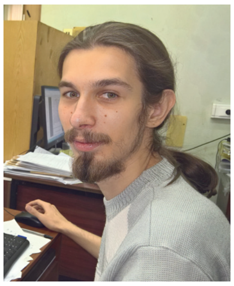
Оригинальная статья
DOI: 10.21683/1729-2646-2017-17-4-16-22

Механизм построения аналитического решения при вычислении вероятности безотказной работы системы с ненагруженным резервированием при неоднотипных элементах (ч. 1)

Дмитрий М. Кривопалов, *ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия*
Евгений В. Юркевич, *ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия*



Дмитрий М. Кривопалов

Евгений В. Юркевич

Резюме. *Вычисление вероятности безотказной работы системы является неотъемлемым этапом надежностного проектирования. С ростом числа типов и количества задействованных элементов процесс вычислений надежности усложняется и занимает все большее время. Для упрощения расчетов принимаются допущения, например, в системах с резервированием используются однотипные элементы. Однако такой подход не позволяет оценить надежность системы, где применены принципиально различные элементы. Подобного рода задачи возникают при необходимости вычисления вероятности безотказного выполнения функции – оценке функциональной надежности. В этом случае возможна оценка надежности численными методами с применением приближенных вычислений на ЭВМ при интегрировании и дифференцировании. Приближенность результата таких вычислений определяется как точностью самой ЭВМ, так и сложностью исследуемой системы. При надежностном проектировании, когда процесс перерасчета производится многократно, этот недостаток является критичным. Аналитические решения могут быть представлены в матричном виде, что очень удобно для расположения в памяти ЭВМ. Для полной автоматизации процесса вычисления ВБР необходимо вывести механизмы определения коэффициентов матрицы. Для этого требуется рассмотреть их изменения при дифференцировании и интегрировании согласно основным расчетным формулам. Для совершенствования технологий надежностного проектирования сложных технических систем выведен и математически обоснован алгоритм, позволяющий с помощью рекуррентных процедур формировать аналитическое выражение для вычисления времени безотказной работы системы, включающей любое число принципиально различных элементов с ненагруженным типом резервирования.* **Методы.** *Предлагаемый алгоритм оценки надежности использует численные методы с применением вычислений на ЭВМ, состоящих из пересчета коэффициентов матрицы по обобщенным формулам вместо вычислений производных и интегралов, что позволяет значительно ускорить вычисления и повысить точность получаемых результатов. Объединяя полученные формулы для случаев, когда подключаемый элемент совпадает или не совпадает с каким либо из типов элементов в исходной системе, получается аналитическое решение для данной итерации в соответствии с разработанной алгоритмической схемой.* **Выводы.** *Выведен и математически обоснован алгоритм, позволяющий в рекуррентном виде формировать аналитическое выражение для вычисления вероятности безотказной работы системы из любого числа элементов, находящихся в ненагруженном резерве. Процесс формирования решения состоит из пересчета коэффициентов матрицы по обобщенным формулам вместо вычислений производных и интегралов численным способом, что позволяет значительно ускорить вычисления и повысить точность результатов.*

Ключевые слова: *надежностное проектирование, технические системы, принципиально различные элементы системы, ненагруженное резервирование, аналитическое выражение, коэффициенты матрицы, ускорение вычислений, повышение точности оценки надежности.*

Формат цитирования: *Кривопалов Д.М., Юркевич Е.В. Механизм построения аналитического решения при вычислении вероятности безотказной работы системы с ненагруженным резервированием при неоднотипных элементах // Надежность. 2017. Т. 17, № 4. С. 16-22. DOI: 10.21683/1729-2646-2017-17-4-16-22*

Введение

Вычисление вероятности безотказной работы (ВБР) системы является неотъемлемым этапом надежностного проектирования. С ростом числа типов и количества задействованных элементов процесс вычислений надежности усложняется и занимает все большее время.

Для упрощения расчетов принимаются допущения, например, в системах с резервированием используются однотипные элементы. Однако такой подход не позволяет оценить надежность системы, где применены принципиально различные элементы. (Подобного рода задачи возникают при необходимости вычисления вероятности безотказного выполнения функции – оценке функциональной надежности [1].) В этом случае возможна оценка надежности численными методами с применением приближенных вычислений на ЭВМ при интегрировании и дифференцировании.

