Чумаков И.А., Чепурко В.А., Антонов А.В.

ОЦЕНКИ ОСТАТОЧНОГО ВРЕМЕНИ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО ПРОЦЕССА. ОБЩИЙ ПОДХОД К ОЦЕНКАМ ОСТАТОЧНОГО ВРЕМЕНИ

Статья описывает обобщенный метод оценивания остаточного времени для объекта с произвольной стратегией функционирования. Получены асимптотические и неасимптотические оценки показателей, сходящиеся при длительном функционировании объекта. Основной идеей полученного подхода является сведение процесса восстановления произвольного вида к хорошо изученному альтернирующему процессу. Метод позволяет прогнозировать остаточное время работы оборудования на стадии эксплуатации и может быть использован в работах по оценке ресурсных характеристик оборудования АЭС.

Ключевые слова: *остаточное время, альтернирующий процесс, стратегия функционирования.*

Введение

В настоящее время в большинстве случаев при проведении вероятностного анализа характеристик надежности используют так называемую простейшую модель ремонта: после каждого отказа система приводится в исправное состояние за пренебрежимо короткое время и сразу же возвращается в рабочее состояние. Однако функционирование современных технических систем, как правило, представляет собой более сложный процесс, для которого характерно наличие периодического или постоянного контроля неисправностей, схем обнаружения отказов, проведения аварийно-восстановительных работ и т.д.

Кроме этого, следует отметить, что, когда речь идет об оценке или прогнозировании остаточного ресурса, в основном все сводится не к расчетам характеристик долговечности, а к анализу показателей надежности, таких как интенсивность отказов, вероятность безотказной работы (ВБР), коэффициент готовности, и по результатам делается вывод о техническом состоянии объекта. Для проведения более точного исследования ресурса оборудования возникает необходимость разработки методик оценивания именно характеристик долговечности. Также необходимо учитывать особенности и режимы функционирования оборудования, которые, как показывает опыт, могут существенно влиять на надежность.

Ресурс и срок службы, будучи показателями долговечности, являются одними из основных понятий теории надежности. Особое место при этом занимает прогнозирование ресурса объектов на стадии эксплуатации. Оценке подлежит остаточный ресурс, который определяет возможную продолжительность эксплуатации объекта с данного момента времени до достижения параметром технического состояния его предельного значения.

В данной работе представлены методы статистического оценивания остаточного ресурса, которые позволяют учитывать характер функционирования и обслуживания элементов сложных технических систем.

1. Неасимптотические оценки среднего остаточного времени для альтернирующего процесса

Существует ряд публикаций, в которых уделено внимание таким ресурсным характеристикам, как прямое остаточное время (ПОВ), обратное остаточное время (ООВ), а также среднее прямое остаточное время (СПОВ) и среднее обратное остаточное время (СООВ). В работе [1], например, рассмотрен способ определения остаточной наработки (СПОВ) для невосстанавливаемого оборудования. В большинстве научных публикаций [2, 3] по данной тематике определение (и, соответственно, формулы и расчеты) ПОВ и СПОВ даны для случая простого процесса восстановления (т.е. предполагается, что временем восстановления можно пренебречь). Возникает необходимость разработки методов оценки остаточного времени для более сложных (альтернирующих) процессов.

Простой процесс восстановления представляет собой последовательность наработок до отказа исследуемого объекта, время восстановления считается равным нулю. В таком случае, СПОВ – это математическое ожидание оставшегося времени работы системы до очередного отказа, начиная с момента времени t, в который система была работоспособна [2]:

$$V(t) = \mathrm{M}\sum_{i=0}^{\infty}(\tau_{i+1} - t)\cdot I\{\tau_i \le t < \tau_{i+1}\}; \qquad (1)$$

где: τ_i – момент i-го отказа,

$I\{A\}$ – функция-индикатор истинности аргумента, равная единице, если A – истина, и нулю в противном случае.

Расширим понятие «ПОВ» на случай произвольного процесса восстановления. В работе [5], СПОВ трактуется как математическое ожидание оставшегося времени работы системы до очередного отказа, начиная с момента времени t, в который система была работоспособна:

$$V(t) = \mathrm{M}\sum_{i=0}^{\infty}(\tau_{i+1} - t)\cdot I\{v_i \le t < \tau_{i+1}\}; \qquad (2)$$

Здесь v_i и τ_i – моменты i-го восстановления и i-го отказа, $v_0 = 0$, $v_i \le \tau_{i+1} \le v_{i+1}$. Подчеркнем, что в формуле (2) присутствует условие нахождения объекта в момент времени t в работоспособном состоянии.

