УДК 519.254
Оригинальная статья
Надежность, том 17, №3, 2017 DOI: 10.21683/1729-2646-2017-17-3-41-48

Метод восстановления вектора приоритетов альтернатив в условиях неопределенности или неполноты экспертных оценок

Александр В. Бочков, *Научно-исследовательский институт экономики и организации управления в газовой промышленности, Москва, Россия*
Николай Н. Жигирев, *Научно-исследовательский институт экономики и организации управления в газовой промышленности, Москва, Россия*
Александра Н. Ридли, *аспирант МАИ (НИУ), Москва, Россия*

Резюме. Цель. *Одной из наиболее популярных процедур принятия решений за счёт своей эффективности, гибкости и простоты является т.н. метод попарных сравнений. Основным недостатком этого метода при проведении экспертиз большого количества альтернатив или в довольно широкой области знаний является невозможность сравнения каждого элемента с каждым, как по причине большого количества таких сравнений, случайных пропусков, так и по причине затруднений у эксперта при сравнении некоторых альтернатив. В оценках возникают пропущенные данные, затрудняющие принятие решения, т.к. большинство статистических методов не применимо к неполному набору данных. Не может работать с матрицей, содержащей преимущественно нулевые элементы и достаточно популярный алгоритм обработки матриц попарных сравнений (алгоритм Саати). Цель статьи заключается в разработке метода обработки неполных матриц сравнений с целью получения весовых коэффициентов (весов) рассматриваемых альтернатив, позволяющих количественно сравнить их между собой.* **Методы.** *На практике встречается несколько подходов к работе с массивами данных, содержащих пропущенные значения. Первый подход, наиболее простой в реализации, – это удаление экземпляров, содержащих пропущенные значения, из массива и работа только с полными данными. Использование данного подхода целесообразно, если пропуски данных носят единичный характер. Но даже в этом случае имеется серьезная опасность при удалении данных «потерять» важные закономерности. Вторым подходом является использование специальных модификаций методов обработки данных, допускающих наличие пропусков в массиве. И, наконец, используют различные методы оценки значений пропущенных элементов. Данные методы помогают заполнить пропуски в массивах, основываясь на некоторых предположениях о значении отсутствующих данных. Принципиальная применимость и эффективность того или иного подхода зависит от количества пропусков в данных и причин, по которым они образовались. В статье матрица попарных сравнений рассматривается в формате нагруженного графа, причём альтернативы являются вершинами, а сравнения между ними – рёбрами графа. Соответственно, если возникает пара альтернатив, для которой эксперт не смог задать предпочтение, то соответствующее ей ребро отсутствует. Рассмотрен способ удаления рёбер, соответствующих наиболее противоречивым оценкам, т.е. алгоритм разрыва циклов, приводящий к преобразованию исходного графа к остовному дереву, позволяющему однозначно сравнить любые две альтернативы. Алгоритм совместного согласования и верхних, и нижних границ экспертных оценок в данной статье не рассматривается.* **Результаты.** *В статье приведён пример практического применения разработанного алгоритма для обработки неполной матрицы попарных сравнений десяти объектов, полученной в ходе некоторой экспертизы. Показана работоспособность предложенного подхода к задачам восстановления приоритетов сравниваемых альтернатив, намечены пути автоматизации расчётов и направления дальнейших исследований.* **Выводы.** *Предложенный метод может быть применён для широкого круга задач анализа и количественной оценки рисков, управления безопасностью сложных систем и объектов, а также задач, связанных с контролем выполнения требований к таким высоконадежным элементам, как элементы ядерных реакторов, авиационной и ракетно-космической техники, газового оборудования и т.п., т.е. там, где требуется оценивать малые (менее 0,01) вероятности отказа на заданную наработку, а статистика отказов таких элементов в эксплуатации практически отсутствует. Предложенный алгоритм может найти применение при экспертном оценивании для установления вида и параметров распределения наработки на отказ таких высоконадежных элементов, что в свою очередь позволит оценивать с приемлемой точностью показатели надёжности.*

Ключевые слова: *пропущенные данные, экспертиза, нагруженный граф, остовное дерево, матрица попарных сравнений, критерий связности.*

Формат цитирования: *Бочков А.В., Жигирев Н.Н., Ридли А.Н. Метод восстановления вектора приоритетов альтернатив в условиях неопределенности или неполноты экспертных оценок // Надежность. 2017. Т. 17, № 3. С. 41-48. DOI: 10.21683/1729-2646-2017-17-3-41-48*

Введение

Процедуры принятия решений, в которых экспертам предлагается выбрать наилучший вариант(ы) из допустимого множества, достаточно часто используются в самых различных областях для проведения оценки, отбора и определения приоритетности целей и т.п. Очевидно, что сравнение различных альтернатив в соответствии с их предпочтительностью в задачах принятия решений, во многих случаях, не может быть выполнено с помощью одного критерия или одного эксперта. Как следствие, в большинстве задач принятия решений, существуют процедуры, позволяющие объединять мнения разных экспертов по поводу предлагаемых им альтернатив [1, 2]. Чаще всего эти процедуры используют т.н. метод попарных сравнений, предполагающих, что эксперт может выставить предпочтение одной альтернативы над другой при их сравнении.