Приближенность результата таких вычислений определяется как точностью самой ЭВМ, так и сложностью исследуемой системы [2]. При надежностном проектировании, когда процесс перерасчета производится многократно, этот недостаток является критичным.

В работе [4] было показано, что аналитические решения могут быть представлены в матричном виде, что очень удобно для расположения в памяти ЭВМ. Для полной автоматизации процесса вычисления ВБР необходимо вывести механизмы определения коэффициентов матрицы. Для этого требуется рассмотреть их изменения при дифференцировании и интегрировании согласно основным расчетным формулам.

Изменение коэффициентов при дифференцировании

Рассмотрим произвольную систему из четырех элементов

$$P_4(t) = A(t)\cdot e^{-\lambda_1 t} + B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t} + C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t} + D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t}.$$

Функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ представляют собой многочлены по степени t, количество слагаемых которых определяется количеством соответствующих одинаковых элементов системы.

Обозначим матрицу исходных коэффициентов A, матрицу интенсивностей отказов Λ и матрицу степеней T.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix};$$

$$T = \begin{pmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Введем также вспомогательную функцию $F(A,t)$, преобразующую матрицы по следующему правилу:

$$B = F\left(A,t\right), \text{ где } B_{ij} = e^{-t\cdot A_{ij}}.$$

Тогда ВБР системы, характеризуемой матрицей A, всегда можно определить по формуле:

$$P(t) = A^{\mathrm{T}}\cdot T\cdot F\left(\Lambda,t\right)^T.$$

Тогда расчетная формула ВБР при подключении 5-го элемента будет иметь вид:

$$P_5\left(T\right) = P_4\left(T\right) + \int_0^T p_5(\tau,T)\cdot f_4(\tau)d\tau,$$

где $P_4(T)$ – ВБР системы из четырех элементов в течение времени T;

$p_5(\tau,T)$ – ВБР 5-го (подключаемого) элемента в течение периода времени от τ до T;

$f_4(\tau)$ – плотность распределения отказов системы из четырех элементов для момента времени τ.

В расчетной формуле необходимо определить плотность распределения

$$f_4\left(t\right) = -\frac{P_4\left(t\right)}{dt} =$$

$$= -\left(A\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_1 t} + B\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_2 t} + C\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_3 t} + D\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_4 t}\right)\frac{1}{dt} =$$

$$= \left(-A\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_1 t}\right)\frac{1}{dt} + \left(-B\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_2 t}\right)\frac{1}{dt} +$$

$$+\left(-C\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_3 t}\right)\frac{1}{dt} + \left(-D\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_4 t}\right)\frac{1}{dt}.$$

Рассмотрим слагаемые отдельно.

$$\left(-A\left(t\right)\cdot e^{-\lambda_1 t}\right)\frac{1}{dt} = \left(-\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right)\cdot e^{-\lambda_1 t}\right)\frac{1}{dt} =$$

$$= \left(\left(\lambda_1 a_0 - a_1\right) + \left(\lambda_1 a_1 - 2a_2\right)t + \left(\lambda_1 a_2 - 3a_3\right)t^2 + \left(\lambda_1 a_3\right)t^3\right)\cdot e^{-\lambda_1 t}.$$

Аналогичным образом дифференцируются остальные слагаемые.

Как и ранее, результат дифференцирования представим в виде матрицы

$$\begin{array}{c|cccc} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ & ---- & ---- & ---- & ---- \\ t^0 & \lambda_1 a_0 - a_1 & \lambda_2 b_0 - b_1 & \lambda_3 c_0 - c_1 & \lambda_4 d_0 - d_1 \\ t^1 & \lambda_1 a_1 - 2a_2 & \lambda_2 b_1 - 2b_2 & \lambda_3 c_1 - 2c_2 & \lambda_4 d_1 - 2d_2 \\ t^2 & \lambda_1 a_2 - 3a_3 & \lambda_2 b_2 - 3b_3 & \lambda_3 c_2 - 3c_3 & \lambda_4 d_2 - 3d_3 \\ t^3 & \lambda_1 a_3 & \lambda_2 b_3 & \lambda_3 c_3 & \lambda_4 d_3 \end{array}.$$