Продемонстрируем общий подход к получению оценок остаточного времени для стратегии функционирования, описываемой с помощью альтернирующего процесса восстановления объекта. Такой процесс подробно изучен в теории восстановления [2]. Считается, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ объект находится в работоспособном состоянии. Объект функционирует до момента отказа – τ_i, после чего проводится аварийное восстановление до момента восстановления – v_i. После восстановления объект продолжает свою работу до очередного момента отказа, далее происходит восстановление и переход в работоспособное состояние. Случайные величины α_i и β_i – длительности i-го интервала работоспособности и неработоспособности соответственно. Такой цикл повторяется до выбранного момента времени t. Данный процесс изображен на рисунке 1:

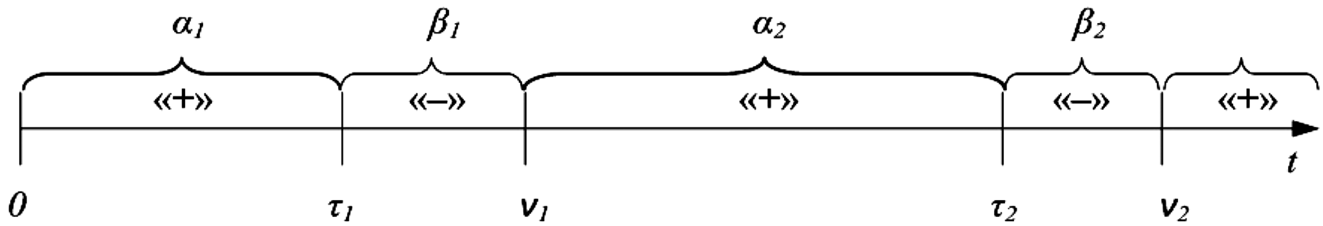

Рис. 1. Альтернирующий процесс восстановления

Формулу (2) для данного процесса можно записать в виде:

$$V(t) = \mathrm{M}\sum_{i=0}^{\infty}(\nu_i + \alpha_{i+1} - t)\cdot I\{\nu_i \le t < \nu_i + \alpha_{i+1}\}; \qquad (3)$$

Альтернирующий процесс является частным случаем рассмотренного в [5], основываясь на работах [4, 5], достаточно просто получить неасимптотическую оценку СПОВ в виде интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода в образах преобразования Лапласа:

$$V(p) = \frac{G_\alpha(p)}{1 - f_\alpha(p) f_\beta(p)}; \qquad (4)$$

где $G_\alpha(p) = \dfrac{M\alpha - P_\alpha(p)}{p};$

И в пространстве оригиналов (здесь и далее символом “*” обозначена операция интегральной свертки):

$$V(t) = G_\alpha(t) + (V * f_\alpha * f_\beta)(t); \qquad (5)$$

где $G_\alpha(t)$ – свободный член уравнения (5), такой, что:

$$G_\alpha(t) = \int_0^\infty x g_\alpha(t;x)dx = \int_0^\infty x f_\alpha(t+x)dx = \int_t^\infty P_\alpha(x)dx = M\alpha - \int_0^t P_\alpha(x)dx = M\alpha - t + \int_0^t F_\alpha(x)dx; \qquad (6)$$

где $f_\alpha(t)$, $f_\beta(t)$ – плотности распределения длительностей i-го интервала работоспособности и неработоспособности соответственно.

Отметим, что такая характеристика, как обратное остаточное время (ООВ), является слабо изученной. По определению ООВ есть время с момента последнего отказа до момента времени t. Продемонстрируем, как для среднего обратного остаточного времени (СООВ) вывести неасимптотическую оценку, подобную (5). Обозначим СООВ как $R(t)$, аналогично [4-5] получим:

$$R(t) = \mathrm{M}\sum_{i=0}^{\infty}(t-\nu_i)\cdot I\{\nu_i \le t < \nu_i + \alpha_{i+1}\} = \sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(t); \tag{7}$$

где $\varphi_i(t) = \mathrm{M}[(t-\nu_i)\cdot I\{\nu_i \le t < \nu_i + \alpha_{i+1}\}] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(t-y)\cdot I\{y \le t < y+x\} f_\alpha(x) f_{\nu_i}(y)dxdy =$

$$= \int_0^t (t-y) f_{\nu_i}(y) \int_{t-y}^{\infty} f_\alpha(x)dxdy = \int_0^t (t-y) f_{\nu_i}(y) P_\alpha(t-y)dy = (f_{\nu_i} * A_\alpha)(t); \tag{8}$$

где $A_\alpha(t)=xP_\alpha(x)$.

Применим к $\varphi_i(t)$ преобразование Лапласа, получим:

$$\varphi_i(p) = f_{\nu_i}(p)A_\alpha(p).$$

Изображение по Лапласу для (7) будет выглядеть так:

$$R(p) = \sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i(p) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{\nu_i}(p)A_\alpha(p) = A_\alpha(p)\sum_{i=0}^{\infty} f_{\nu_i}(p).$$

Обратим внимание, что:

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{i}(\alpha_j + \beta_j),\ i = 1, 2, \ldots,\ \nu_0 = 0.$$

Отсюда:

$$f_{\nu_i}(p) = (f_\alpha(p) f_\beta(p))^i;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{\nu_i}(p) = \frac{1}{1 - f_\alpha(p)\cdot f_\beta(p)}.$$

Получаем:

$$R(p) = A_\alpha(p) + R(p) f_\alpha(p) f_\beta(p);$$

Переходя к оригиналам, запишем искомое выражение СООВ:

$$R(t) = A_\alpha(t) + (R * f_\alpha * f_\beta)(t) = tP_\alpha(t) + (R * f_\alpha * f_\beta)(t). \tag{9}$$

По аналогии с СПОВ и СООВ, введем и исследуем новые ресурсные характеристики:

W(t) – среднее прямое остаточное время неработоспособности (СПОВН) – математическое ожидание оставшегося времени неработоспособности объекта до очередного восстановления начиная с момента времени *t*, в котором система неработоспособна. *Q(t)* – среднее обратное остаточное время неработоспособности (СООВН) – математическое ожидание времени неработоспособности объекта с момента последнего отказа до момента времени t, в котором система неработоспособна.