Поскольку каждый эксперт имеет отличный от других опыт решения подобных задач, мнения различных экспертов могут существенно отличаться (действительно, существует множество факторов, которые влияют на предпочтения эксперта). Такое разнообразие экспертных оценок может привести к ситуациям, когда некоторые из них не смогут эффективно выразить любые степени предпочтения, сравнивая две или более доступных альтернатив. Это может быть следствием недостаточного уровня компетентности эксперта в какой-то области знаний, касающейся решаемой проблемы, или потому, что эксперт не в состоянии однозначно определить степень предпочтения некоторых из предложенных ему для сравнения вариантов над другими. В таких ситуациях такой эксперт вынужден обеспечить неполное нечеткое отношение предпочтения [3] или отказаться от оценивания предложенной пары альтернатив. Возникает нетривиальная задача восстановления пропущенных данных для получения приемлемого результата экспертизы.

На практике встречается несколько подходов к работе с массивами данных, содержащих пропущенные значения. Первый подход, наиболее простой в реализации, – это удаление экземпляров, содержащих пропущенные значения, из массива и работа только с полными данными [4]. Использование данного подхода выглядит целесообразным, если пропуски данных носят единичный характер. Но даже в этом случае имеется серьезная опасность при удалении данных «потерять» важные закономерности. В том же случае, когда количество пропусков велико, удаление соответствующих экземпляров может привести к дефициту данных и даже невозможности дальнейшей обработки. Вторым подходом является использование специальных модификаций методов обработки данных, допускающих наличие пропусков в массиве. В исследовании [5] приведен ряд модификаций методов классификации и кластеризации для работы с данными, содержащими пропущенные значения. И, наконец, третьим подходом, наиболее распространенным, является использование методов оценки значений пропущенных элементов. Данные методы помогают заполнить пропуски в массивах, основываясь на некоторых предположениях о значении отсутствующих данных. Принципиальная применимость и эффективность того или иного подхода зависит от количества пропусков в данных и причин, по которым они образовались. С точки зрения природы возникновения данных традиционно выделяют категории пропусков [6].

Довольно часто в эмпирических исследованиях приходится отвергать результаты экспертных опросов, когда отсутствуют некоторые данные [7].

В работе [8] исследовано влияние приведенных наборов попарных сравнений. Сравнивались результаты, полученные для полной матрицы попарного сравнения и неполной, полученной путём исключения известных элементов полной. Результат исследования [8] показал, что «случайное удаление до 50% от сравнений дает хорошие результаты без потери точности». Тем не менее, поскольку этот процесс опирается на априорное знание полной матрицы попарного сравнения, поэтому неприменим в реальной практике. Поэтому в [8] предложено при наличии неполной матрицы попарных сравнений использовать методы, позволяющие «достроить» матрицу до полной. Сильный аргумент в пользу этого подхода дан в [9]: «сценарий с пропущенными значениями, как правило, нарушает рейтинг более сильно, чем тот же сценарий со значением при условии». Система, которая помогает построить нечёткие отношения предпочтений в решении была предложена в [10]. В группе принятия решений, процедур, исправляющих отсутствие знаний конкретного эксперта, используя информацию, предоставленную остальными экспертами, вместе с некоторыми процедурами агрегации, можно найти в работах [11] и [12]. Эти подходы имеют ряд недостатков, некоторые из которых отмечают авторы [13].

В отечественной литературе также есть работы, связанные с поиском ответов на обозначенные нами проблемы, например, [14], однако используемые ими подходы не дают однозначного решения.

1. Постановка задачи

В классической постановке Саати [15] мы имеем некоторую совокупность объектов $O_1, O_2, \ldots, O_N$(возможных действий, параметров, альтернатив решений и т.п.) некоторой иерархии. Количественные суждения эксперта о паре объектов (O_i, O_j) представляются матрицей размера n×n: $A=(a_{ij})$, $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, причём числа a_{ij}, из которых состоит матрица, соответствуют значимости объекта O_i по сравнению с O_j и неотрицательны. Для выявления количественных показателей относительной значимости сравниваемых объектов, в методе предложена шкала относительных сравнений, выраженная в целых числах от 1 до 9. При этом объекты, имеющие одинаковую важность, получают оценку «1». Также «1» равны оценки, стоящие на главной диагонали матрицы (объекты сравниваются сами с собой), т.е. $a_{ii}=1$. Матрица

Саати обратно-симметрична относительно главной диагонали, т.е. $a_{ij}=1/a_{ji}$.