Обозначим как матрицу коэффициентов плотности распределения вероятности B

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_0 - a_1 & \lambda_2 b_0 - b_1 & \lambda_3 c_0 - c_1 & \lambda_4 d_0 - d_1 \\ \lambda_1 a_1 - 2a_2 & \lambda_2 b_1 - 2b_2 & \lambda_3 c_1 - 2c_2 & \lambda_4 d_1 - 2d_2 \\ \lambda_1 a_2 - 3a_3 & \lambda_2 b_2 - 3b_3 & \lambda_3 c_2 - 3c_3 & \lambda_4 d_2 - 3d_3 \\ \lambda_1 a_3 & \lambda_2 b_3 & \lambda_3 c_3 & \lambda_4 d_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку вычисления предполагается выполнять на ЭВМ, то необходимо задать общую формулу, по которым может быть вычислен любой элемент матрицы B в зависимости от его индекса строки и столбца. Для этой цели дополним матрицу A еще одной дополнительной строкой нулей

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда вычисление матрицы B будет преобразовано

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_0 - a_1 & \lambda_2 b_0 - b_1 & \lambda_3 c_0 - c_1 & \lambda_4 d_0 - d_1 \\ \lambda_1 a_1 - 2a_2 & \lambda_2 b_1 - 2b_2 & \lambda_3 c_1 - 2c_2 & \lambda_4 d_1 - 2d_2 \\ \lambda_1 a_2 - 3a_3 & \lambda_2 b_2 - 3b_3 & \lambda_3 c_2 - 3c_3 & \lambda_4 d_2 - 3d_3 \\ \lambda_1 a_3 - 4\cdot 0 & \lambda_2 b_3 - 4\cdot 0 & \lambda_3 c_3 - 4\cdot 0 & \lambda_4 d_3 - 4\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_0 - 1a_1 & \lambda_2 b_0 - 1b_1 & \lambda_3 c_0 - 1c_1 & \lambda_4 d_0 - 1d_1 \\ \lambda_1 a_1 - 2a_2 & \lambda_2 b_1 - 2b_2 & \lambda_3 c_1 - 2c_2 & \lambda_4 d_1 - 2d_2 \\ \lambda_1 a_2 - 3a_3 & \lambda_2 b_2 - 3b_3 & \lambda_3 c_2 - 3c_3 & \lambda_4 d_2 - 3d_3 \\ \lambda_1 a_3 - 4a_4 & \lambda_2 b_3 - 4b_4 & \lambda_3 c_3 - 4c_4 & \lambda_4 d_3 - 4d_4 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} a_0' & b_0' & c_0' & d_0' \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' & d_3' \end{pmatrix}.$$

Замечание. Аналогичный результат получается и при наличии коэффициентов a_4, b_4, c_4, d_4 в соответствующих многочленах $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$.

Таким образом, процесс дифференцирования принимает вид:

$$f_4(t) = -\frac{P_4(t)}{dt} = -\frac{A^{\mathrm{T}}\cdot T\cdot F(\Lambda,t)^T}{dt} = B^{\mathrm{T}}\cdot T\cdot F(\Lambda,t)^T;$$

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} a_0' & b_0' & c_0' & d_0' \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' & d_3' \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование заменено на вычисление коэффициентов матрицы B из матрицы A и элементов матрицы Λ, что является гораздо более простой операцией с точки зрения машинных вычислений. Общая формула для вычисления элементов матрицы B:

$$B_{i,j} = \Lambda_j \cdot A_{i,j} - i\cdot A_{i+1,j},\ i=1..N,\ j=1..N,$$

где i – индекс строки в соответствующей матрице;

j – индекс столбца в соответствующей матрице;

N – число элементов в начальной системе.

Изменение коэффициентов при интегрировании

Следующим этапом вычислений является интегрирование:

$$\int_0^t p_5(\tau,t)\cdot f_4(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda_5(t-\tau)}\cdot\begin{pmatrix} A'(\tau)\cdot e^{-\lambda_1\tau} + B'(\tau)\cdot e^{-\lambda_2\tau} + \\ +C'(\tau)\cdot e^{-\lambda_3\tau} + D'(\tau)\cdot e^{-\lambda_4\tau} \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t A'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau + e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t B'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_2)\tau}d\tau +$$

$$+ e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t C'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_3)\tau}d\tau + e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t D'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_4)\tau}d\tau.$$

Возможны два принципиально различных случая: λ_5 может либо численно совпадать с одной из 4-х интенсивностей отказов, либо не совпадать. В зависимости от этого подынтегральное выражение значительно изменяется.

