

*Швецова-Шиловская Т.Н., Громова Т.В., Соколов Ф.П., Ратушенко В.Г.*

## **РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕГО ИСПЫТАНИЙ С УЧЕТОМ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ СОСТАВНЫХ ЧАСТЕЙ**

*В работе предложен расчетно-экспериментальный метод оценки показателей надежности сложных химико-технологических систем на основе результатов испытаний с учетом имеющейся априорной информации о надежности по результатам испытаний составных частей. В результате получено, что учет априорной информации при оценке и контроле надежности системы позволяет существенно сократить объем ее требуемых испытаний.*

**Ключевые слова:** оценка показателей надежности, расчетно-экспериментальный метод учета априорной информации при оценке надежности сложных систем, результаты испытаний.

Настоящий расчетно-экспериментальный метод применяется для оценки нижних доверительных границ ВБР (вероятности безотказной работы) и средней наработки на отказ технологического комплекса (системы) на основе результатов испытаний системы на надежность с учетом априорной информации о надежности системы по результатам автономных испытаний составных частей (компонентов). При этом в качестве учитываемой априорной информации о надежности системы используется оценка ВБР в виде доверительного интервала  $[P_{H0}(t_H), 1]$  при доверительной вероятности  $\gamma_0$ , где  $P_{H0}(t_H)$  – априорная оценка нижней доверительной границы ВБР системы. Такая оценка может быть получена с помощью расчетно-экспериментального метода оценки показателей надежности комплекса оборудования по результатам автономных испытаний его составных частей.

Однако в литературе, посвященной методам учета априорной информации при оценке надежности сложных систем [1-6], этот важный для практики случай, когда по результатам предварительных натуральных испытаний известна интервальная оценка ВБР, что имеет место при статистической обработке ограниченного экспериментального материала, рассмотрен только в предположении, что для известного априори доверительного интервала достоверность равна единице [2, 4].

Разработан метод учета априорной информации в виде интервальной оценки ВБР при любом заданном значении доверительной вероятности.

Рассмотрим последовательность из  $N$  независимых испытаний системы, в каждом из которых при длительности испытаний  $t_H$  возможны два исхода:  $A$  и  $\bar{A}$  (успех и отказ). Вероятности исходов равны  $P(t_H)$  и  $Q(t_H)$  соответственно, причем  $P(t_H) = 1 - Q(t_H)$ . В каждом испытании вероятность  $P(t_H) = P = \text{const}$ . Испытания по такой схеме называются испытаниями по схеме Бернулли.

Если после проведения  $N$  испытаний зарегистрировано  $m$  отказов, то нижняя граница  $P_H$  доверительного интервала находится из классического выражения [7]:

$$1 - \gamma = \sum_{k=0}^m \binom{N}{k} P^{N-k} (1-P)^k,$$

$$\text{где } \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}.$$

В случае отсутствия отказов при испытаниях [8]:

$$P_H = \sqrt[N]{1 - \gamma}.$$

Пусть  $P \in [0, 1]$  и известно, что по результатам предварительных автономных испытаний составных частей системы на надежность получена априорная оценка ВБР системы в виде:

$$\text{Вер} \{P \in [P_{H0}, 1]\} = \gamma_0,$$

где  $P_{H0}$  – априорная нижняя граница  $P$  и  $\gamma_0$  – априорная доверительная вероятность. При этом очевидно, что

$$\text{Вер} \{P \in [0, P_{H0}]\} = 1 - \gamma_0,$$

и априорная плотность вероятности записывается в виде [9]:

$$\phi(P) = \begin{cases} \frac{1 - \gamma_0}{P_{H0}} & \forall P \in [0, P_{H0}] \\ \frac{\gamma_0}{1 - P_{H0}} & \forall P \in [P_{H0}, 1] \end{cases}. \quad (1)$$

Выбор функции плотности вероятности в виде (1) основан на использовании распределения с наибольшим рассеянием при имеющейся априорной информации, что делает расчет обоснованным.