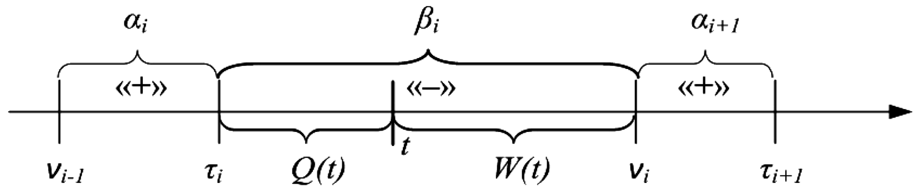

Рис. 2. СПОВН и СООВН

Аналогично (3) и (7), формулы для СПОВН и СООВН можно записать в виде:

$$W(t) = \mathrm{M}\sum_{i=0}^{\infty}(\nu_i - t)\cdot I\{\tau_i \le t < \tau_i + \beta_i\};$$

$$Q(t) = \mathrm{M}\sum_{i=0}^{\infty}(t - \tau_i)\cdot I\{\tau_i \le t < \tau_i + \beta_i\};$$

Получим для $W(t)$ неасимптотическую оценку, рассуждая подобно тому, как была получена выше оценка СООВ:

$$W(p) = G_\beta(p)\sum_{i=1}^{\infty} f_{\tau_i}(p);$$

где $G_\beta(p)$ – образ по Лапласу функции $G_\beta(t)$:

$$G_\beta(t) = M\beta - \int_0^t P_\beta(x)dx. \qquad (10)$$

Обратим внимание, что:

$$\tau_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{i-1}(\alpha_j + \beta_j);$$

$$f_{\tau_i}(p) = f_\alpha(p)\cdot(f_\alpha(p) f_\beta(p))^{i-1};$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{\tau_i}(p) = f_\alpha(p)\sum_{i=1}^{\infty}(f_\alpha(p) f_\beta(p))^{i-1} = \frac{f_\alpha(p)}{1 - f_\alpha(p)\cdot f_\beta(p)}.$$

Итоговая оценка в пространстве образов:

$$W(p) = G_\beta(p) f_\alpha(p) + W(p) f_\alpha(p) f_\beta(p).$$

В пространстве оригиналов:

$$W(t) = (G_\beta * f_\alpha)(t) + (W * f_\alpha * f_\beta)(t). \qquad (11)$$

Формулу (11) можно записать в другой форме. Применив к (10) преобразование Лапласа, имеем:

$$G_\beta(p) = \frac{M\beta - P_\beta(p)}{p}. \tag{12}$$

Тогда:

$$G_\beta(p) f_\alpha(p) = \frac{M\beta - P_\beta(p)}{p} f_\alpha(p) = M\beta \frac{f_\alpha(p)}{p} - P_\beta(p)\frac{f_\alpha(p)}{p}.$$

Переходя в пространство оригиналов:

$$(G_\beta * f_\alpha)(t) = M\beta F_\alpha(t) - (P_\beta * F_\alpha)(t). \tag{13}$$

Формула (11) принимает вид:

$$W(t) = M\beta F_\alpha(t) - (P_\beta * F_\alpha)(t) + (W * f_\alpha * f_\beta)(t). \tag{14}$$

Еще более коротко коснемся вывода неасимптотической оценки для СООВН:

$$Q(p) = A_\beta(p)\sum_{i=1}^{\infty} f_{\tau_i}(p);$$

где $A_\beta(p)$ – образ функции $A_\beta(t) = xP_\beta(x)$.

Искомое уравнение в образах:

$$Q(p) = A_\beta(p) f_\alpha(p) + Q(p) f_\alpha(p) f_\beta(p).$$

И после перехода к оригиналам:

$$Q(t) = (A_\beta * f_\alpha)(t) + (Q * f_\alpha * f_\beta)(t). \tag{15}$$

Примечание 1:

Все 4 полученных уравнения (4, 7, 14, 15) неасимптотических оценок исследуемых ресурсных характеристик являются уравнениями Вольтерра 2-го рода с различными свободными членами, но одним и тем же ядром – функцией $(f_\alpha * f_\beta)(t)$, представляющей собой интегральную свертку плотностей распределения интервалов работоспособности и неработоспособности объекта. В некоторых случаях удобно ввести случайную величину $\omega_i = \alpha_i + \beta_i$, характеризующую длительность одного цикла работы исследуемого объекта и соответствующую ей плотность распределения $f_\omega(t) = (f_\alpha * f_\beta)(t)$, которая далее и рассматривается как ядро интегральных уравнений.

