Надежность, том 18, №1, 2018 Оригинальная статья
DOI: 10.21683/1729-2646-2018-18-1-20-25

Матричная форма функций вероятностей безотказной работы систем с ненагруженным резервированием (ч.2)

Дмитрий М. Кривопалов, *ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия*
Евгений В. Юркевич, *ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия*

Дмитрий М. Кривопалов

Евгений В. Юркевич

Резюме. *Показана важность проблем учета особенностей средств, обеспечивающих резервирование функциональных блоков, при надежностном проектировании систем. С ростом числа типов и количества задействованных элементов процесс вычислений надежности усложняется и занимает все большее время. Поэтому для упрощения расчетов принимаются допущения, например, в системах с резервированием используются однотипные элементы. Однако такой подход не позволяет оценить надежность системы, где применены принципиально различные элементы. В работе рассмотрены системы, включающие любое число принципиально различных элементов с ненагруженным типом резервирования. В качестве одного из путей решения названной проблемы выведен и математически обоснован метод, позволяющий в матричном виде представлять аналитическое выражение для вычисления вероятности её безотказной работы. Показано, что в этом случае возможна оценка надежности численными методами с применением приближенных вычислений на ЭВМ при интегрировании и дифференцировании. Приближенность результата таких вычислений предложено определять как точностью самой ЭВМ, так и сложностью исследуемой системы. При надежностном проектировании, когда процесс перерасчета производится многократно, этот недостаток является критичным. Целью сокращения времени расчета надежности исследуемой системы, а также повышения точности получаемых результатов в работе предлагается метод представления аналитического решения для вычисления ВБР. В результате появляется возможность упрощения механизма расчета систем с ненагруженным типом резервирования, а также повышения точности оценки их надежности. Поэтому для вычисления ВБР системы с произвольным количеством элементов в общем виде численными методами предлагается произвести число последовательных вычислений интегралов от произведения функции и производных на единицу меньше числа элементов системы. Учитывая особенности машинных вычислений и рекурсию алгоритма, вычисления ВБР системы уже из 5-ти и более элементов может занимать существенное время, кроме того, неизбежно накопление ошибки вычисления. Практические особенности решения задач обеспечения устойчивости работы космических аппаратов к внешним воздействиям характеризуются большой важностью фактора обеспечения скорости принятия решений по формированию сигнала управления, направленного на обеспечение гомеостаза характеристик работы бортовых систем. В работе математически обосновано введение метода представления аналитического выражения для вычисления ВБР системы из любого числа элементов, находящихся в ненагруженном резерве. Подобное представление может быть использовано для отображения данных в памяти ЭВМ. При известных коэффициентах матрицы это представление позволит избежать интегрирования и дифференцирования при вычислении ВБР, что значительно ускоряет вычисления и повышает точность результатов.*

Ключевые слова: *надежностное проектирование, технические системы, принципиально различные элементы системы, ненагруженное резервирование, аналитическое выражение, коэффициенты матрицы, ускорение вычислений, повышение точности оценки надежности.*

Формат цитирования: *Кривопалов Д.М., Юркевич Е.В. Матричная форма функций вероятностей безотказной работы систем с ненагруженным резервированием (ч.2) // Надежность. 2018. Т. 18, № 1. С. 20-25. DOI: 10.21683/1729-2646-2018-18-1-20-25*

Введение

Вычисление вероятности безотказной работы (ВБР) системы является неотъемлемым этапом надежностного проектирования. С ростом числа типов и количества задействованных элементов процесс вычислений надежности усложняется и занимает все большее время.

Для упрощения расчетов принимаются допущения, например, в системах с резервированием используются однотипные элементы. Однако такой подход не позволяет оценить надежность системы, где применены принципиально различные элементы. (Подобного рода задачи возникают при необходимости вычисления вероятности безотказного выполнения функции – оценке функциональной надежности [1].) В этом случае возможна оценка надежности численными методами с применением приближенных вычислений на ЭВМ при интегрировании и дифференцировании.

