cdot 10^{-6}$  цикл<sup>-1</sup>) к оценкам, полученным экспериментальным путем по полной выборке.

На рисунке 6 изображен график зависимости оценки параметра масштаба DN-распределения, полученной по квантилям от 0,0021 до 0,3131 для  $v = 0,57$ .

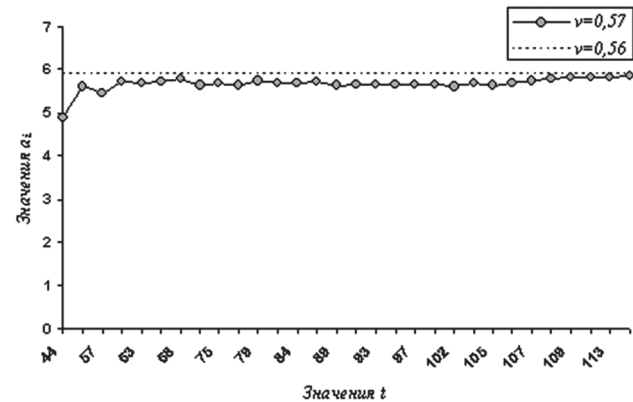


Рисунок 6 – График экспериментальной зависимости  $a_i = f(t)$  для квантилей от 0,0021 до 0,3131

Нетрудно видеть, что почти при полном совпадении априорного значения параметра формы  $v = 0,57$  с выборочной оценкой коэффициента вариации  $\hat{V} = 0,56$ , график зависимости  $a_i = f(t)$  представляет собой довольно ровную прямую линию, расположенную чуть ниже оценки  $\hat{a} = 5,9 \cdot 10^{-6}$  цикл<sup>-1</sup>, полученной по полной выборке. Исключением, как и предполагалось, являются первые отказы, которые дают несколько заниженную оценку средней скорости деградации и выпадают из общей тенденции.

## 4. Выводы

Предложенный в работе метод оценки коэффициента вариации наработки до отказа по квантилям позволяет в условиях ограниченной статистики отказов по квантилям сверхмалого уровня довольно точно

определять не только коэффициент вариации наработки до отказа и параметры  $DN$ -распределения, но и делать выводы о возможности и правомерности выравнивания (описания) исследуемой выборки с помощью данного диффузионного распределения, т.е. может использоваться в качестве своеобразного критерия согласия исследуемого эмпирического распределения отказов выбранной теоретической модели надежности. Описанный процесс нахождения наиболее истинных значений коэффициента вариации наработки до отказа с помощью формального критерия согласия может выполняться на ЭВМ.

### Библиографический список

1. Стрельников В.П. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем / В.П. Стрельников, А.В. Федухин. – К.: Логос, 2002. – 486 с.
2. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания надёжности технических объектов. – М.: Наука, 1989. – 303 с.
3. Прохоренко В.Д. Учёт априорной информации при оценке надёжности / В.Д. Прохоренко, В.Ф. Голиков. – М.: Наука и техника, 1978. – 255 с.
4. ГОСТ 27.201-81. Надёжность в технике. Оценка надёжности при малом числе наблюдений с использованием дополнительной информации. – Введ. 01.07.1981. – Москва: Издательство стандартов, 1981. – с.136.
5. Стрельников В.П. Прогнозирование ресурса изделий электронной техники // Надежность. – 2004. – №4 (12). – С.43-48;

6. Стрельников В.П. Методические погрешности расчета надежности систем // Надежность.- 2005. -№3 (12). – С.41-46.

7. Стрельников В.П. Методические погрешности оценок надежности электронных элементов и систем // Надежность.- 2009. – №2. – С. 27-32.

8. Стрельников В.П. Закономерности изменения наработки между отказами технических систем в процессе эксплуатации // Надежность, 2011. -№01 (36). – С. 17-22.

9. Погребинский С.Б. Проектирование и надежность многопроцессорных ЭВМ / С.Б. Погребинский, В.П. Стрельников. – М.: Радио и связь, 1988. – 168 с.

10. ГОСТ 27.005-97. Надежность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Введ. 05.12.1997. – Киев: Госстандарт Украины, 1997. – с.45.

### Сведения об авторах

**Александр В. Федухин**, доктор технических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией Гарантоспособных компьютерных систем для критических технологий и инфраструктур, Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Украина, тел. +380679898306 avfedukhin@gmail.com

**Наталья В. Сеспедес Гарсия**, научный сотрудник лаборатории Гарантоспособных компьютерных систем для критических технологий и инфраструктур, Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Украина, тел. +380932568725, nata05805@gmail.com

Поступила: 03.07.2018