Далее в [15], после построения количественных суждений о парах (O_i, O_j) в числовом выражении через a_{ij} задача сводится к тому, чтобы поставить в соответствие каждому из сравниваемых объектов числовые веса, которые в наилучшей степени соответствовали бы зафиксированным суждениям экспертов. Для нахождения вектора приоритетов необходимо найти вектор ω, который удовлетворяет $A\omega=\lambda_{max}\omega$. Согласно теореме о существовании и единственности при решении задачи о собственном значении для неотрицательной матрицы по [15, 16] находят главный собственный вектор, который после нормализации и становится вектором приоритетов сравниваемых объектов.

Мы ищем решение для случая, когда в матрице A некоторые оценки не определены, т.е. $\exists a_{ij}:a_{ji}=NA$ (здесь NA – англ., Not Available).

2. Описание метода

Матрица попарных неполных сравнений $\overline{A}$ легко преобразуется в кососимметричную матрицу $\overline{\overline{A}}$ путём логарифмирования элементов матрицы коэффициентов.

Веса W_i преобразуются в V_i=ln(W_i), матрица коэффициентов попарных сравнений $\overline{S}_{ij}=\ln(S_{ij})$, а матрица невязки $F_{ij}=\left(\dfrac{S_{ij}\times W_j}{W_i}-1\right)$ – в матрицу функционалов $\overline{F}_{ij}=\left(\overline{S}_{ij}+V_j-V_i\right)$ приобретает кососимметричный вид.

$$W_i,S_{ij},F_{ij}=\left(\frac{S_{ij}\times W_j}{W_i}-1\right)\rightarrow V_i=\ln\left(W_i\right),$$
$$\overline{S}_{ij}=\ln\left(S_{ij}\right),\overline{F}_{ij}=\left(\overline{S}_{ij}+V_j-V_i\right) \qquad (1)$$

Определив величины V_i, проводим обратное преобразование:

$$V_i\rightarrow W_i=\frac{\exp(V_i)}{\sum_{j=1}^{N}\exp(V_j)} \qquad (2)$$

для того чтобы удовлетворить условию нормировки весов Саати, т.е.

$$\sum_{i=1}^{N}W_i=1,W_i>0\left(i=1,\ldots,N\right).$$

Можно провести диагонализацию матрицы, чтобы она приобрела положительный вид над основной диагональю. Однако, следует отметить, что такая диагонализация не всегда возможна даже в случае одного эксперта, и, впрочем, необязательна – важна только связность графа матрицы. Для группы же экспертов диагонализация необходима, так как в зависимости от порядка вершин происходит перестановка верхних и нижних оценок. Предполагается, что для группы экспертов полное согласие не достижимо, а их коэффициенты предпочтения $\overline{S}_{ij}$ находятся в некотором диапазоне:

$$B_{ij}\le\overline{S}_{ij}\le T_{ij} \qquad (3)$$

Нижняя граница B_{ij} (англ., Bottom) соответствуют минимальному значению, а верхняя граница T_{ij} (англ., Top) – максимальному. В данной статье мы рассматриваем реализацию алгоритма для верхних оценок $T_{i,j}$или одного эксперта $\overline{S}_{i,j}$.

В силу особенностей матрицы T_{ij} начальное значение весов может быть произвольной постоянной величиной, чтобы не путаться в знаках приращений весов. Величина изменений зависит от типа строки-столбца. Тип равен «-1», когда в j-ой строке матрицы $(E_1-\ldots-N_1;\ldots;E_n-\ldots-N_n)$ выше основной диагонали присутствуют только неопределенные значения (NA). Тип равен «1», когда в i-ом столбце матрицы $(E_1-\ldots-N_1;\ldots;E_n-\ldots-N_n)$ выше основной диагонали присутствуют только неопределенные значения (NA). В тех случаях, когда реальные данные присутствуют и в j-ой строке, и в i-ом столбце, очевидно, что тип первого объекта всегда равен «1», а тип последнего объекта равен «-1».

Первоначально матрица $\left\|\overline{F}_{ij}\right\|$ равна матрице $\left\|\overline{S}_{ij}\right\|$. Произвольный выбор весов вызван тем фактом, что результат не зависит от выбора начального приближения

$$\overline{F}_{ij}=\left(\overline{S}_{ij}+\left[V_j+const\right]-\left[V_i+const\right]\right)=\left(\overline{S}_{ij}+\left[V_j\right]-\left[V_i\right]\right). \qquad (4)$$

Первый важный этап: поиск самого жёсткого противоречия. Для всех строк ищется оптимальное смещение весов за счёт оптимизации веса V_i, которое затрагивает и j-ую строку и i-ый столбец. Выбираем строки по убыванию (i=N,…,1) до тех пор, пока все смещения не обратятся в нуль[1].