Приближенность результата таких вычислений определяется как точностью самой ЭВМ, так и сложностью исследуемой системы [2]. При надежностном проектировании, когда процесс перерасчета производится многократно, этот недостаток является критичным.

Целью сокращения времени расчета надежности исследуемой системы, а также повышения точности получаемых результатов в данной работе предлагается метод представления аналитического решения для вычисления ВБР систем с ненагруженным типом резервирования, поскольку они являются одними из наиболее надежных и наиболее сложно рассчитываемых систем.

Метод численного решения

Для определения ВБР системы в общем виде при ненагруженном резервировании используется рекуррентная формула:

$$P_N(T) = P_{N-1}(T) + \int_0^T p_n(\tau,T)\cdot f_{N-1}(\tau)d\tau,$$

где $P_N(T)$ – ВБР системы из N элементов в течение времени T;

$P_{N-1}(T)$ – ВБР системы из (N–1) элементов в течение времени T;

$p_n(\tau,T)$ – ВБР n-го (подключаемого) элемента в течение периода времени от τ до T;

$f_{N-1}(\tau)$ – плотность распределения отказов системы из (N–1) элементов для момента времени τ

$$f_{N-1}(T) = -\frac{P_{N-1}(T)}{dT}.$$

Поэтому для вычисления ВБР системы из N элементов в общем виде численными методами необходимо произвести (N–1) последовательных вычислений интегралов от произведения функции и производных $f_{N-1}(T)$. Учитывая особенности машинных вычислений и рекурсию алгоритма, вычисления ВБР системы уже из 5-ти и более элементов может занимать существенное время, кроме того, неизбежно накопление ошибки вычисления.

Замечание: Формулы используются при расчетах надежности на практике в предположении, что резервные элементы не теряют надежность в отключенном виде.

Аналитические решения

Рассмотрим различные случаи ненагруженного резервирования с целью получения аналитических решений и анализа результатов.

Система из 1-го элемента

Пусть интенсивность отказа элемента равна λ_1, тогда ВБР системы:

$$P_1(T) = e^{-\lambda_1 T}.$$

Функция ВБР от времени имеет вид:

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t}.$$

Система из 2-х элементов

Возможны принципиально два различных случая.

Интенсивность отказа 2-го подключаемого элемента равна λ_1, тогда ВБР системы:

$$P_2(T) = P_1(T) + \int_0^T p_2(\tau,T)\cdot f_1(\tau)d\tau,$$

$$p_2(\tau,T) = e^{-\lambda_1(T-\tau)},$$

$$f_1(\tau) = -\frac{P_1(\tau)}{d\tau} = -\frac{e^{-\lambda_1\tau}}{d\tau} = \lambda_1\cdot e^{-\lambda_1\tau},$$

$$P_2(T) = e^{-\lambda_1 T} + \int_0^T e^{-\lambda_1(T-\tau)}\cdot\lambda_1\cdot e^{-\lambda_1\tau}d\tau =$$

$$= e^{-\lambda_1 T} + \lambda_1\cdot e^{-\lambda_1 T}\cdot\int_0^T 1d\tau = e^{-\lambda_1 T} + \lambda_1\cdot e^{-\lambda_1 T}\cdot T = (1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T}.$$

Интенсивность отказа 2-го подключаемого элемента равна λ_2, тогда ВБР системы:

$$P_2(T) = P_1(T) + \int_0^T p_2(\tau,T)\cdot f_1(\tau)d\tau,$$

$$p_2(\tau,T) = e^{-\lambda_2(T-\tau)},$$

$$f_1(\tau) = -\frac{P_1(\tau)}{d\tau} = -\frac{e^{-\lambda_1\tau}}{d\tau} = \lambda_1\cdot e^{-\lambda_1\tau},$$

$$P_2(T) = e^{-\lambda_1 T} + \int_0^T e^{-\lambda_2(T-\tau)}\cdot\lambda_1\cdot e^{-\lambda_1\tau}d\tau = e^{-\lambda_1 T} + \lambda_1\cdot e^{-\lambda_2 T}\cdot$$

$$\cdot\int_0^T e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau}d\tau = e^{-\lambda_1 T} + \lambda_1\cdot e^{-\lambda_2 T}\cdot\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\left(e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}-1\right) =$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T}.$$

Функция ВБР от времени имеет виды:

в случае совпадения элементов:

$$P_2(t) = (1+\lambda_1\cdot t)\cdot e^{-\lambda_1 t};$$

в случае несовпадения элементов:

$$P_2(t)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 t}.$$

Система из 3-х элементов

Случай, когда к двум одинаковым элементам подключается аналогичный третий.

