



Шебе Х., Шубинский И. Б.

ПРЕДЕЛЬНАЯ НАДЕЖНОСТЬ СТРУКТУРНОГО РЕЗЕРВИРОВАНИЯ

Во многих случаях уровень надежности системы можно повысить, если использовать резервирование компонентов системы. Такой метод применяют, в частности, в информационных системах. В данной статье рассматриваются избыточные системы с безотказным переключением. Показано, что есть предел стремлению увеличить до бесконечности количество резервированных элементов. Этот предел определен для типичного экспоненциального распределения времени до отказа цифровой техники в информационных системах. Кроме того, даны предельные оценки для элементов систем с распределениями, относящимися к классу NBUE ((new better than used in expectation – «новое лучше, чем использовалось в ожидании»)) или NWUE (new worse than used in expectation – «новое хуже, чем использовалось в ожидании»)).

Ключевые слова: структурное резервирование, классификация видов структурного резервирования, параллельная система, безотказность, предельные оценки, нагруженное резервирование, ненагруженное резервирование, вероятность отказа в переключении на резерв.

Введение

Существует два возможных способа повышения надежности системы. Первый способ заключается в том, чтобы повысить уровень надежности компонентов системы. Второй – использовать избыточность [1]. *Избыточность* – это наличие в техническом объекте возможностей сверх тех, которые минимально необходимы для обеспечения его нормального функционирования. Если отбросить соображения, связанные с расходами и увеличением габаритов, можно прийти к выводу, что путем использования резервированных элементов можно повысить уровень надежности системы до сколь угодно высокого уровня. В данной статье будет рассмотрено, до какого предела возможно повышать уровень надежности объекта. В статье будет показано, что, при некоторых допущениях, надежность нельзя повысить больше, чем до определенного уровня.

В разделе 2 описываются основные допущения нашей модели. В следующих двух главах рассматриваются два граничных режима резерва – нагруженный («горячий») и ненагруженный («холодный») резерв. Режим «горячего» резерва предполагает одинаковую нагрузку для резервного и для главного компонента, а также отсутствие нагрузки, распределенной между резервированными компонентами. В случае «холодного» резерва устройства резервирования вовсе не изнашиваются на протяжении этапа их резервной готовности, т.е. пока работает основной компонент. Все остальные режимы резервирования предполагают режимы изнашивания, находящиеся между этими двумя ситуациями нагрузки на резервированные компоненты.

В третьем разделе описывается ситуация «горячего» резерва – наиболее неблагоприятная ситуация с точки зрения износа компонентов.

В четвертом разделе рассматривается ситуация «холодного» резерва, не сопряженная с износом резервных компонентов.

В пятом разделе приводится пример, а в шестом разделе подводятся итоги и делаются выводы.

Основные допущения

Для этой модели мы исходим из следующих допущений:

а) Определение и переключение на другой компонент безотказно. При этом под критерием отказа в подключении резервного компонента вместо отказавшего основного понимается такое событие, когда либо отказало переключающее устройство при условии правильного обнаружения отказа, либо отказ не обнаружен при условии исправности переключающего устройства, либо одновременно не обнаружен отказ основного компонента и в состоянии отказа находится переключающее устройство. Эта результирующая вероятность отказа в переключении в статье обозначается как γ ;

б) Жизненный цикл компонентов имеет произвольный характер и соответствует распределению срока службы $F(x)$ при $F(0) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$;

в) Времена выхода из строя всех резервированных компонентов статистически не зависят друг от друга;

г) Количество резервированных компонентов не ограничено;

д) У всех резервированных компонентов одинаковое распределение срока службы;

е) Распределение срока службы компонентов непрерывно во времени, дифференцируемо, имеет ограниченное среднее число и стремится к 1, как время стремится к бесконечности.

Более подробно эта модель описана в работе [2].

Параллельные системы с безотказным переключением в данной статье будут называться несовершенными системами.

Следующей рисунок (рис. 1) – пример системы с резервированными компонентами. Каждый из компонентов m , предположительно отличающихся друг от друга, имеет n резервных элементов. Рассмотрим этот тип систем для $n \rightarrow \infty$.