2. Асимптотические оценки среднего остаточного времени для альтернирующего процесса

Продемонстрируем, как для альтернирующего процесса получить асимптотическую оценку СПОВ:

$$V_{асимп} = \lim_{t\to\infty} V(t); \tag{16}$$

1-й способ:

В пределе (16) перейдем в пространство образов, учитывая (4):

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{p\to 0} V(p)p = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{G_\alpha(p)}{1-f_\alpha(p)f_\beta(p)}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{M\alpha - P_\alpha(p)}{1-f_\alpha(p)f_\beta(p)}.$$

Обратим внимание, что:

$$\lim_{p\to 0}(M\alpha - P_\alpha(p)) = M\alpha - \lim_{p\to 0}\int_0^\infty e^{-pt}P_\alpha(t)dt = M\alpha - \int_0^\infty P_\alpha(t)dt = 0;$$

$$\lim_{p\to 0} f_\alpha(p) = \lim_{p\to 0}\int_0^\infty e^{-pt} f_\alpha(t)dt = \int_0^\infty f_\alpha(t)dt = 1.$$

Чтобы избавиться от неопределенности вида $\frac{0}{0}$, применяем правило Лапиталя:

$$\lim_{p\to 0} V(p)p = \lim_{p\to 0}\frac{(M\alpha - P_\alpha(p))'}{(1-f_\alpha(p)\cdot f_\beta(p))'} = \lim_{p\to 0}\frac{P'_\alpha(p)}{f_\alpha{}'(p)\cdot f_\beta(p) + f_\alpha(p)\cdot f_\beta{}'(p)}.$$

Заметим, что:

$$\lim_{p\to 0} P'_\alpha(p) = -\lim_{p\to 0}\int_0^\infty te^{-pt}P_\alpha(t)dt = -\int_0^\infty tP_\alpha(t)dt = -\left(\frac{(M\alpha)^2 + D\alpha}{2}\right);$$

$$\lim_{p\to 0} f_\alpha(p) = -\lim_{p\to 0}\int_0^\infty te^{-pt} f_\alpha(t)dt = -\int_0^\infty tf_\alpha(t)dt = -M\alpha;$$

Итоговая оценка для СПОВ:

$$V_{асимп} = \lim_{p\to 0} V(p)p = \frac{(M\alpha)^2 + D\alpha}{2(M\alpha + M\beta)} = \frac{M\alpha^2}{2(M\alpha + M\beta)}; \tag{17}$$

2-й способ:

Альтернирующий процесс можно рассматривать как обобщение классического процесса восстановления [2], тогда получим асимптотическую оценку СПОВ:

$$V_{асимп} = V_\alpha P_\alpha;$$

где P_α – вероятность попадания произвольного момента времени t на интервал работоспособности, V_α – асимптотическая оценка СПОВ для классического процесса, состоящего из последовательности наработок на отказ $\{\alpha_i\}$.

Далее имеем:

$$P_\alpha = \frac{M\alpha}{M\alpha + M\beta}.$$

Согласно [3] асимптотическая оценка для классического процесса:

$$V_\alpha = \frac{M\alpha^2}{2M\alpha} = \frac{(M\alpha)^2 + D\alpha}{2M\alpha};$$

где $M\alpha^2$ – 2-й момент случайной величины α.

Итоговая оценка принимает вид:

$$V_{асимп} = \frac{M\alpha^2}{2(M\alpha + M\beta)}.$$

Данное выражение полностью совпадает с ранее полученной оценкой (17).

Таким образом, задача асимптотической оценки СПОВ в общем случае сводится к оценке моментов случайных величин – длительностей интервалов работоспособности и неработоспособности объекта. Рассуждая аналогично, можно получить:

$$R_{асимп} = V_{асимп} = \frac{M\alpha^2}{2(M\alpha + M\beta)}; \tag{18}$$

$$W_{асимп} = Q_{асимп} = \frac{M\beta^2}{2(M\alpha + M\beta)}; \tag{19}$$

3. Оценки остаточного времени для произвольного процесса

В любой системе возможно проведение технических восстановительных мероприятий. Такие мероприятия могут осуществляться в заранее назначенные и в случайные моменты времени. Типы рассматриваемых стратегий отражают наличие различных типов профилактик (к примеру, плановая/внеплановая, аварийная/предупредительная), контроля, различных типов отказов, восстановления, прочих разнообразных условий эксплуатации. Все вышеописанное порождает огромное количество стратегий обслуживания оборудования и еще большее количество математических моделей для описания происходящих явлений.

Процесс восстановления для произвольной стратегии обслуживания в общем случае можно свести к альтернирующему: обозначив через α_i и β_i общие длительности интервалов работоспособности и неработоспособности объекта соответственно, мы получим процесс восстановления, аналогичный рассмотренному на рисунке 1. Чтобы применить вышеописанный математический аппарат, необходимо построить распределения случайных величин α и β.