Интенсивность отказа элемента равна λ_1, тогда ВБР системы:

$$P_3(T)=P_2(T)+\int_0^T p_3(\tau,T)\cdot f_2(\tau)d\tau,$$

$$P_2(T)=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T},$$

$$p_3(\tau,T)=e^{-\lambda_1(T-\tau)},$$

$$f_2(\tau)=-\frac{P_2(\tau)}{d\tau}=-\frac{(1+\lambda_1\cdot\tau)\cdot e^{-\lambda_1\tau}}{d\tau}=\lambda_1{}^2\cdot\tau\cdot e^{-\lambda_1\tau},$$

$$P_3(T)=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T}+\int_0^T e^{-\lambda_1(T-\tau)}\cdot\lambda_1{}^2\cdot\tau\cdot e^{-\lambda_1\tau}d\tau=$$

$$=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T}+\lambda_1{}^2\cdot e^{-\lambda_1 T}\cdot\int_0^T\tau d\tau=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T}+$$

$$+\lambda_1{}^2\cdot e^{-\lambda_1 T}\cdot\frac{T^2}{2}=\left(1+\lambda_1\cdot T+\frac{\lambda_1{}^2}{2}\cdot T^2\right)\cdot e^{-\lambda_1 T}.$$

Случай, когда к двум одинаковым элементам подключается элемент другого типа.

Интенсивность отказа элемента равна λ_2, тогда ВБР системы:

$$P_3(T)=P_2(T)+\int_0^T p_3(\tau,T)\cdot f_2(\tau)d\tau,$$

$$P_2(T)=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T},$$

$$p_3(\tau,T)=e^{-\lambda_2(T-\tau)},$$

$$f_2(\tau)=-\frac{P_2(\tau)}{d\tau}=-\frac{(1+\lambda_1\cdot\tau)\cdot e^{-\lambda_1\tau}}{d\tau}=\lambda_1{}^2\cdot\tau\cdot e^{-\lambda_1\tau},$$

$$P_3(T)=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T}+\int_0^T e^{-\lambda_2(T-\tau)}\cdot\lambda_1^2\cdot\tau\cdot e^{-\lambda_1\tau}d\tau=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T}+$$

$$+\lambda_1{}^2\cdot e^{-\lambda_2 T}\cdot\int_0^T e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau}\cdot\tau d\tau=(1+\lambda_1\cdot T)\cdot e^{-\lambda_1 T}+\lambda_1{}^2\cdot e^{-\lambda_2 T}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot T\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}-\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\lambda_2{}^2-2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot T\right)e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1{}^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\cdot e^{-\lambda_2 T}.$$

Случай, когда к двум различным элементам подключается элемент совпадающего типа.

Интенсивность отказа элемента равна λ_1, тогда ВБР системы:

$$P_3(T)=P_2(T)+\int_0^T p_3(\tau,T)\cdot f_2(\tau)d\tau,$$

$$P_2(T)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T},$$

$$p_3(\tau,T)=e^{-\lambda_1(T-\tau)},$$

$$f_2(\tau)=-\frac{P_2(\tau)}{d\tau}=-\frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\tau}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2\tau}}{d\tau}=$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\tau}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2\tau},$$

$$P_3(T)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T}+\int_0^T e^{-\lambda_1(T-\tau)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\tau}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2\tau}\right)d\tau=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T}+e^{-\lambda_1 T}\cdot\int_0^T\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}\right)d\tau=$$

$$=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T}+e^{-\lambda_1 T}\times$$

$$\times\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot T+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\cdot e^{(\lambda_1-\lambda_2)T}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\lambda_2{}^2-2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot T\right)e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1{}^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\cdot e^{-\lambda_2 T}.$$

Замечание: Последние два случая показывают, что вид функции ВБР не зависит от порядка подключения элементов в ненагруженной системе, а зависит только от типа элементов.