Далее, принимаем

$$\left|\Delta V_i\right|\le\varepsilon C=1{,}0e^{-7}. \qquad (5)$$

Изменение весов происходит шаг за шагом по закономерностям

$$V_i=V_i+\Delta V_i. \qquad (6)$$

После выполнения очередного шага ΔV_i обращается в ноль.

Величина ΔV_i выбирается по алгоритму, в основе которого лежит оптимизация модуля значений в матрице $\left\|\overline{F}_{ij}\right\|$, но только в той части, которая касается i-го шага (i-строки).

Мы минимизируем максимум из модулей следующих величин

$$\max_{\square}\left\{\left|R^i_{\max}-\Delta^i\right|,\left|R^i_{\min}-\Delta^i\right|,\left|C^i_{\max}+\Delta^i\right|,\left|C^i_{\min}+\Delta^i\right|\right\}\rightarrow\min_{\Delta\square} \qquad (7)$$

для всех i=1,…,N, где N – размерность задачи; $R^i_{\max}$ – максимальное значение над диагональю в i-ой строке; $R^i_{\min}$ – минимальное значение над диагональю в i-ой

[1] Например, для матрицы размерности 10 потребуется порядка 15 итераций.

Таблица 1

Тип	Условие	Формула расчёта
0	Есть элементы в строке и есть элементы в примыкающем столбце	
	если $R_{\max} > \max\left\{\left\|R_{\min}\right\|, \left\|C_{\min}\right\|, C_{\max}\right\}$, то	$\Delta^{(I)} = \frac{1}{2} \cdot \min\left\{R_{\max} + R_{\min}; R_{\max} - C_{\max}\right\}$
	если $C_{\max} > \max\left\{\left\|R_{\min}\right\|, \left\|C_{\min}\right\|, R_{\max}\right\}$, то	$\Delta^{(II)} = \frac{1}{2} \cdot \min\left\{-C_{\max} - C_{\min}; R_{\max} - C_{\max}\right\}$
	если $-R_{\max} > \max\left\{\left\|C_{\min}\right\|, C_{\max}, R_{\max}\right\}$, то	$\Delta^{(III)} = \frac{1}{2} \cdot \min\left\{R_{\max} + R_{\min}; R_{\min} - C_{\min}\right\}$
	если $-C_{\max} > \max\left\{\left\|R_{\min}\right\|, C_{\max}, R_{\max}\right\}$, то	$\Delta^{(IV)} = \frac{1}{2} \cdot \min\left\{-C_{\max} - C_{\min}; R_{\min} - C_{\min}\right\}$
	в других случаях	$\Delta^{(V)} = 0$
1	Все компоненты столбца равны NA	$\Delta V_i = \frac{\left(R^i_{\max} + R^i_{\min}\right)}{2}$
-1	Все компоненты строки равны NA	$\Delta V_i = \frac{-\left(C^i_{\max} + C^i_{\min}\right)}{2}$

строке; $C^i_{\max}$ – максимальное значение над диагональю в i-ом столбце; $C^i_{\min}$ – минимальное значение над диагональю в i-ом столбце.

Изменённый вес рассчитывается по формулам:

$$W^i = W^i + \Delta^i. \tag{8}$$

Соответствующие решения для любой строки определяются по формулам, приведённым в таблице 1.

Следующий шаг: удаление ячеек. Если это допустимо по критерию связности[1], удаляется первое по порядку ребро принадлежащее правому концу «поплавка» напротив которого в строке имеется ребро из «левого» конца «поплавка», когда ребро (i,j) является единственным ребром, соединяющим непересекающиеся подмножества вершин (объектов).

После удаления ребра решение возобновляется с начальных условий.

Стоит отметить, что важно следить за возможным изменением типа «строки-столбца». Обычно изменения происходят в сторону от «0» до «1», то есть тогда, когда исчезает последний значимый элемент в соответствующем столбце.

Следующий этап: процедура, состоящая из двух вложенных циклов. Внешний цикл – поиск очередного «предельного цикла» в оставшейся матрице. Внутренний цикла – поиск рёбер, составляющих «предельный цикл».

Окончанием внешнего цикла является условие:

$$\left|sup\left\|F_{ij}\right\|\right| < \varepsilon_F = 1{,}0 \cdot e^{-5} \tag{9}$$

Полученное решение и будет являться решением задачи для случая одного эксперта. Для случая группы экспертов это решение – всего лишь опорное ($V_i^{опор.}$).