Для примера рассмотрим одну из типовых встречающихся на практике стратегий функционирования объекта. Считается, что система в начальный момент времени t_0 находится в работоспособном состоянии и коэффициент готовности системы в точке $t_0 = 0$ равен единице. В системе предусмотрена плановая профилактика, которая осуществляется периодично через промежуток времени T (период профилактики) и длится случайное время η_m (см. рисунок 2). Если до момента проведения очередной плановой профилактики происходит отказ в случайный момент времени ξ, то проводится аварийное восстановление системы, которое длится случайное время η_f. После аварийного восстановления системы происходит перепланировка момента профилактики, то есть текущий период профилактики сдвигается вправо на промежуток времени $\xi + \eta_f$. После восстановления система продолжает работать до момента ξ, если был отказ, или до очередного момента профилактики T, если отказа не было. Далее происходит соответствующее восстановление и подобный цикл работы начинается снова. Описанная стратегия функционирования представлена на рисунке 3:

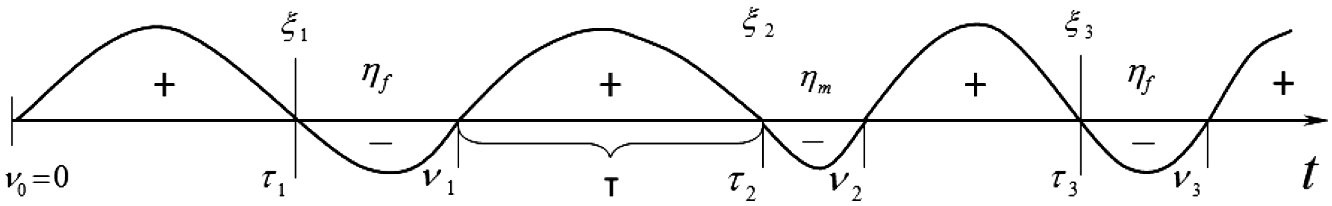

Рис. 3. Стратегия, учитывающая встроенный контроль с профилактическим обслуживанием

Под ξ_i понимаются моменты времени отказа, под τ_i понимаются промежутки времени от начала работы системы до очередного момента отказа системы, под v_i понимаются промежутки времени от начала работы системы до момента окончания очередной регенерации.

Согласно [6] моменты восстановления и отказа определяются следующим образом:

$$\begin{cases}\tau_i = \nu_0 + T\cdot I\{\xi_i > T\} + \xi_i I\{\xi_i < T\} + \sum\limits_{j=1}^{i-1} I\{\xi_j < T\}(\xi_j + \eta_f) + I\{\xi_j > T\}(T + \eta_m);\\ \nu_i = \nu_0 + I\{\xi_i < T\}(\xi_i + \eta_f) + I\{\xi_i > T\}(T + \eta_m) + \sum\limits_{j=1}^{i-1} I\{\xi_j < T\}(\xi_j + \eta_f) + I\{\xi_j > T\}(T + \eta_m);\end{cases}$$

Отсюда, i-й интервал работоспособного состояния может быть представлен, как

$$\alpha_i = \tau_i - \nu_{i-1} = T\cdot I\{\xi_i > T\} + \xi_i I\{\xi_i < T\};$$

Аналогичным образом получим выражение для i-го интервала неработоспособного состояния:

$$\beta_i = \nu_i - \tau_i = \eta_m I\{\xi_i > T\} + \eta_f I\{\xi_i < T\};$$

Согласно (18-19), для получения асимптотической оценки СПОВ необходимо найти первые и вторые центральные моменты случайных величин α и β. Для неасимптотических оценок в общем случае нам потребуются функции и плотности распределения случайных величин наработки между отказами и времени восстановления. Исследуем случайные величины α и β, заметим, что:

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} F_\xi(t), & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases};$$

Отсюда:

$$M\alpha = \int_0^T P_\xi(t)dt; \tag{20}$$

Для получения $M\alpha^2$, запишем функцию распределения в виде:

$$F_\alpha(x) = H(T-x)\cdot F_\xi(x) + H(x-T); \tag{21}$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, далее:

$$f_\alpha(x) = F'_\alpha(x) = H(T-x)\cdot f_\xi(x) - \delta(T-x)\cdot F_\xi(x) + \delta(x-T); \tag{22}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Получаем:

$$M\alpha^2 = \int_0^\infty x^2 f_\alpha(x)dx = \int_0^\infty x^2 H(T-x)\cdot f_\xi(x)dx - \int_0^\infty x^2\delta(T-x)\cdot F_\xi(x)dx + \int_0^\infty x^2\delta(x-T)dx =$$

$$= \int_0^T x^2 f_\xi(x)dx - T^2 F_\xi(T) + T^2; \tag{23}$$

Математическое ожидание величины β:

$$M\beta = M(\eta_m I\{\xi_i > T\}) + M(\eta_f I\{\xi_i < T\}) = M\eta_m P\{\xi_i > T\} + M\eta_f P\{\xi_i < T\} =$$

$$= M\eta_{mr}(1 - F_\xi(T)) + M\eta_{fr} F_\xi(T); \tag{24}$$

Для получения $M\beta^2$ найдем функцию распределения β:

$$F_\beta(x) = \mathrm{P}(\beta < x) = \mathrm{P}(\{\beta < x\}\cap\{\xi \ge T\}) + \mathrm{P}(\{\beta < x\}\cap\{\xi < T\}) =$$

$$= \mathrm{P}(\{\eta_m < x\}\cap\{\xi \ge T\}) + \mathrm{P}(\{\eta_f < x\}\cap\{\xi < T\}) = F_{\eta_m}(x)(1 - F_\xi(T)) + F_{\eta_f}(x)F_\xi(T);$$