Апостериорную плотность при испытаниях, проводимых по схеме Бернулли [5-6], можно записать в виде [2]:

$$f(P) = \frac{\phi(P) \cdot P^{N-m} (1-P)^m}{\int_0^1 P^{N-m} (1-P)^m \cdot \phi(P) dP}. \quad (2)$$

Выражение (2) с учетом уравнения (1) получаем:

$$f(P) = \begin{cases} (1-\gamma_0) \cdot P^{N-m} (1-P)^m (P_{H0}C)^{-1}, & \forall P \in [0, P_{H0}] \\ \gamma_0 P^{N-m} (1-P)^m (P_{H0}C)^{-1}, & \forall P \in [P_{H0}, 1] \end{cases},$$

где приняты следующие обозначения:

$$C = \frac{1-\gamma_0}{P_{H0}} I_1 + \frac{\gamma_0}{1-P_{H0}} I_2; \quad I_1 = \int_0^{P_{H0}} P^{N-m} (1-P)^m dP; \quad I_2 = \int_{P_{H0}}^1 P^{N-m} (1-P)^m dP.$$

Для удобства вычисления интегралов  $I_1$  и  $I_2$  рассмотрим их представление в общем виде и, применив бином Ньютона, после интегрирования получим:

$$\int_a^b P^{N-m} (1-P)^m dP = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i \binom{m}{i}}{N-m+i+1} (b^{N-m+i+1} - a^{N-m+i+1}) \quad (3)$$

Если в выражении (3)  $a = 0$  и  $b = 1$ , получим бета-функцию [10]:

$$B(N-m+1, m+1) = \frac{\Gamma(N-m+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(N+2)}, \quad (4)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма – функция, определяемая в случае целых положительных чисел  $\vartheta$  равенством  $\Gamma(\vartheta) = (\vartheta-1)!$ . С учетом этого выражение (4) имеет вид:

$$B(N-m+1, m+1) = \frac{(N-m)!m!}{(N+1)!} = \frac{1}{N+1 \binom{N}{m}}.$$

Используя формулу (3), можно записать следующее выражение для  $C$ :

$$C = \frac{\gamma_0}{1-P_{H0}} \left[ \frac{1}{(N+1) \binom{N}{m}} - \left( 1 - \frac{1-P_{H0}}{\gamma_0} \right) P_{H0}^{N-m} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i \binom{m}{i} P_{H0}^i}{N-m+i+1} \right].$$

Оценку нижней доверительной границы вероятности  $P_{H1}$  безотказной работы системы с учетом априорной информации находим из условия:

$$\gamma_1 = \int_{P_{H1}}^1 f(P) dP, \quad (5)$$

где  $\gamma_1$  – апостериорная доверительная вероятность.

После подстановки в уравнение (5) соответствующего значения  $f(P)$  для  $P_{H1} \geq P_{H0}$  и интегрирования получим:

$$\gamma_1 = \frac{1 - (N+1) \binom{N}{m} P_{H1}^{N-m+1} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i \binom{m}{i} P_{H1}^i}{N-m+i+1}}{1 - (N+1) \binom{N}{m} \left(1 - \frac{1-P_{H0}}{\gamma_0}\right) P_{H0}^{N-m} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i \binom{m}{i} P_{H0}^i}{N-m+i+1}}. \quad (6)$$

Используя функцию биномиального распределения  $B_i$  [5], уравнение (6) можно представить в более удобном для практического применения виде:

$$B_i(N+1, P_{H1}, m) = 1 - \gamma'_1, \quad (7)$$

$$\text{где } \gamma'_1 = \gamma_1 \left[ 1 - \frac{1}{P_{H0}} \left( 1 - \frac{1-P_{H0}}{\gamma_0} \right) B_i(N+1, P_{H0}, m) \right].$$

Корень уравнения (7)  $P_{H1} = f_1(N+1, m, \gamma'_1)$ , представляющий собой значение нижней границы доверительного интервала для параметра  $P$  с учетом априорной информации, табулирован в [5], что позволяет без особых затруднений получать интервальную оценку надежности системы с учетом текущих опытных данных  $(N, m)$ , где  $N$  – общее число испытаний (тактов функционирования),  $m$  – число испытаний, в которых зафиксирован отказ, и априорной информации в виде некоторого доверительного интервала  $[P_{H0}, 1]$  при доверительной вероятности  $\gamma_0$ .