[1] Критерий связности важен в тех случаях, когда возможен разрыв остовного графа.

Требуется учёт отдалённости нижних границ, задаваемой матрицей $\left\|B_{ij}\right\|$. Для этого восстановим первоначальную конфигурацию графа.

Рассчитаем результирующую матрицу $\left\|R_{ij}\right\|$:

$$R_{ij} = -(B_{ij} + V_j - V_i) \tag{10}$$

и удалим в ней все отрицательные элементы.

Некоторые ребра могут дополнить опорную конфигурацию.

Далее осуществляем следующую процедуру, которая имеет также два цикла.

Во внешнем цикле мы определяем наиболее критическое ребро, которое можно отбросить. Для этого изме-

Таблица 2 – Исходные значения коэффициентов

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10
O1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	NA	NA	NA	$\frac{1}{4}$
O2	$\frac{3}{1}$	1	$\frac{1}{5}$	NA	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	NA	NA	NA	$\frac{1}{3}$
O3	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{1}$	1	$\frac{3}{1}$	NA	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{3}{1}$
O4	$\frac{3}{1}$	NA	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	NA	NA	NA	NA	$\frac{1}{3}$
O5	$\frac{7}{1}$	$\frac{5}{1}$	NA	$\frac{3}{1}$	1	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{3}{1}$
O6	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{3}$	NA	$\frac{1}{3}$	1	NA	NA	NA	$\frac{1}{4}$
O7	NA	NA	$\frac{1}{3}$	NA	$\frac{1}{5}$	NA	1	NA	NA	$\frac{1}{5}$
O8	NA	NA	$\frac{1}{5}$	NA	$\frac{1}{5}$	NA	NA	1	NA	$\frac{1}{5}$
O9	NA	NA	$\frac{1}{5}$	NA	$\frac{1}{5}$	NA	NA	NA	1	$\frac{1}{5}$
O10	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{1}$	1

Таблица 3 – Логарифмы от значения коэффициентов

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10
O1	0	-1,09861	-1,60944	-1,09861	-1,94591	-1,09861	NA	NA	NA	-1,38629
O2	1,098612	0	-1,60944	NA	-1,60944	-1,38629	NA	NA	NA	-1,09861
O3	1,609438	1,609438	0	1,098612	NA	1,098612	1,098612	1,609438	1,609438	1,098612
O4	1,098612	NA	-1,09861	0	-1,09861	NA	NA	NA	NA	-1,09861
O5	1,94591	1,609438	NA	1,098612	0	1,098612	1,609438	1,609438	1,609438	1,098612
O6	1,098612	1,386294	-1,09861	NA	-1,09861	0	NA	NA	NA	-1,38629
O7	NA	NA	-1,09861	NA	-1,60944	NA	0	NA	NA	-1,60944
O8	NA	NA	-1,60944	NA	-1,60944	NA	NA	0	NA	-1,60944
O9	NA	NA	-1,60944	NA	-1,60944	NA	NA	NA	0	10,65705
O10	1,386294	1,098612	-1,09861	1,098612	-1,09861	1,386294	1,609438	1,609438	1,609438	0

Таблица 4 – Перестановка порядка объектов

	O5	O3	O10	O6	O2	O4	O1	O7	O8	O9
O5	0	NA	1,0986	1,0986	1,7041	1,0986	1,9459	1,7041	1,7041	1,7041
O3	NA	0	1,0986	1,0986	1,7041	1,0986	1,7041	1,0986	1,7041	1,7041
O10	-1,0986	-1,0986	0	1,3863	1,0986	1,0986	1,3863	1,7041	1,7041	1,7041
O6	-1,0986	-1,0986	-1,3863	0	1,3863	NA	1,0986	NA	NA	NA
O2	-1,7041	-1,7041	-1,0986	-1,3863	0	NA	1,0986	NA	NA	NA
O4	-1,0986	-1,0986	-1,0986	NA	NA	0	1,0986	NA	NA	NA
O1	-1,9459	-1,7041	-1,3863	-1,0986	-1,0986	-1,0986	0	NA	NA	NA
O7	-1,7041	-1,0986	-1,7041	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
O8	-1,7041	-1,7041	-1,7041	NA	NA	NA	NA	NA	0	NA
O9	-1,7041	-1,7041	-1,7041	NA	NA	NA	NA	NA	NA	0

ряется масштаб единичного смещения для каждого веса U_i, определяется размер единичного шага смещения для каждого ребра (i,j) D_{ij}, и величина шага h по формуле

$$h = \min_{i,j}\left(\frac{R_{ij}}{D_{ij}}\right). \qquad (11)$$

Формулы для D_{ij} и U_i в этой статье опускаем.