В следующих разделах упростим систему, изображенную на рис. 1, принимая в расчет только один компонент, имеющий резервные элементы.

«Горячий» резерв

В случае «горячего» резерва все компоненты с самого начала находятся в режиме полной нагрузки. Таким образом, здесь мы имеем дело с простой параллельной системой. Предположим, что компонент с распределением срока службы $F(x)$ параллельно связан со своими дублирующими компонентами. На следующем рисунке 2 изображена блок-схема надежности системы. Предположим, что компоненты n связаны параллельно.

Распределение срока службы параллельной системы с «горячим» резервом может быть рассчитано следующим образом. Для достижения уровня резервирования k , где k – функционирующие компоненты, необходимо обеспечение $k - 1$ правильных переключений при условии отказа при k -ом переключении. Вероятность этого события составляет $(1 - \gamma)^{k-1} \gamma$. Функция распределения идентичной единицы k с распределением срока службы $F(x)$ выглядит как

$$1 - (1 - F(x))^k. \quad (1)$$

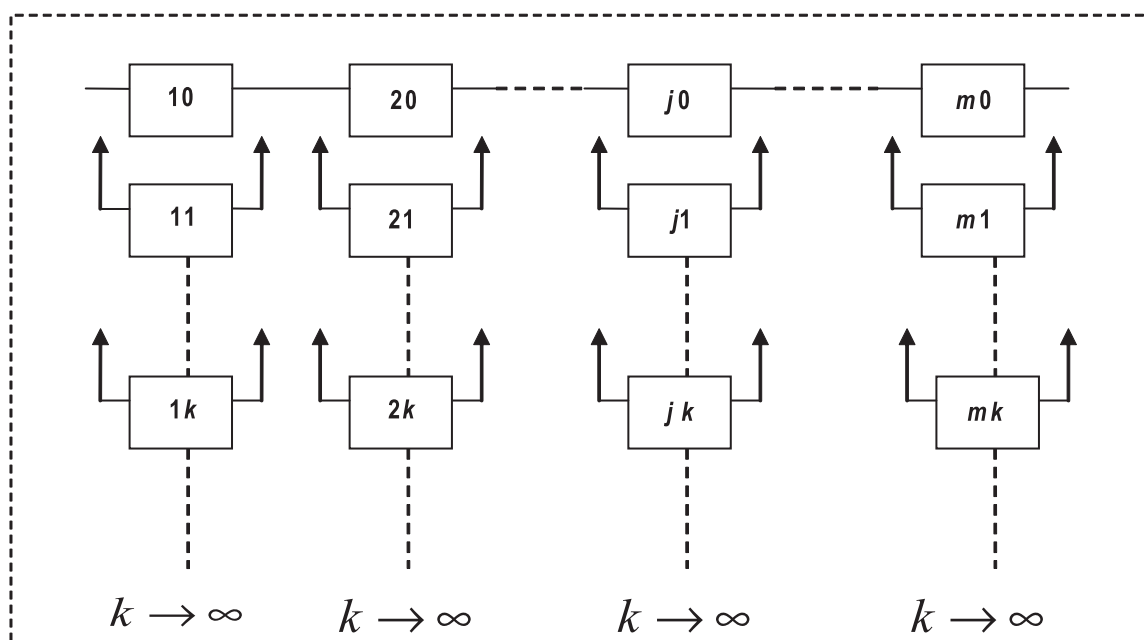


Рис. 1. Система с резервированными компонентами

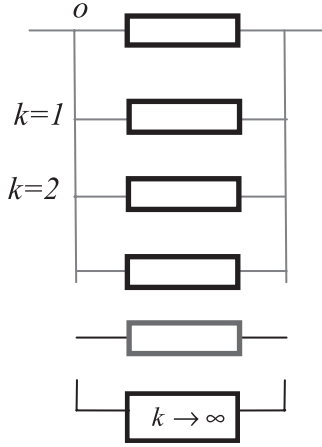


Рис. 2. Система с параллельным распределением компонентов

Объединяя это и предыдущее выражение и суммируя по k , получаем

$$\sum_{i=1}^k g(1-g)^{i-1} (1 - (1-f(x))^i) \quad (2)$$

Если значение k стремится к бесконечности, то выражение (2) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{\infty} g(1-g)^{i-1} [F(x)]^i = \frac{gF(x)}{1 - (1-g)F(x)} = G(x), \quad (3)$$

где $G(x)$ обозначает функцию распределения срока службы избыточной системы.