Отсюда:

$$f_\beta(x) = f_{\eta_m}(x)(1 - F_\xi(T)) + f_{\eta_f}(x)F_\xi(T);$$

$$M\beta^2 = \int_0^\infty x^2 f_\beta(x)dx = (1 - F_\xi(T))M\eta_m{}^2 + F_\xi(T)M\eta_f{}^2; \tag{25}$$

С учетом (20), (23), (24), (25) асимптотические оценки принимают вид, пригодный для численных расчетов:

$$R_{асимп} = V_{асимп} = \frac{M\alpha^2}{2(M\alpha + M\beta)} = \frac{\int\limits_0^T x^2 f_\xi(x)dx - T^2 F_\xi(T) + T^2}{2(\int\limits_0^T P_\xi(t)dt + M\eta_m(1 - F_\xi(T)) + M\eta_f F_\xi(T))};$$

$$W_{асимп} = Q_{асимп} = \frac{M\beta^2}{2(M\alpha + M\beta)} = \frac{\left(1 - F_\xi(T)\right)M\eta_m{}^2 + F_\xi(T)M\eta_f{}^2}{2(\int\limits_0^T P_\xi(t)dt + M\eta_m(1 - F_\xi(T)) + M\eta_f F_\xi(T))};$$

Для получения неасимптотической оценки рассматриваемых в статье характеристик необходимо решить интегральные уравнения (4, 7, 14, 15). Согласно примечанию 1, ядром уравнений во всех четырех случаях является функция $f_\omega(t)$ – плотность распределения случайной величины ω. Для рассматриваемой стратегии имеем:

$$\omega = \begin{cases} \xi + \eta_f, \ \xi < T \\ T + \eta_m, \ \xi \ge T \end{cases};$$

Найдем функцию распределения этой случайной величины:

$$F_\omega(t) = P(\omega < t) = P(I\{\xi \ge T\}(T + \eta_m) + I\{\xi < T\}(\xi + \eta_f) < t) =$$

$$= P(\eta_m < t - T;\ \xi > T) + P(\eta_f < t - \xi;\ \xi < T) =$$

$$= \iint\limits_{\left\{\substack{\xi > T \\ 0 < \eta_m < t - T}\right\}} f_\xi(x) f_{\eta_m}(y) dydx + \iint\limits_{\left\{\substack{\xi < t \wedge T \\ 0 < \eta_f < t - \xi}\right\}} f_\xi(x) f_{\eta_f}(y) dydx =$$

$$= \int\limits_T^\infty f_\xi(x) \int\limits_0^{t-T} f_{\eta_m}(y)dydx + \int\limits_0^{t \wedge T} f_\xi(x) \int\limits_0^{t-x} f_{\eta_m}(y)dydx = \left(1 - F_\xi(T)\right)F_{\eta_m}(t - T) + \int\limits_0^{t \wedge T} f_\xi(x) F_{\eta_f}(t - x)dx;$$

Искомую плотность распределения получим путем дифференцирования:

$$f_\omega(t) = \frac{dF_\omega(t)}{dt} = \left(1 - F_\xi(T)\right) f_{\eta_m}(t - T) + \int\limits_0^{t \wedge T} f_\xi(x) f_{\eta_f}(t - x) \ \ dx; \qquad (26)$$

Далее найдем свободные члены интегральных уравнений. Для СПОВ свободный член уравнения определен (6), функция распределения и МО случайной величины α определены в (20), (21). Для СООВ свободный член уравнения определен (8). Для СПОВН–имеет вид (13). Для СООВН необходимо найти $(A_\beta * f_\alpha)(t)$. Эта задача усложняется тем, что в найденной формуле

(22) присутствуют дельта-функции Дирака, делающие невозможным корректное численное интегрирование $f_\alpha(x)$. Учитывая (22) и четность дельта-функции, запишем плотность распределения в виде:

$$f_\alpha(x) = H(T-x)f_\xi(x) + \delta(x-T)P_\xi(x) = C(x) + \delta(x-T)P_\xi(x);$$

где $C(x) = H(T-x)f_\xi(x);$

Тогда:

$$(A_\beta * f_\alpha)(t) = \int_0^t A_\beta(t-x)C(x)dx + \int_0^t A_\beta(t-x)\delta(x-T)P_\xi(x)dx =$$

$$= \int_0^t A_\beta(t-x)C(x)dx + A_\beta(t-T)P_\xi(T)H(t-T); \qquad (27)$$

где $A_\beta(t) = t(1-F_\beta(t)) = tP_\beta(t);$

Свободный член по формуле (27) уже можно рассчитать численно.

Таким образом, найдены ядро (26) и свободные члены (6, 8, 13, 27) интегральных уравнений (4, 7, 14, 15) соответственно, в виде, пригодном для численного решения.