Далее во внутреннем цикле определяем виртуальное оптимальное решение по формулам:

$$V_i^{опт.} = V_i^{опор.} - h \times U_i,\ (i = 1,\ldots,N) \qquad (12)$$

$$R_{ij}^{опт.} = R_{ij}^{опор.} - h \times D_{ij},\ (i = 1,\ldots,N-1;\ j = i+1,\ldots,N) \qquad (13)$$

Если появившиеся нулевые элементы $R_{ij}^{опт.}$ не приводят к потере связности графа, ребро первого из них может быть отброшено. Если, напротив, происходит потеря связности матрицы результатов, то происходит запоминание «последней» удачной попытки в качестве уже реального оптимального значения для весов $R_{ij}^{опт.}$.

Если матрица $R_{ij}^{опт.}$ совпадает с матрицей инцидентности матрицы $R_{ij}^{опор.}$, единичное смещение U_i=1 (тип i=1); U_i=0 (тип i=–1).

После выброса вершин в $R_{ij}^{опт.}$ оптимальное решение приобретает окончательный вид. Оно примыкает к нижней границе, и является оптимальным решением, полученным на данных о верхней границе. Предполагается, что конфликт интересов находится на верхней границе, где каждый их экспертов стремится обозначить собственные приоритеты.

3. Пример практического применения метода

Пусть задана матрица попарных сравнений, заполненная экспертами по методу Саати (таблица 2).

Матрица заполнена не полностью (отсутствующие оценки обозначены *NA*), поскольку эксперты не смогли высказать своих предпочтений при сравнении некоторых пар объектов (например, O_1 и O_7, O_2 и O_4, и др.).

Преобразуем матрицу неполных попарных сравнений в кососимметричную матрицу путём логарифмирования элементов матрицы коэффициентов (таблица 3).

Матрица после диагонализации, которую мы проводим для того, чтобы матрица приобрела положительный вид над основной диагональю, представлена в таблице 4.

Рассмотрим реализацию алгоритма[1] для верхних оценок $T_{i,j}$ или одного эксперта $\overline{S}_{i,j}$.

[1] В силу того, что матрица является кососимметричной, опустим при её изображении её часть ниже главной диагонали

Таблица 5 – Исходные данные

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
i	V_j	V_j	Тип	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10,00000	1,70280	1	0	NA	1,2528	1,3863	1,7918	1,2528	2,1528	1,7118	1,7918	1,6247
2	10,00000	1,48430	1		0	1,3863	1,3863	1,7047	1,0968	1,8718	1,2528	1,7047	1,8718
3	10,00000	0,24275	0			0	1,5041	1,2528	1,3863	1,5041	1,7918	1,8718	1,7047
4	10,00000	0,05265	0				0	1,6094	NA	1,2528	NA	NA	NA
5	10,00000	-0,20275	0					0	NA	1,3863	NA	NA	NA
6	10,00000	-0,06675	0						0	1,2528	NA	NA	NA
7	10,00000	-1,70280	-1							0	NA	NA	NA
8	10,00000	-1,52230	-1								0	NA	NA
9	10,00000	-1,78825	-1									0	NA
10	10,00000	-1,74825	-1										0

Таблица 6

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
i	V_j	V_j	Тип	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10,81469	0,00	1	0	0	0,5956	0,0279	-0,373	-0,354	-0,5956	-0,176	-0,3619	-0,3686
2	10,74094	0,00	1		0	0,8029	0,1016	-0,387	-0,436	-0,8029	-0,5612	-0,3753	-0,0477
3	10,15750	0,00	0			0	0,8029	-0,255	0,4365	-0,5871	0,5612	0,3753	0,3686
4	9,45626	0,00	0				0	0,8029	0	-0,1372	0	0	0
5	8,64972	0,00	0					0	0	0,8029	0	0	0
6	9,20767	0,00	0						0	0,1114	0	0	0
7	8,06628	0,00	-1							0	0	0	0
8	8,92692	0,00	-1								0	0	0
9	8,66097	0,00	-1									0	0
10	8,82140	0,00	-1										0

Таблица 7

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
	V_i	ΔV_j	W_i	Тип V_i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
v_1	2,688766	0,00000	0,162651	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-1e^{-16}$	$-2e^{-16}$
v_2	2,229765	0,00000	0,102782	1		0	0	0	0	0	0	$-1e^{-16}$	0	0
v_3	2,768765	0,00000	0,176197	1			0	0	0	0	$-2e^{-16}$	$-1e^{-16}$	$1e^{-6}$	$1e^{-6}$
v_4	2,517465	0,00000	0,137044	1				0	0	0	$-2e^{-16}$	0	0	0
v_5	2,650965	0,00000	0,156618	1					0	0	$2e^{-16}$	0	0	0
v_6	2,517465	0,00000	0,137044	1						0	$-2e^{-16}$	0	0	0
v_7	1,264665	0,00000	0,039154	-1							0	0	0	0
v_8	0,976965	0,00000	0,029365	-1								0	0	0
v_9	0,896966	0,00000	0,027107	-1									0	0
v_{10}	1,064066	0,00000	0,032038	-1										0

В силу особенностей матрицы T_{ij} начальное значение весов (столбец B, табл. 5) может быть произвольной постоянной величиной, чтобы не путаться в знаках приращений весов. Величина изменений (столбец C, табл. 5), как мы говорили выше, зависит от типа строки-столбца.