На практике применительно к таким технологическим комплексам, например, как объекты по уничтожению химического оружия, используется оборудование в единичных экземплярах, собственно и представляющих собой генеральную совокупность изделий. В данном случае речь идет об объединении однородной информации о надежности (одни и те же составные части в автономном и комплексном виде) а проверку статистической совместимости априорной и текущей информации по результатам испытаний можно не проводить.

В случае использования информации о надежности составных частей и систем-аналогов проверка статистической совместимости априорной и текущей информации по результатам испытаний осуществляется на основе теории проверки статистических гипотез [3]. Исходной гипотезой, при которой может быть применен метод, является гипотеза  $H_0$ , заключающаяся в том, что  $P_0 = P_T = P$ , где  $P_0$ ,  $P_T$ ,  $P$  – априорное, текущее и истинное значение ВБР системы соответственно. Если гипотеза  $H_0$  отвергается, то принимается одна из двух конкурирующих гипотез  $H_1 \{P_0 < P_T\}$  или  $H_2 \{P_0 > P_T\}$ .

Возможные методы решения подобного рода задач изложены в [11]. Рассмотрим кратко решение поставленной задачи с учетом специфики имеющихся данных. Множество всех возможных исходов,

определяемых числом безотказных испытаний при  $N$  испытаниях, состоит из дискретных точек,  $R = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . Разделим это множество точками  $r_H$  и  $r_B$  на три подмножества, определяющие соответственно: область нижних критических значений  $R_H = \{0, 1, 2, \dots, r_H\}$ ; область допустимых значений  $R_D = \{r_H + 1, r_H + 2, \dots, r_B - 1\}$ ; область верхних критических значений  $R_B = \{r_B, r_B + 1, \dots, N\}$ .

Зададимся уровнем значимости  $\alpha = \alpha_H + \alpha_B$ , из которого можно было бы определять границы области допустимых значений для исходов испытаний при гипотезе  $H_0$ .

По определению нижняя критическая область будет выбрана в соответствии с заданным уровнем значимости, если выполняется условие

$$P(r \leq r_H / H_0) \leq \alpha_H. \quad (8)$$

По отношению к верхней критической области также может быть установлено неравенство

$$P(r \geq r_B / H_0) \leq \alpha_B. \quad (9)$$

Эти неравенства при справедливости гипотезы  $H_0$  гарантируют попадание исходов опыта в одну из критических областей с вероятностью не более  $\alpha$ .

При независимых исходах испытаний соотношения (8) и (9) могут быть определены на основе биномиального закона распределения в виде:

$$\sum_{i=0}^{r_H} C_N^i P_T^i (1 - P_T)^{N-i} \leq \alpha_H \quad (10)$$

$$\sum_{i=r_B}^N C_N^i P_T^i (1 - P_T)^{N-i} \leq \alpha_B \quad (11)$$

Сопоставляя соотношения (10) и (11) с соответствующими соотношениями для вычисления доверительных пределов, приходим к выводу, что решение поставленной задачи может быть основано на соответствующих таблицах для определения доверительных интервалов [5]. При этом входами в таблицы в рассматриваемом случае должны быть  $P_T$  и  $N$ , которые при заданном значении  $\alpha$  обеспечивают выбор  $r_H$  и  $r_B$ . На основании этих величин можно определять пределы  $P_H = r_H / N$  и  $P_B = r_B / N$ , в которых должно быть заключено априорное значение надежности, чтобы при выбранном  $\alpha$  можно было утверждать о сходимости априорных и текущих опытных данных. При этом уровень значимости  $\alpha$  может быть выбран в пределах  $0,2 - 0,05$  при  $\alpha_H = \alpha_B = \alpha / 2$ .

Представляет практический интерес применение формулы (7) для случая, когда  $m = 0$ , то есть

$$\gamma_1 = \frac{1 - P_{H1}^{N+1}}{1 - P_{H0}^N \left( 1 - \frac{1 - P_{H0}}{\gamma_0} \right)},$$

откуда

$$P_{H1} = \sqrt[N+1]{1 - \gamma_1 \left[ 1 - P_{H0}^N \left( 1 - \frac{1 - P_{H0}}{\gamma_0} \right) \right]}. \quad (12)$$

Как видно из выражения (12), полученная при условии проведения  $N$  испытаний системы оценка нижней доверительной границы ВБР  $P_{H1}$  будет выше, чем  $P_{H0}$ , то есть выше точность интервальной оценки надежности.