Случай, когда к двум различным элементам подключается элемент несовпадающего типа.

Интенсивность отказа элемента равна λ_3, тогда ВБР системы:

$$P_3(T)=P_2(T)+\int_0^T p_3(\tau,T)\cdot f_2(\tau)d\tau,$$

$$P_2(T)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T},$$

$$p_3(\tau,T)=e^{-\lambda_3(T-\tau)},$$

$$f_2(\tau)=-\frac{P_2(\tau)}{d\tau}=-\frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\tau}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2\tau}}{d\tau}=$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\tau}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2\tau},$$

$$P_3(T)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T}+\int_0^T e^{-\lambda_3(T-\tau)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1\tau}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2\tau}\right)d\tau=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T}+e^{-\lambda_3 T}\times\times\int_0^T\left(\begin{array}{l}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{(\lambda_3-\lambda_1)\tau}+\\+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{(\lambda_3-\lambda_2)\tau}\end{array}\right)d\tau=$$

$$=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 T}+e^{-\lambda_3 T}\times$$

$$\times\left(\begin{array}{l}\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}\cdot e^{(\lambda_3-\lambda_1)T}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}+\\+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_2)}\cdot e^{(\lambda_3-\lambda_2)T}-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_2)}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}\cdot e^{-\lambda_1 T}+\frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_2)}\cdot e^{-\lambda_2 T}+$$

$$+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)\cdot(\lambda_2-\lambda_3)}\cdot e^{-\lambda_3 T}.$$

Рассмотрим подробно полученные функции ВБР.
Функция ВБР от времени имеет виды:
- один элемент интенсивностью λ_1

$$P_1(t)=e^{-\lambda_1 t};$$

- для двух элементов:
два элемента интенсивностью λ_1

$$P_2(t)=(1+\lambda_1\cdot t)\cdot e^{-\lambda_1 t};$$

один элемент интенсивностью λ_1, второй – λ_2

$$P_2(t)=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot e^{-\lambda_2 t};$$

- для трех элементов:
три элемента интенсивностью λ_1

$$P_3(t)=\left(1+\lambda_1\cdot t+\frac{\lambda_1^{\,2}}{2}\cdot t^2\right)\cdot e^{-\lambda_1 t};$$

два элемента интенсивностью λ_1, третий – λ_2

$$P_3(t)=\left(\frac{\lambda_2^{\,2}-2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot t\right)e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1^{\,2}}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\cdot e^{-\lambda_2 t};$$

три элемента с интенсивностями λ_1, λ_2, λ_3 соответственно

$$P_3(t)=\frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_1)}\cdot e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_3-\lambda_2)}\cdot e^{-\lambda_2 t}+$$

$$+\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_3)\cdot(\lambda_2-\lambda_3)}\cdot e^{-\lambda_3 t}.$$

Из вида зависимостей видно, что при наличии «повторяющихся» элементов возрастает степень многочлена при соответствующей экспоненте. При подключении «неповторяющегося» элемента повышения степени многочлена не происходит, однако коэффициенты в формулах перестраиваются. Для представления формул в памяти ЭВМ сформируем метод их представления.

Алгоритм представления аналитического решения

Для выведения общего алгоритма рассмотрим произвольную систему, состоящую из 4-х типов элементов с интенсивностями отказов λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Как было показано ранее, в общем виде формула для вычисления вероятности безотказной работы может быть составлена в виде ряда, содержащего экспоненты чисел $-\lambda_1 t$, $-\lambda_2 t$, $-\lambda_3 t$, $-\lambda_4 t$.

$$P_4(t)=A(t)\cdot e^{-\lambda_1 t}+B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t}+C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t}+D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t}$$

Функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ представляют собой многочлены по степени t, количество слагаемых которых определяется количеством соответствующих одинаковых элементов системы. То есть, если в системе 2 элемента с интенсивностью отказов λ_1, то многочлен $A(t)$ содержит 2 слагаемых:

$$A(t)=a_0+a_1 t$$

В общем случае количество одинаковых элементов в системе не известно. При последовательном подсоединении элементов к системе, если появляется новый тип элементов, то в выражении образуется новый тип экспоненты, а если тип подключаемого элемента совпадает с каким либо уже подключенным, то в соответствующем многочлене появляется новое слагаемое. Например, для системы из 4-х элементов возможно два вида «краевых» случая:

- 4 различных элемента – тогда все многочлены содержат ровно одно ненулевое слагаемое и имеются все виды экспонент;
- 4 одинаковых типа элементов – имеется только один многочлен, содержащий 4 элемента и один вид экспоненты.

Чтобы описать подобную систему, дополним все многочлены нулевыми коэффициентами, чтобы они содержали максимальное количество элементов.

$$A(t)=a_0+a_1 t+a_2 t^2+a_3 t^3$$

$$B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$C(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

$$D(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3$$

Представим для наглядности коэффициенты в виде матрицы:

$$\begin{array}{c|cccc} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ & - & - & - & - \\ t^0 & a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ t^1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ t^2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ t^3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$

Обозначим матрицу исходных коэффициентов A, матрицу интенсивностей отказов Λ и матрицу степеней T

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Введем также вспомогательную функцию $F(A,t)$, преобразующую матрицы по следующему правилу:

$$B = F(A,t), \text{ где } B_{ij} = e^{-t \cdot A_{ij}}.$$

Тогда ВБР системы, характеризуемой матрицей A, всегда можно определить по формуле:

$$P(t) = A^{\mathrm{T}} \cdot T \cdot F(\Lambda, t)^{T}.$$

Пример. Выведенные функции ВБР $P(t)$ характеризуются следующими матрицами с соответствующими вспомогательными матрицами T и Λ:

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t},$$

$$A = (1),$$

$$P_2(t) = (1 + \lambda_1 \cdot t) e^{-\lambda_1 t},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{-\lambda_2 t},$$

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3(t) = \left(1 + \lambda_1 \cdot t + \frac{\lambda_1^{\,2}}{2} \cdot t^2\right) \cdot e^{-\lambda_1 t},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\lambda_1^{\,2}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3(t) = \left(\frac{\lambda_2^{\,2} - 2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot t\right) e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1^{\,2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \cdot e^{-\lambda_2 t},$$

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2^{\,2} - 2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} & \dfrac{\lambda_1^{\,2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} & 0 \\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3(t) = \frac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)} \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)} \cdot e^{-\lambda_2 t} + \\ + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot (\lambda_2 - \lambda_3)} \cdot e^{-\lambda_3 t},$$

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)} & \dfrac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)} & \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot (\lambda_2 - \lambda_3)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выводы

Выведен и математически обоснован метод представления аналитического выражения для вычисления ВБР системы из любого числа элементов, находящихся в ненагруженном резерве. Подобное представление может быть использовано для отображения данных в памяти ЭВМ. При известных коэффициентах матрицы такое представление позволит избежать интегрирования и дифференцирования при вычислении ВБР, что значительно ускоряет вычисления и повышает точность результатов.

Библиографический список

1. Шубинский И.Б. Функциональная надежность информационных систем. Методы анализа/ М.: ООО «Журнал «Надежность» 2012 -295с.

2. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. /СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704с.

3. Кривопалов Д.М. Доклад «Особенности динамического программирования в надежностном проектировании программно-технических систем космических аппаратов». Пятая международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы создания космических систем дистанционного зондирования Земли». Москва 2017 г.

Сведения об авторах:

Дмитрий М. Кривопалов, инженер ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия, +7 926-840-06-58, e-mail: persival92@rambler.ru

Евгений В. Юркевич, д.т.н., профессор, г.н.с. ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия, +7 495-334-88-70, e-mail: yurk@ipu.ru

Поступила 29.08.2017