4. Пример расчета

Произведем расчеты асимптотической и неасимптотической оценок СПОВ, СООВ, СПОВН, СООВН для стратегии функционирования, описанной в пункте 3. Период профилактики примем равным 7 условных единиц (у.е.) времени. В качестве закона распределения для наработки и плановой профилактики, возьмем двухпараметрическое распределение Вейбулла, для аварийного восстановления – гамма-распределение. Параметры закона распределения указаны в таблице 1:

Таблица 1. Параметры закона распределения случайных величин

Случайная величина	Обозначение	Параметр формы, у.е.	Параметр масштаба, у.е.
Длительность наработки до отказа	ξ	5	6
Длительность плановой профилактики	η_m	2	2
Длительность аварийного восстановления	η_f	3	5

На рисунках 4-5 представлены результаты расчета асимптотической и неасимптотической оценок СПОВ и СООВ, СПОВН и СООВН соответственно. Данные рисунки демонстрируют сходимость асимптотической (пунктир) и неасимптотических (непрерывная линия) оценок:

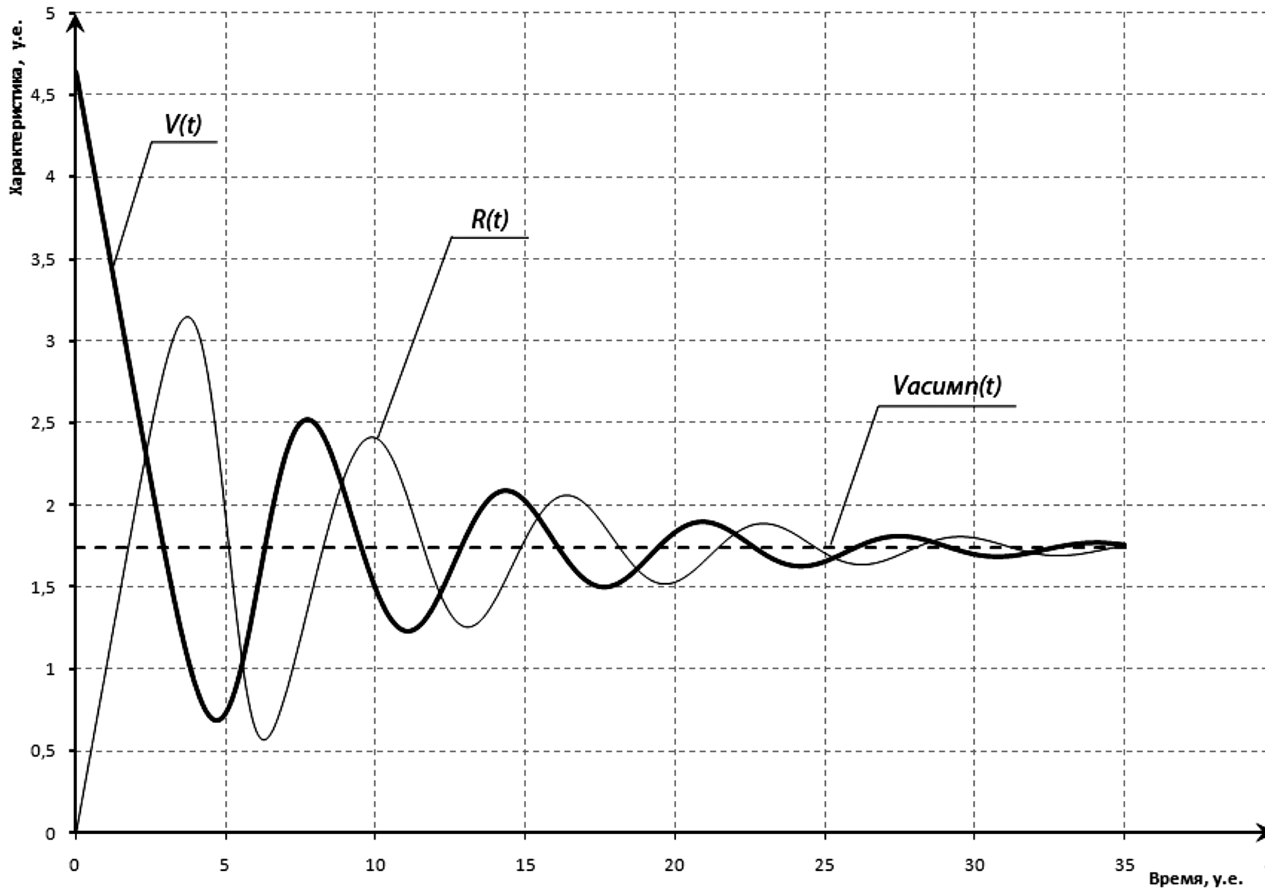

Рис. 4. График поведения оценок математического ожидания СПОВ и СООВ

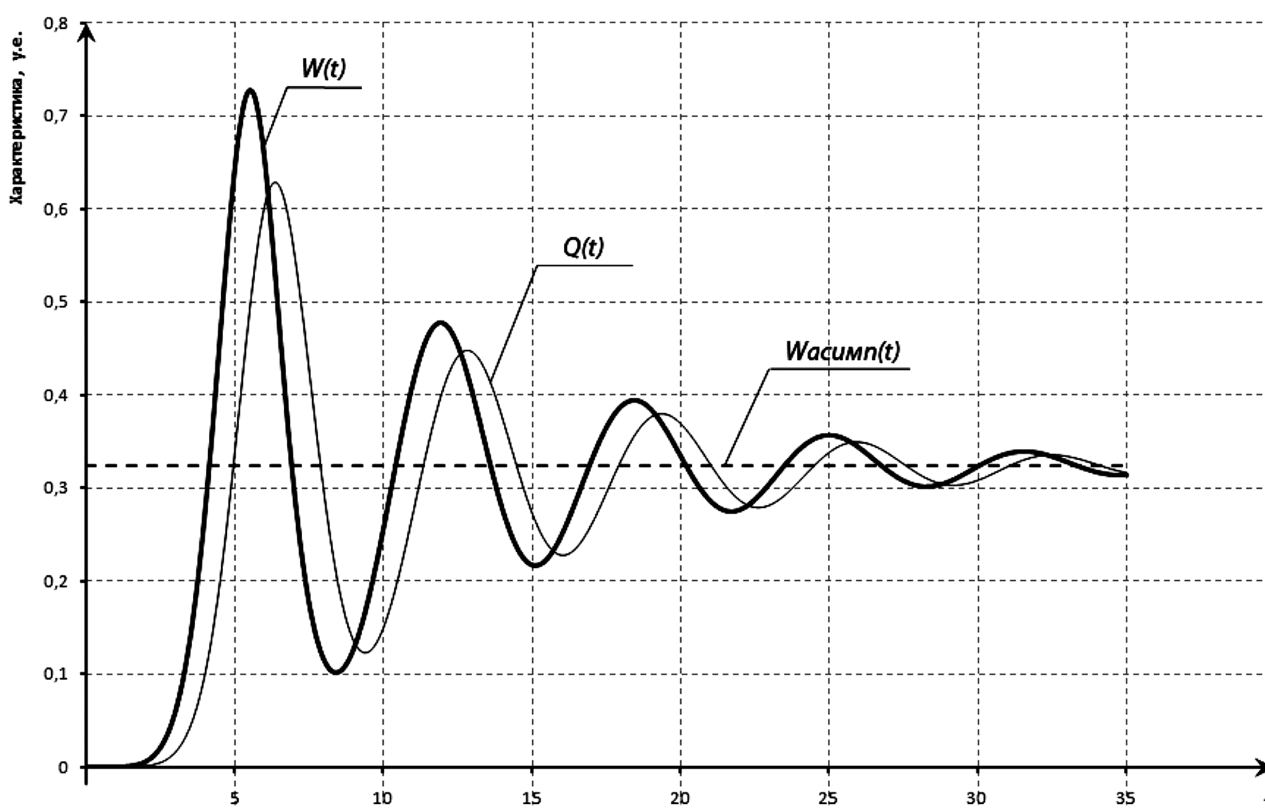

Рис. 5. График поведения оценок математического ожидания СПОВН и СООВН

Заключение

Был разработан обобщенный метод расчета следующих ресурсных характеристик для объекта с произвольной стратегией функционирования:

среднего прямого остаточного времени;

среднего обратного остаточного времени;

среднего прямого остаточного времени неработоспособности;

среднего обратного остаточного времени неработоспособности.

Получены как асимптотические, так и неасимптотические оценки данных показателей. Анализ оценок показывает, что разница между асимптотической и неасимптотической оценкой на начальном промежутке времени может составлять значительную величину, тогда как при длительном функционировании объекта данные оценки сходятся.