Рассмотрим случай, когда интенсивность отказа подключаемого элемента совпадает с интенсивностью отказа одного из элемента рассматриваемой системы, например, первого.

$$\lambda_5 = \lambda_1$$

Тогда соответствующий интеграл упростится

$$e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t A'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau = e^{-\lambda_1 t}\cdot\int_0^t A'(\tau)d\tau =$$

$$= e^{-\lambda_1 t}\cdot\int_0^t a_0' + a_1'\tau + a_2'\tau^2 + a_3'\tau^3 d\tau =$$

$$= \left(a_0' t + \frac{a_1'}{2}t^2 + \frac{a_2'}{3}t^3 + \frac{a_3'}{4}t^4\right)\cdot e^{-\lambda_1 t}.$$

Остальные интегралы рассмотрим ниже.

ВБР системы из 5 элементов складывается из суммы ВБР системы из 4 элементов и результата интегрирования. Запишем, как изменятся коэффициенты в случае совпадения для одного из типов элементов (λ_1):

$$P_5(t) = P_4(t) + \int_0^t p_5(\tau,t)\cdot f_4(\tau)d\tau =$$

$$= A(t)\cdot e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t A'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau +$$

$$+B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t B'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_2)\tau}d\tau +$$

$$+C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t C'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_3)\tau}d\tau +$$

$$+D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t} + e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t D'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_4)\tau}d\tau =$$

$$= \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4\right)\cdot e^{-\lambda_1 t} +$$

$$+\left(a_0' t + \frac{a_1'}{2}t^2 + \frac{a_2'}{3}t^3 + \frac{a_3'}{4}t^4\right)\cdot e^{-\lambda_1 t} +$$

$$+B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t B'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_2)\tau}d\tau+$$

$$+C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t C'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_3)\tau}d\tau+$$

$$+D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t D'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_4)\tau}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix} a_0+(a_1+a_0{}')t+\left(a_2+\dfrac{a_1{}'}{2}\right)t^2+ \\ +\left(a_3+\dfrac{a_2{}'}{3}\right)t^3+\left(a_4+\dfrac{a_3{}'}{4}\right)t^4\end{pmatrix}\cdot e^{-\lambda_1 t}+$$

$$+B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t B'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_2)\tau}d\tau+$$

$$+C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t C'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_3)\tau}d\tau+$$

$$+D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t D'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_4)\tau}d\tau.$$

То есть, исходная матрица A преобразуется так, что к определенным элементам матрицы добавятся определенные слагаемые

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1+a_0{}' & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+\dfrac{a_1{}'}{2} & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+\dfrac{a_2{}'}{3} & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4+\dfrac{a_3{}'}{4} & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Общая формула вычисление коэффициентов в совпадающей части имеет вид:

$$A_{i+1,j}=A_{i+1,j}+\frac{B_{i,j}}{i},\ \text{если}\ \Lambda_j=\lambda_k,\ i=1..N,\ j=1..N,$$

где i – индекс строки в соответствующей матрице;
j – индекс столбца в соответствующей матрице;
k – индекс подключаемого элемента матрицы Λ;
N – число элементов в начальной системе.

Рассмотрим случай, когда интенсивность отказа подключаемого элемента не совпадает ни с одной из интенсивностей отказов элементов в системе.

$$\lambda_5\neq\lambda_1,\ \lambda_5\neq\lambda_2,\ \lambda_5\neq\lambda_3,\ \lambda_5\neq\lambda_4.$$

Тогда взятие интеграла примет более сложный характер:

$$e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t A'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_0{}'\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau+$$

$$+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_1{}'\tau\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau+$$

$$+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_2{}'\tau^2\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_3{}'\tau^3\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau.$$

Возьмем каждый интеграл в сумме отдельно:

■ $$e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_0{}'\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=a_0'\cdot e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=$$

$$=a_0{}'\cdot e^{-\lambda_5 t}\left(\frac{1}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}-\frac{1}{\lambda_5-\lambda_1}\right)=$$

$$=\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_1 t}-\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_5 t};$$

■ $$e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_1{}'\tau\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=a_1'\cdot e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t \tau\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=$$

$$=a_1'\cdot e^{-\lambda_5 t}\cdot\left(\frac{1}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}-\frac{1}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}+\frac{1}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}\right)=$$

$$=\frac{a_1'}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t\cdot e^{-\lambda_1 t}-\frac{a_1'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}\cdot e^{-\lambda_1 t}+\frac{a_1'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}\cdot e^{-\lambda_5 t};$$

■ $$e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_2{}'\tau^2\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=a_2'\cdot e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t \tau^2\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=$$

$$=a_2'\cdot e^{-\lambda_5 t}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t^2\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}-\dfrac{2}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}\cdot t\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}+ \\ +\dfrac{2}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}-\dfrac{2}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{a_2'}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t^2\cdot e^{-\lambda_1 t}-\frac{2a_2'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}\cdot t\cdot e^{-\lambda_1 t}+$$

$$+\frac{2a_2'}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}\cdot e^{-\lambda_1 t}-\frac{2a_2'}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}\cdot e^{-\lambda_5 t};$$

■ $$e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t a_3{}'\tau^3\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=a_3'\cdot e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t \tau^3\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=$$

$$=a_3'\cdot e^{-\lambda_5 t}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t^3\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}-\dfrac{3}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}\cdot t^2\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}+ \\ +\dfrac{6}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}\cdot t\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}-\dfrac{6}{(\lambda_5-\lambda_1)^4}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)t}+\dfrac{6}{(\lambda_5-\lambda_1)^4}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{a_3^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t^3\cdot e^{-\lambda_1 t}-\frac{3a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}\cdot t^2\cdot e^{-\lambda_1 t}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}\cdot t\cdot e^{-\lambda_1 t}-$$

$$-\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\cdot e^{-\lambda_1 t}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\cdot e^{-\lambda_5 t}.$$

Просуммируем результаты интегрирования, сгруппировав слагаемые:

$$e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t A^{'}(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{a_1^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}+\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}-\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\right)+\\+\left(\frac{a_1^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}\right)\cdot t+\\+\left(\frac{a_2^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{3a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}\right)\cdot t^2+\frac{a_3^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t^3\end{pmatrix}\cdot e^{-\lambda_1 t}+$$

$$+\left(-\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}+\frac{a_1^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}-\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\right)\cdot e^{-\lambda_5 t}.$$

Интегралы с другими многочленами вычисляются аналогичным образом.

ВБР системы из 5 элементов складывается из суммы ВБР системы из 4 элементов и результата интегрирования. Запишем, как изменятся коэффициенты в случае несовпадения для одного из типов элементов (λ_1):

$$P_5(t)=P_4(t)+\int_0^t p_5(\tau,t)\cdot f_4(\tau)d\tau=$$

$$=A(t)\cdot e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t A'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_1)\tau}d\tau+B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t}+$$

$$+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t B'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_2)\tau}d\tau+C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t C^{'(\tau)}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_3)\tau}d\tau+D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t D^{'(\tau)}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_4)\tau}d\tau=$$

$$=\left(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right)e^{-\lambda_1 t}+$$

$$+\begin{pmatrix}\left(\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{a_1^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}+\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}-\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\right)+\\+\left(\frac{a_1^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}\right)\cdot t+\\+\left(\frac{a_2^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{3a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}\right)\cdot t^2+\frac{a_3^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}\cdot t^3\end{pmatrix}\cdot e^{-\lambda_1 t}+$$

$$+\left(-\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}+\frac{a_1^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}-\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\right)\cdot e^{-\lambda_5 t}+$$

$$+B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t B'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_2)\tau}d\tau+C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t C'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_3)\tau}d\tau+D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t D^{'(\tau)}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_4)\tau}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}\left(a_0+\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{a_1^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}+\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}-\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\right)+\\+\left(a_1+\frac{a_1^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}\right)\cdot t+\\+\left(a_2+\frac{a_2^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{3a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}\right)\cdot t^2+\left(a_3+\frac{a_3^{'}}{\lambda_5-\lambda_1}\right)\cdot t^3\end{pmatrix}\cdot e^{-\lambda_1 t}+$$