Кроме того, можно заметить, что

$$G(x) = \frac{gF(x)}{1 - (1-g)F(x)} \leq F(x), \quad (4)$$

что легко выводится из

$$\gamma F(x) \leq F(x) - (1-\gamma)F(x)^2 \text{ и } (1-\gamma)F(x) \geq (1-\gamma)F(x)^2.$$

Последнее очевидно, поскольку $F(x) \geq F(x)^2$.

Учитывая (4), можно увидеть, что распределение $G(x)$ меньше, чем распределение единичного компонента, но даже в лимитирующем случае оно не исчезает. Это возможно только в случае безотказное переключения, т.е. при $\gamma = 0$. Для всех положительных значений γ , которое означает небезотказное переключение, значение $G(x)$ образует нижнюю границу для всех систем с большим, но ограниченным числом резервных элементов.

Теперь можно рассчитать средний срок службы

$$m_G = \int_0^{\infty} (1-G(x))dx = \int_0^{\infty} \frac{1-F(x)}{1-(1-g)F(x)} dx. \quad (5)$$

Для экспоненциального распределения рассчитываем

$$\begin{aligned} m_G &= \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\lambda x)}{1 - (1-\gamma)(1 - \exp(-\lambda x))} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\lambda x)}{\gamma + (1-\gamma)\exp(-\lambda x)} dx = -(1/\lambda) \ln(\gamma)/(1-\gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

При $\gamma = 1$ получаем $1/\lambda$, что является результатом экспоненциального распределения без резервирования. При этом при небезотказном переключении m_G всегда остается лимитированным и его значение определяется m_F и γ .

Теперь для функции, относящейся к классам NBUE или NWUE, можно показать, что выражение (1) обозначает верхний (нижний) предел среднего значения функции распределения G .

Функция распределения срока службы имеет обозначение NBUE (NWUE), если она удовлетворяет условию:

$$\int_x^{\infty} (1-F(t))dt \leq (\geq) m_F (1-F(x)),$$

где m_F – среднее значение $F(x)$ [2].

Если теперь $F(x)$ относится к классу NBUE (или NWUE), то получается следующее неравенство [1]

$$m_G \leq (\geq) -m_F \ln(\gamma)/(1-\gamma). \quad (7)$$

Этот результат можно доказать следующим образом.

Переписываем (6) в следующей форме:

$$m_G = \int_0^{\infty} \frac{1-F(x)}{1-(1-\gamma)F(x)} dx = - \int_0^{\infty} \frac{d \int_x^{\infty} (1-F(t))dt}{1-(1-\gamma)F(x)}. \quad (8)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$m_G = \frac{m_F}{1-(1-\gamma)} + \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} (1-F(t))dt d \frac{1}{1-(1-\gamma)F(x)}. \quad (9)$$

Используя свойство NBUE (NWUE), мы можем переписать формулу (9) таким образом:

$$m_G \leq (\geq) \frac{m_F}{(1-(1-\gamma))} - \int_0^{\infty} m_F (1-F(x)) d \frac{1}{1-(1-\gamma)F(x)} \quad (10)$$

и вновь объединить части

$$\begin{aligned} m_G &\leq (\geq) m_F \int_0^{\infty} \frac{(1-F(x))dx}{1-(1-\gamma)F(x)} = \\ &= -m_F \ln \left(m_G = \frac{m_F}{(1-(1-\gamma))} \right) + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} (1-F(t))dt d \frac{1}{1-(1-\gamma)F(x)}, \\ m_G &= \frac{m_F}{1-(1-\gamma)} + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} (1-F(t))dt d \frac{1}{1-(1-\gamma)F(x)} \gamma / (1-\gamma). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя выражение (3), мы можем вывести неравенство для определения остаточного ресурса $\int_x^{\infty} (1-G(t))dt$.