Для поиска самого жёсткого противоречия, для всех строк ищем оптимальное смещение весов за счёт оптимизации веса V_i, которое затрагивает и j-ую строку и i-ый столбец. Выбирая строки по убыванию ($i=N,\ldots,1$) до тех пор, пока **все смещения** в столбце C (табл. 5) не обратятся в нуль.

В соответствии вышеизложенным алгоритмом ищем предельный по модулю цикл для начальных стартовых условий. Результат приведён в таблице 6.

Какая ячейка должна быть удалена? На правом конце «поплавка» – (2,3), (3,4), (4,5), (5,7), на левом конце только одно ребро (2,7). Ребра на правом конце сообщают, что 2-й объект лучше 3-го, 3-й объект лучше 4-го, 4-й лучше 5-го, 5-й лучше 7-го в $e^{0,8029}$=2,3632 раз.

Итого получается, что 2-й объект лучше 7-го объекта в $(2,3632)^4$=31,1890 раз. Но в ячейке (2,7) стоит обратное – объект 2-й хуже 7-го объекта в 2,3632 раза. И тем

Таблица 8

	$w_{ср}$			w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
w_1	2,688766			0	0	-0,773	-0,745	-1,3485	-0,745	-0,3677	0,2077	0,1824	0,1206
w_2	2,229765				0	-1,232	-0,981	-1,8075	-1,204	-0,539	0,3365	-0,1713	-0,2206
w_3	2,768765					0	-1,002	-0,5754	-0,665	0,4073	0,4055	0,3677	0,4519
w_4	2,517465						0	-1,3863	0	0,5596	0	0	0
w_5	2,650965							0	0	0,47	0	0	0
w_6	2,517465								0	0,5596	0	0	0
w_7	1,264665									0	0	0	0
w_8	0,976965										0	0	0
w_9	0,896966											0	0
w_{10}	1,064066												0

Таблица 9

	$w_{ср}$			w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
w_1	2,688766			0	0	0	0	0	0	0	0,2077	0,1824	0,1206
w_2	2,229765				0	0	0	0	0	0	0,3365	0	0
w_3	2,768765					0	0	0	0	0,4073	0,4055	0,3677	0,4519
w_4	2,517465						0	0	0	0,5596	0	0	0
w_5	2,650965							0	0	0,47	0	0	0
w_6	2,517465								0	0,5596	0	0	0
w_7	1,264665									0	0	0	0
w_8	0,976965										0	0	0
w_9	0,896966											0	0
w_{10}	1,064066												0

Таблица 10

	V_i	W_i		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
w_1	2,48106	0,1611740		0	0	0	0	0	0	0	$1e^{-6}$	0	0
w_2	2,02867	0,1025226			0	0	0	0	0	0	0,1354	0	0
w_3	2,56767	0,1757537				0	0	0	0	0,2062	0,2044	0,1666	0,2508
w_4	2,31637	0,1366993					0	0	0	0,3585	0	0	0
w_5	2,44987	0,1562230						0	0	0,2689	0	0	0
w_6	2,11637	0,1119200							0	0,1585	0	0	0
w_7	1,26467	0,0477550								0	0	0	0
w_8	0,97697	0,0358156									0	0	0
w_9	0,89697	0,0330620										0	0
w_{10}	1,06407	0,0390751											0

самым возникает противоречие. С одной стороны, 2-й лучше в 31,1890 раз объекта 7, с другой стороны хуже его в 2,3632 раза. Но самое важное, что цикл не может быть улучшен. Попытка изменить веса объектов в цикле приводит к автоматическому росту модуля.

Следовательно, должно быть удалено ребро (2,3). Поскольку 0,8029 до 0,1016 (ребро (2,4)) имеет наибольшее сокращение.

Следуя по алгоритму далее, осуществляем процедуру двух вложенных циклов (внешнего и внутреннего). Полученное решение (столбец «В», таблица 7) является решением задачи для случая «одного эксперта».

Для учёта отдалённости нижних границ, задаваемой матрицей $\left\| B_{ij} \right\|$ восстановим первоначальную конфигурацию графа (таблица 8).