$$+\left(-\frac{a_0{}'}{\lambda_5-\lambda_1}+\frac{a_1^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^2}-\frac{2a_2^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^3}+\frac{6a_3^{'}}{\left(\lambda_5-\lambda_1\right)^4}\right)\cdot e^{-\lambda_5 t}+$$

$$+B(t)\cdot e^{-\lambda_2 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t B'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_2)\tau}d\tau+C(t)\cdot e^{-\lambda_3 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot$$

$$\int_0^t C'(\tau)\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_3)\tau}d\tau+D(t)\cdot e^{-\lambda_4 t}+e^{-\lambda_5 t}\cdot\int_0^t D^{'(\tau)}\cdot e^{(\lambda_5-\lambda_4)\tau}d\tau.$$

В результате подключения дополнительного элемента с интенсивностью отказов $\lambda_5\neq\lambda_1$ коэффициенты при экспоненте $-\lambda_1 t$ перестроились определенным образом. При этом повышения степени многочлена $A(t)$ не произошло. Кроме того, при интегрировании сформировалось слагаемое, которое войдет в сумму коэффициента для новой экспоненты $-\lambda_5 t$. Запишем полный результат при суммировании в матричном виде:

$$P_5(t)=P_4(t)+\int_0^t p_5(\tau,t)\cdot f_4(\tau)d\tau;$$

$$P_5(t)=A^T\cdot T\cdot F(\Lambda,t)^T;$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5\end{pmatrix};$$

$$T=\begin{pmatrix}t^0\\t^1\\t^2\\t^3\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}
a_0+\frac{a_0'}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{a_1'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}+\frac{2a_2'}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}-\frac{6a_3'}{(\lambda_5-\lambda_1)^4} & b_0+\frac{b_0'}{\lambda_5-\lambda_2}-\frac{b_1'}{(\lambda_5-\lambda_2)^2}+\frac{2b_2'}{(\lambda_5-\lambda_2)^3}-\frac{6b_3'}{(\lambda_5-\lambda_2)^4} & c_0+\frac{c_0'}{\lambda_5-\lambda_3}-\frac{c_1'}{(\lambda_5-\lambda_3)^2}+\frac{2c_2'}{(\lambda_5-\lambda_3)^3}-\frac{6c_3'}{(\lambda_5-\lambda_3)^4} & d_0+\frac{d_0'}{\lambda_5-\lambda_4}-\frac{d_1'}{(\lambda_5-\lambda_4)^2}+\frac{2d_2'}{(\lambda_5-\lambda_4)^3}-\frac{6d_3'}{(\lambda_5-\lambda_4)^4} & \begin{matrix}\left(\left(-\frac{a_0'}{\lambda_5-\lambda_1}+\frac{a_1'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}-\frac{2a_2'}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}+\frac{6a_3'}{(\lambda_5-\lambda_1)^4}\right)+\right.\\ +\left(-\frac{b_0'}{\lambda_5-\lambda_2}+\frac{b_1'}{(\lambda_5-\lambda_2)^2}-\frac{2b_2'}{(\lambda_5-\lambda_2)^3}+\frac{6b_3'}{(\lambda_5-\lambda_2)^4}\right)+\\ +\left(-\frac{c_0'}{\lambda_5-\lambda_3}+\frac{c_1'}{(\lambda_5-\lambda_3)^2}-\frac{2c_2'}{(\lambda_5-\lambda_3)^3}+\frac{6c_3'}{(\lambda_5-\lambda_3)^4}\right)+\\ \left.+\left(-\frac{d_0'}{\lambda_5-\lambda_4}+\frac{d_1'}{(\lambda_5-\lambda_4)^2}-\frac{2d_2'}{(\lambda_5-\lambda_4)^3}+\frac{6d_3'}{(\lambda_5-\lambda_4)^4}\right)\right)\end{matrix} \\
a_1+\frac{a_1'}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{2a_2'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}+\frac{6a_3'}{(\lambda_5-\lambda_1)^3} & b_1+\frac{b_1'}{\lambda_5-\lambda_2}-\frac{2b_2'}{(\lambda_5-\lambda_2)^2}+\frac{6b_3'}{(\lambda_5-\lambda_2)^3} & c_1+\frac{c_1'}{\lambda_5-\lambda_3}-\frac{2c_2'}{(\lambda_5-\lambda_3)^2}+\frac{6c_3'}{(\lambda_5-\lambda_3)^3} & d_1+\frac{d_1'}{\lambda_5-\lambda_4}-\frac{2d_2'}{(\lambda_5-\lambda_4)^2}+\frac{6d_3'}{(\lambda_5-\lambda_4)^3} & 0 \\
a_2+\frac{a_2'}{\lambda_5-\lambda_1}-\frac{3a_3'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2} & b_2+\frac{b_2'}{\lambda_5-\lambda_2}-\frac{3b_3'}{(\lambda_5-\lambda_2)^2} & c_2+\frac{c_2'}{\lambda_5-\lambda_3}-\frac{3c_3'}{(\lambda_5-\lambda_3)^2} & d_2+\frac{d_2'}{\lambda_5-\lambda_4}-\frac{3d_3'}{(\lambda_5-\lambda_4)^2} & 0 \\
a_3+\frac{a_3'}{\lambda_5-\lambda_1} & b_3+\frac{b_3'}{\lambda_5-\lambda_2} & c_3+\frac{c_3'}{\lambda_5-\lambda_3} & d_3+\frac{d_3'}{\lambda_5-\lambda_4} & 0
\end{pmatrix}.$$