Данный метод может быть использован в работах по оценке ресурсных характеристик оборудования АЭС. В том числе – технических систем, для которых характерно наличие периодического или постоянного контроля неисправностей, проведение аварийно-восстановительных работ и т.д. Метод позволяет прогнозировать остаточный ресурс объектов на стадии эксплуатации, определяющий возможную продолжительность эксплуатации объекта с данного момента времени до достижения параметром технического состояния его предельного значения.

Литература

1. **Chin-Diew Lai, Min Xie.** Stochastic ageing and dependence for reliability. –Springer, 2006. – 418 с.

2. **Байхельт Ф., Франкен П**. Надёжность и техническое обслуживание. Математический подход. – М.: Радио и связь, 1988. – 390 с.

3. **Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.** Теория случайных процессов и её инженерные приложения. – М.: Наука, 1991. –384с.

4. **Чепурко В.А.** Характеристики надежности систем с учетом неоднородности потока отказов. Диагностика и прогнозирование состояния сложных систем. Сборник научных трудов №17. – Обнинск: ИАТЭ, 2007. – 78 с.

5. **Соколов С.В.** Оценка остаточного ресурса подсистем СУЗ реактора РБМК-1000 первого блока Смоленской АЭС // Известия вузов. Ядерная энергетика. – № 3. – 2009. – С. 37-43.

6. **Дагаев А.В.** Разработка и исследование неасимптотических методов анализа надежности элементов и подсистем ЯЭУ с учетом контроля и профилактики: диссертация на соискание ученой степени канд. техн. наук. / **Дагаев А.В.**; ИАТЭ. Обнинск, 2003. – 159 с.