На основе выражения (3) находим

$$m_G = \int_x^{\infty} \frac{1-F(t)}{1-(1-\gamma)F(t)} dt = \\ = - \int_x^{\infty} \frac{1}{1-(1-\gamma)F(t)} d \int_t^{\infty} (1-F(s)) ds.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$m_G = \frac{1}{1-(1-\gamma)F(x)} \int_x^{\infty} (1-F(t)) dt + \\ + \int_x^{\infty} \int_t^{\infty} (1-F(s)) ds d \left(\frac{1}{1-(1-\gamma)F(t)} \right).$$

В случае распределения NBUE (NWUE) это приводит к следующему выражению

$$m_G \leq (\geq) - \frac{m_F(1-F(x))}{1-(1-\gamma)F(x)} - \\ - \int_x^{\infty} m_F(1-F(t)) d \left(\frac{1}{1-(1-\gamma)F(t)} \right).$$

Снова интегрируя по частям, находим

$$-m_F \int_x^{\infty} \frac{d(1-F(t))}{1-(1-\gamma)F(t)} = m_F \int_x^{\infty} \frac{dF(t)}{1-(1-\gamma)F(t)}.$$

В случае экспоненциального распределения действует равенство

$$m_G = (m_F/\gamma) \ln \left(\frac{\gamma}{1-(1-\gamma)F(x)} \right).$$

«Холодный» резерв

В случае «холодного» резерва мы имеем дело с другим крайним случаем. Здесь распределение срока службы параллельной системы рассчитывается по формуле

$$G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(1-\gamma)^{i-1} F^{(i)}(x), \quad (12)$$

где $F^{(i)}(x)$ обозначает свертку i -кратной функции распределения $F(x)$. Свертка определяется как

$$F^{(1)}(x) = F(x)$$

для свертки первого порядка, а все остальные более высокие порядки свертки определяются итерационно по формуле

$$F^{(k+1)}(x) = \int_0^x F^{(k)}(x-t) dF(t). \quad (13)$$

Формула (12) выведена из вероятности $(1-\gamma)^{k-1}\gamma$ отказа системы при последовательном использовании переключения на i -ый резервный компонент и распределения срока службы $F^{(i)}(x)$ компонентов i .

Для типа распределений, приведенного в (12), не существует общего аналитического решения. Тем не менее, можно легко получить следующие результаты:

В случае экспоненциального распределения, имеющего плотность $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, получаем [2]

$$G(x) = 1 - \exp(-\lambda \gamma x). \quad (14)$$

Если $\gamma = 1$ (всегда отказ переключения), то имеет место обычное экспоненциальное распределение единичного компонента.

Результат (9) можно легко вывести, используя

$$f^{(k)}(x) = \lambda^{k-1} \exp(-\lambda x) / (k-1)! \quad (15)$$

и рассчитывая плотность $g(x)$.

Учитывая результаты [3], можно также получить другие аналитические результаты для гамма-распределений, которые имеют следующий вид:

$$F(x) = \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) / \Gamma(\alpha) \quad (16)$$

Табл. 1. Функции плотности $g(x)$ для специальных типов гамма-распределений для $f(x)$

Параметры	Плотность распределения $g(x)$ параллельной системы
$\alpha = 1/2$	$\gamma \sqrt{\frac{1}{\pi x}} \exp(-\lambda x) + \lambda \gamma (1-\gamma) \exp(-\lambda(1-\gamma)^2/2) \operatorname{erfc}(-\lambda(1-\gamma)\sqrt{x})$
$\alpha = 1$	$\lambda \gamma \exp(-\lambda \gamma x)$
$\alpha = 2$	$\frac{\gamma \lambda}{2\sqrt{1-\gamma}} \left(\exp(-(1-\sqrt{1-\gamma})\lambda x) - \exp(-(1+\sqrt{1-\gamma})\lambda x) \right)$
$\alpha = 3$	$\frac{\lambda \gamma}{(1-\gamma)^{2/3}} \left(\frac{1}{3} \exp(\lambda x(1-\gamma)^{1/3}) - \frac{2}{3} \exp(-\lambda x(1-\gamma)^{1/3}) \cos\left(\frac{3}{2} \lambda x(1-\gamma)^{1/3} - \pi/3\right) \right)$
$\alpha = 4$	$\frac{\lambda \gamma}{2(1-\gamma)^{3/4}} \exp(-\lambda x) \left(\sinh(\lambda(1-\gamma)^{1/4} x) - \sin(\lambda(1-\gamma)^{1/4} x) \right)$