Таким образом, процесс вычисления интеграла при подключении очередного элемента может быть сведен к преобразованию матрицы A: ее расширению и соответствующему пересчету коэффициентов. Общая формула для вычисления коэффициентов для несовпадающей части матрицы имеет вид:

$$A_{i,j}=A_{i,j}+\frac{B_{i,j}}{\Lambda_k-\Lambda_j}+\sum_{m=1}^{N-i}\frac{(-1)^m\cdot B_{i+m,j}\cdot(m+i-1)!}{(\Lambda_k-\Lambda_j)^{m+1}\cdot(i-1)!},$$

если $\Lambda_j\neq\lambda_k$, $i=1..N$, $j=1..N$,
где i – индекс строки в соответствующей матрице;
j – индекс столбца в соответствующей матрице;
k – индекс подключаемого элемента матрицы Λ;
N – число элементов в начальной системе.

Также необходима общая формула для слагаемых, которые в сумме составят новый коэффициент для экспоненты интенсивности отказов подключаемого элемента, то есть для формулы:

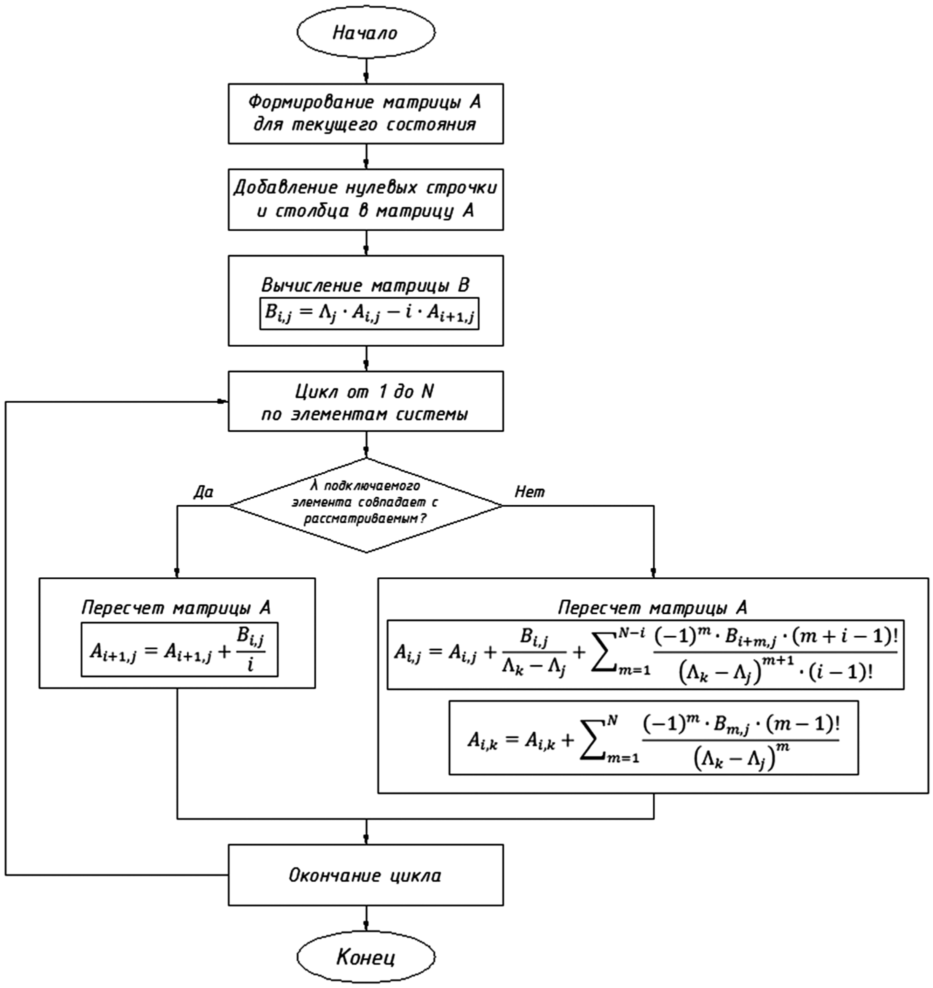
$$-\frac{a_0'}{\lambda_5-\lambda_1}+\frac{a_1'}{(\lambda_5-\lambda_1)^2}-\frac{2a_2'}{(\lambda_5-\lambda_1)^3}+\frac{6a_3'}{(\lambda_5-\lambda_1)^4}.$$