И далее рассчитаем по (10) результирующую матрицу R_{ij} и удалим в ней все отрицательные элементы (таблица 9).

Некоторые ребра, например, (1,8), могут дополнить опорную конфигурацию. Далее во внешнем цикле мы определяем наиболее критическое ребро, которое можно отбросить. Для этого измеряется масштаб единичного смещения для каждого веса U_i, определяется размер единичного шага смещения для каждого ребра (i, j) D_{ij} , и величина шага h по формуле (11), во внутреннем цикле определяем виртуальное оптимальное решение по формулам (12) и (13).

В рассматриваемом примере матрица $R_{ij}^{опт.}$ совпадает с матрицей инцидентности матрицы $R_{ij}^{опор.}$, единичное смещение U_i=1 (тип i=1); U_i=0 (тип i=–1).

После выброса вершин (1,10) и (1,9) в $R_{ij}^{опт.}$ оптимальное решение приобретает окончательный вид (таблица 10).

Решение примыкает ребром (1,8) к нижней границе, и является оптимальным решением, полученным на данных о верхней границе. Предполагается, что конфликт интересов находится на верхней границе, где каждый их экспертов стремится обозначить собственные приоритеты.

Библиографический список

1. Evangelos, T.: Multi-criteria decision making methods: a comparative study. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000)

2. Fodor, J., Roubens, M.: Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994)

3. Xu, Z.S.: Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. International Journal of Approximate Reasoning, 36:3 (2004) 261–270

4. Литтл Р. Дж. А., Рубин Д. Б. Статистический анализ данных с пропусками. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 336 с.

5. Garcia-Laencina P.J., Sanco-Gomez J.-L., Figueiras-Vidal A.R. Pattern classification with missing data: a review. – London: Springer-Verlag Limited, 2009.

6. Schafer J.L., Graham J.W. Missing data: Our view to the state of the art // Psychological methods. – 2002. – Vol.7. – № 2. – С.147–177.

7. Millet I., “The effectiveness of alternative preference elicitation methods in the analytic hierarchy process,” J. Multi-Criteria Decis. Anal., vol. 6, no. 1, pp. 41–51, 1997.

8. Carmone F. J., Kara Jr., A., Zanakis S. H. “A Monte Carlo investigation of incomplete pairwise comparison matrices in AHP,” Eur. J. Oper. Res., vol. 102, no. 3, pp. 533–553, Nov. 1997.

9. Ebenbach D.H., Moore C.F. “Incomplete information, inferences, and individual differences: The case of environmental judgements,” Org. Behav. Human Decis. Process., vol. 81, no. 1, pp. 1–27, Jan. 2000.

10. S. Alonso, F. J. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma, “An interactive decision support system based on consistency criteria,” J. Mult.-Valued Log. Soft Comput., vol. 14, no. 3–5, pp. 371–386, 2008.

11. J. K. Kim and S. H. Choi, “A utility range-based interactive group support system for multiattribute decision making,” Comput. Oper. Res., vol. 28, no. 5, pp. 485–503, Apr. 2001.

12. J. K. Kim, S. H. Choi, C. H. Han, and S. H. Kim, “An interactive procedure for multiple criteria group decision making with incomplete information,” Comput. Ind. Eng., vol. 35, no. 1/2, pp. 295–298, Oct. 1998.

13. Chiclana F., Herrera-Viedma E., Alonso S. A Note on Two Methods for Estimating Missing Pairwise Preference Values. IEEE Transactions On Systems, MAN, and Cybernetics – Part B: Cybernetics, Vol. 39, No. 6, December 2009. 1628- 1633.

14. Карлов И.А. Восстановление пропущенных данных при численном моделировании сложных динамических систем, Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление, 2013, выпуск 6(186), с. 137–144. (I. A. Karlov, “The missing value estimation in numerical modeling of complex dynamic systems”, SPbSPU Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems, 2013, no. 6(186), 137–144).

15. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

16. Ашманов С.А. Математические модели и методы. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1980. – 199 с.

Сведения об авторах

Александр В. Бочков – кандидат технических наук, заместитель директора центра анализа рисков, Научно-исследовательский институт экономики и организации управления в газовой промышленности, Москва, Россия, тел. +7 (916) 234-40-32 e-mail: a.bochkov@gmail.com

Николай Н. Жигирев – кандидат технических наук, главный научный сотрудник, Научно-исследовательский институт экономики и организации управления в газовой промышленности, Москва, Россия, тел. +7 (985)782-47-16, e-mail: nnzhigirev@mail.ru

Александра Н. Ридли – аспирант МАИ (НИУ), Москва, Россия, тел. +7 (929) 970-59-69, e-mail: alexandra.ridley@yandex.ru

Поступила 18.01.2017