Результаты представлены в следующей таблице 1.
В работе [3] продемонстрировано, что

$$m_G = m_F / \gamma \quad (17)$$

Следовательно, нет необходимости в какой-либо аппроксимации m_G .

Можно отметить, что среднее значение лимитировано, даже если количество резервированных устройств становится бесконечным.

Функцию распределения $G(x)$ нельзя получить аналитически в общем случае. Таким образом, целесообразно использовать ее предельную оценку.

В работе [3] в теореме 3.2 показано, что если F принадлежит к классу NBUE (NWUE), то же самое относится и к G . Аналогичный результат был доказан для класса HNBUE (harmonic new better than used in expectation – «гармоническое новое лучше, чем использовалось в ожидании») и HNWUE (harmonic worse than used in expectation – «гармоническое новое хуже, чем использовалось в ожидании») в теореме 3.4. Последний результат можно использовать для того, чтобы задать предельные значения G .

Если F относится к классу HNBUE (HNWUE), то для распределения G мы имеем следующее неравенство для определения функции остаточного ресурса (см. [4])

$$\begin{aligned} \int_x^\infty (1 - G(t)) dt &\leq (\geq) m_G \exp(-x/m_G) = \\ &= (m_F / \gamma) \exp(-\gamma x / m_F). \end{aligned} \quad (18)$$

По этому выражению также видно, что бесконечное количество резервированных устройств не способно повлиять на функции остаточного ресурса больше, чем до определенного предела. Для распределений HNBUE мы получили верхний предел значения для стремящихся к бесконечному увеличению резервированных компонентов.

Пример

В данном разделе мы покажем, как средняя продолжительность срока службы зависит от количества компонентов, используемых для резервирования, и как

Табл. 2. Предельные значения для параллельных систем с независимым числом компонентов

Характеристики	Предельное значение для режима «горячего» резерва	Предельное значение для режима «холодного» резерва
$G(x)$	$\frac{\gamma F(x)}{1 - (1 - \gamma)F(x)}$	$G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma (1 - \gamma)^{i-1} F^{(i)}(x)$
m_G	$\leq (\geq) -m_F \ln(\gamma) / (1 - \gamma)$ При F , относящихся к классу NBUE (NWUE), равенство справедливо для экспоненциального распределения	$m_G = m_F / \gamma$
Остаточный срок службы $\int_x^\infty (1 - G(t)) dt$	$\leq (\geq) (m_F / \gamma) \ln \frac{\gamma}{1 - (1 - \gamma)F(x)}$ При F , относящихся к классу NBUE (NWUE), равенство справедливо для экспоненциального распределения	$\leq (\geq) (m_F / \gamma) \exp(-\gamma x / m_F)$ При F , относящихся к классу NBUE (NWUE), равенство справедливо для экспоненциального распределения