Повышение точности оценки при ограниченном объеме испытаний эквивалентно уменьшению объема испытаний при заданной точности.

По уравнению (12) можно найти объем испытаний  $N$ , необходимый для подтверждения заданных требований по надежности системы для случая  $m=0$  при условии, что априорное значение доверительного интервала ВБР, полученное с достоверностью  $\gamma_0 = 0$  на этапе предварительных испытаний, равно  $[P_{H0}, 1]$ .

Таким образом, выражение (12) может быть использовано для оценки надежности сложной системы по результатам ее испытаний (при  $m=0$ ) с учетом априорной информации, так и при планировании испытаний на надежность сложной системы с учетом априорной информации.

Рассмотрим применение разработанного метода на примере. Пусть по результатам предварительных испытаний составных частей системы получена оценка нижней границы доверительного интервала априорной ВБР на время  $t_H=2$ ч  $P_{H0}(t_H)=0,87$  с априорной доверительной вероятностью  $\gamma_0=0,8$ . Требуется определить минимальный объем испытаний в виде  $N$  циклов испытаний при  $t_H=2$  ч для подтверждения с учетом априорной информации заданного значения нижней границы ВБР системы  $P_{H1}(2) = 0,912$  с доверительной вероятностью  $\gamma_1=0,8$ . Так как речь идет о минимальном объеме испытаний, то планирование испытаний осуществляется для случая  $m=0$  и используется формула (12). Подставляя исходные данные в выражение (12) и рассматривая его как неравенство, имеем:

$$0,912 \leq \sqrt[N+1]{1 - 0,8 \left[ 1 - 0,87^N \left( 1 - \frac{1 - 0,87}{0,8} \right) \right]},$$

откуда находим  $N=10$  испытаний.

Отметим, что минимальное число испытаний системы для подтверждения заданного в примере уровня надежности без учета априорной информации согласно [12] составляет  $N=17$  безотказных испытаний.

Как видим, учет априорной информации при оценке и контроле надежности системы позволяет существенно сократить объем ее текущих испытаний.

## Литература

1. Прохоренко В.А., Голиков В.Ф. Учет априорной информации при оценке надежности. Минск: «Наука и техника», 1979, 208 с.
2. Лукьященко В.И., Терпиловский А.Н. Об учете предварительной информации при оценке надежности сложных систем. В сб.: О надежности сложных технических систем. – М.: Советское радио, 1966, с. 263-275.

3. **Червоный А.А., Лукьященко В.И., Котин Л.В.** Надежность сложных систем.-М.: Машиностроение, 1976, 288 с.
4. **Судаков Р.С., Чеканов А.Н.** К вопросу об учете предварительной информации в схеме биномиальных испытаний. – Надежность и контроль качества, 1974, № 1, с. 24-28.
5. Статистические задачи обработки систем и таблицы для числовых расчетов показателей надежности. Под ред. **Р.С.Судакова.**- М.: Высшая школа, 1975, 604 с.
6. **Ушаков И.А.** Курс теории надежности систем: учебн. пособие для вузов / М.: Дрофа, 2008. 239 с.
7. **Шор Я.Б., Кузьмин Ф.И.** Таблицы для анализа и контроля надежности. М: Советское радио, 1968, 288 с.
8. **Вентцель Е.С.** Теория вероятности. – М.: Физматгиз, 1962, 564 с.
9. **Плетнев И.Л., Рембеза А.И., Соколов Ю.А.** и др. Эффективность и надежность сложных систем. – М.: Машиностроение, 1977, 216 с.
10. **Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.** Теория вероятностей. – М.: Наука, 1973, 496с.
11. **Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.** Математические методы в теории надежности. М: «Наука», 1965, 212 с.
12. **Ллойд Д.К., Липов М.** Надежность. Организация исследования, методы, математический аппарат. Пер. с англ. М.: Советское радио, 1964, 687 с.