$$A_{i,k}=A_{i,k}+\sum_{m=1}^{N}\frac{(-1)^m\cdot B_{m,j}\cdot(m-1)!}{(\Lambda_k-\Lambda_j)^m},$$

если $\Lambda_j\neq\lambda_k$, $i=1..N$, $j=1..N$,
где i – индекс строки в соответствующей матрице;
j – индекс столбца в соответствующей матрице;
k – индекс подключаемого элемента матрицы Λ;
N – число элементов в начальной системе.

Схема алгоритма построения аналитического решения

Объединяя полученные формулы для случаев, когда подключаемый элемент совпадает или не совпадает с



Обозначения:
i – индекс строки в соответствующей матрице;
j – индекс столбца в соответствующей матрице;
k – индекс подключаемого элемента матрицы Λ;
N – число элементов в начальной системе.

Рисунок – 1. Схема алгоритма построения аналитического решения

каким либо из типов элементов в исходной системе, аналитическое решение для данной итерации может быть получено по схеме, представленной на рисунке 1.

Выводы

Выведен и математически обоснован алгоритм, позволяющий в рекуррентном виде формировать аналитическое выражение для вычисления ВБР системы из любого числа элементов, находящихся в ненагруженном резерве. Процесс формирования решения состоит из пересчета коэффициентов матрицы по обобщенным формулам вместо вычислений производных и интегралов численным способом, что позволяет значительно ускорить вычисления и повысить точность результатов. По форме представления данных алгоритм адаптирован для вычислений на ЭВМ.

Библиографический список

1. Шубинский И.Б. Функциональная надежность информационных систем. Методы анализа/ М.: ООО «Журнал «Надежность» 2012 -295с.

2. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надежности. / СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 704с.

3. Кривопалов Д.М. Доклад «Особенности динамического программирования в надежностном проектировании программно-технических систем космических аппаратов». Пятая международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы создания космических систем дистанционного зондирования Земли». Москва 2017 г.

4. Кривопалов Д.М.; Юркевич Е. В. Получение функций ВБР в матричном виде для систем с ненагруженным резервированием при неоднотипных элементах // Надежность.

Сведения об авторах

Дмитрий М. Кривопалов, инженер ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия, +7 926-840-06-58, e-mail: persival92@rambler.ru

Евгений В. Юркевич, д.т.н., профессор, г.н.с. ФГБУН Институт проблем управления В.А.Трапезникова Российской Академии наук, Москва, Россия, +7 495-334-88-70, e-mail: yurk@ipu.ru

Поступила 29.08.2017