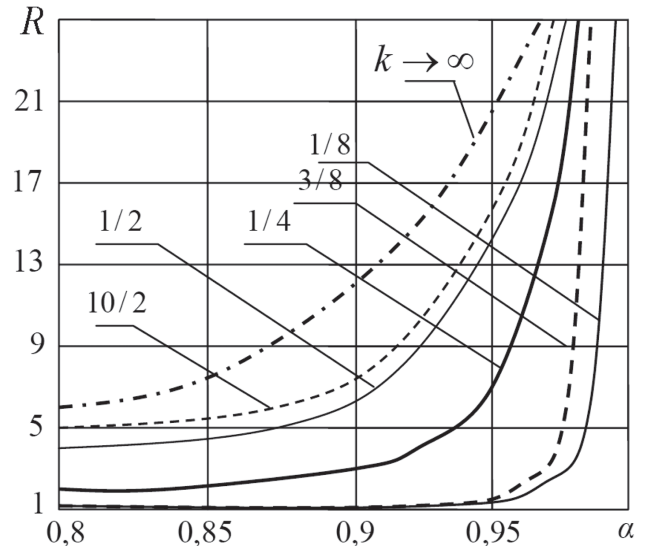


Рис. 3. Отношение средних значений $R = 1/(\gamma k)$ в зависимости от α

она зависит от вероятности отказа γ при переключении на режим «холодного» резерва.

Из формулы (5) мы получаем

$$G(x) = 1 - \exp(-\lambda \gamma x).$$

Для такой системы, как на рис. 1, состоящей из компонентов m , связанных сериями, в которых каждый компонент имеет k дублирований, получаем

$$G(x) = 1 - \exp(-\lambda \gamma k x).$$

Это распределение имеет среднее значение $1/(\lambda \gamma k)$. Теперь относительное среднее значение системы с резервированием, распределенным по системе, состоящей из одного элемента с интенсивностью отказов λ : $R = 1/(\gamma k)$. Обозначим посредством $\alpha = 1 - \gamma$ вероятность успешного выявления отказа и переключения на резервный компонент.

При $k = 1$ среднее значение срока службы представлено простой линией (рис. 3). Можно наблюдать, что с

Табл. 3. Верхние предельные значения для небезотказных параллельных систем

Характеристики	Предельное значение для режима «горячего» резерва	Предельное значение для режима «холодного» резерва
$G(x)$	$\frac{\gamma F(x)}{1 - (1 - \gamma)F(x)}$	$G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma (1 - \gamma)^{i-1} F^{(i)}(x)$
m_G	$-m_F \ln(\gamma)/(1 - \gamma)$ При F , относящихся к классу NBUE	$m_G = m_F/\gamma$
Остаточный срок службы $\int_x^{\infty} (1 - G(t))dt$	$\leq (\geq) (m_F/\gamma) \ln \frac{\gamma}{1 - (1 - \gamma)F(x)}$ При F , относящихся к классу NBUE	$(m_F/\gamma) \exp(-\gamma x/m_F)$ При F , относящихся к классу HNBUE

увеличением уровня резервирования (k) растет среднее значение срока службы. Также с увеличением α , например, с повышением качества переключения, среднее значение срока службы также растет.

Заключение и выводы

Таким образом, мы получаем следующие предельные значения для различных типов систем (табл. 2).

Обратите внимание, что само по себе предельное значение является верхним пределом для систем с ограниченным количеством резервированных компонентов. Таким образом, верхние пределы для реальных систем с ограниченным количеством компонентов выражены предельными значениями NBUE / HNBUE. Это представлено в табл. 3.

Небезотказная система не может достичь лучших значений, чем приведены в таблице 3 выше для компонентов, которые удовлетворяют свойствам классов NBUE или HNBUE, указанным в приведенной выше таблице.

В данной работе мы вывели функции распределения для параллельных систем в случае небезотказного

переключения на резервные компоненты. Оказалось, что существует предел и значение уровня надежности системы нельзя повысить до 1. Это возможно только в случае безотказного (идеального) переключения.

Это позволяет сделать вывод о том, что на определенной стадии разработки системы целесообразно повысить уровень надежности алгоритма переключения вместо того, чтобы привлекать дополнительные резервные компоненты.

Литература

1. Barlow R.E., F. Proschan, Statistical Theory of Reliability, 1975, Holt, Rinehart & Winston, New York
2. Шубинский И.Б. Структурное резервирование в информационных системах. Предельные оценки. – Надежность. No. 1 (40), 2012, 118-133.
3. Schäbe H., A renewal process with information loss, Journal of Information Processing and Cybernetics, no. 7/8, vol. 22 (1986), p. 423-428.
4. Klefsjö B. The HNBUE and HNWUE Classes of Life Distributions, Naval. Res. Logist. Quart. 29(1982) 331-344.