Надежность №4, 2016 Оригинальная статья
Dependability, Issue No. 4, 2016 DOI: 10.21683/1729-2646-2016-16-4-40-42

Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ

Виктор С. Михайлов, *ФГУП «ЦНИИХМ», Москва, Россия*

Виктор С. Михайлов

Резюме. *В качестве объекта исследования был выбран план испытаний изделий вида NMT, чья наработка между отказами подчиняется экспоненциальному закону распределения, где N – число испытуемых однотипных изделий; T – наработка (одинаковая для каждого изделия); M – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается. В этом случае оценка средней наработки на отказ определяется по формуле $T_{01} = NT/\omega$, где – число наблюдаемых отказов, $\omega > 0$, которые произошли в течение времени T. Эта оценка является смещенной и, кроме того, для решения задачи, когда необходимо получить точечную оценку показателя средней наработки на отказ (T_0) изделий на основе испытаний, не давших отказов, оценкой T_{01} воспользоваться невозможно. Если за время испытаний наблюдается небольшое число отказов (порядка нескольких единиц), то эта оценка может дать значительную ошибку из-за смещения. Для решения поставленной задачи достаточно найти несмещенную эффективную оценку $T_{0эф}$ показателя T_0, если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок (класс состоятельных оценок, в который входят и все оценки, полученные методом подстановки, включая и метод максимального правдоподобия, содержит в себе оценки с любым смещением, в том числе и с фиксированным – в виде функции от параметра или константы). В общем случае правил нахождения несмещенных оценок в настоящее время не существует и их определение требует своего рода искусства. В ряде случаев найденные несмещенные эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок и не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценками, с точки зрения близости к оцениваемому показателю.* **Цель** *статьи – нахождение оценки показателя T_0, простой и более эффективной по сравнению с традиционной и уступающей незначительно оценке $T_{0эф}$, в случае ее существования, с точки зрения близости к T_0 при использовании плана NMT.* **Методы.** *Для нахождения эффективной оценки использовались интегральные характеристики, а именно суммарный относительный квадрат отклонения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки T_0 от всевозможных значений T_0 по различным потокам отказов совокупности испытуемых изделий. Был рассмотрен достаточно широкий класс оценок и на основе интегральной характеристики построен функционал, решение которого в результате позволило получить простую и эффективную оценку средней наработки на отказ для плана NMT.* **Выводы.** *Полученная оценка средней наработки на отказ для плана NMT является эффективной на достаточно широком классе оценок и является не улучшаемой на рассмотренном классе оценок. К тому же полученная оценка дает возможность получать точечную оценку средней наработки на отказ по результатам испытаний, не давших отказы.*

Ключевые слова: *средняя наработка на отказ, экспоненциальный закон распределения, эффективная оценка.*

Формат цитирования: *Михайлов В.С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ // Надежность. 2016. № 4. С. 40-42. DOI: 10.21683/1729-2646-2016-16-4-40-42*

В современном производстве высоконадежных сложных изделий стала очень часто возникать ситуация, в которой необходимо получить точечную оценку показателя надежности изделий на основе испытаний, не давших отказов. В качестве показателя, характеризующего такое свойство надежности сложного восстанавливаемого изделия, как безотказность, выбирают в соответствии с [1] среднюю наработку на отказ T_0. С организационной и экономической точек зрения наиболее подходящим для испытаний восстанавливаемых (заменяемых) изделий (далее изделий) при условии подчинения наработки между отказами экспоненциальному закону распределения является план NMT, где N – число испытуемых однотипных изделий; T – наработка (одинаковая для каждого изделия); M – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается [2]. В этом случае оценка средней наработки на отказ определяется по формуле $T_{01} = NT/\omega$, где $\omega > 0$ – количество наблюдаемых отказов, которые произошли в течение времени T. Эта оценка является смещенной [2] и, кроме того, для решения обозначенной задачи оценкой T_{01} воспользоваться невозможно. Если за время испытаний наблюдается небольшое число отказов (порядка нескольких единиц), то эта оценка может дать значительную ошибку из-за смещения.

Непосредственно с изложенным связана задача определения величины относительной доверительной ошибки δ оценки показателя T_0, так как для ее решения необходимы результаты точечного и доверительного оценивания [3, 4]. Решение этой задачи невозможно при использовании T_{01} в случае, если испытания не дали отказов. При наблюдении небольшого числа отказов решение дает значительное смещение ошибки δ. Поэтому очень важно устранить указанные недостатки традиционной оценки.

Для решения упомянутых выше задач достаточно найти несмещенную эффективную оценку $T_{0эф}$ показателя T_0, если такая существует в классе состоятельных смещенных оценок (класс состоятельных оценок, в который входят и все оценки, полученные методом подстановки, включая и метод максимального правдоподобия, содержит в себе оценки с любым смещением, в том числе и с фиксированным – в виде функции от параметра или константы [5]). В общем случае правила нахождения несмещенных оценок в настоящее время не существует и их определение требует своего рода искусства. В ряде случаев найденные несмещенные эффективные оценки имеют весьма громоздкий вид со сложным алгоритмом вычисления [6–8]. Они также не всегда являются достаточно эффективными в классе всех смещенных оценок и не всегда имеют значительное преимущество перед простыми, но смещенными оценками, с точки зрения близости к оцениваемому показателю [9].

Цель статьи – нахождение оценки показателя T_0, простой и более эффективной по сравнению с традиционной и уступающей незначительно оценке $T_{0эф}$, в случае ее существования, с точки зрения близости к T_0 при использовании плана *NMT*.

Для нахождения эффективной оценки будем использовать интегральные характеристики [10, 11]. Воспользуемся суммарным относительным квадратом отклонения ожидаемой реализации оценки $T_{0\omega}$ от всевозможных значений T_0 по различным потокам отказов совокупности испытуемых изделий [11]:

$$AT_{0\omega} = \int_0^\infty 1/T_0^2 \left\{\Theta T_{0\omega} - T_0\right\}^2 \partial\Delta, \qquad (1)$$

где через Δ обозначен пуассоновский поток отказов с параметром NT/T_0 [12], а $\Theta T_{0\omega}$ – математическое ожидание предложенной оценки. Воспользовавшись свойствами пуассоновского потока с параметром NT/T_0 [12], найдём

$$\Theta T_{0\omega} = \sum_{\kappa=0}^\infty T_{0\omega\kappa} E^{-\Delta}\, \Delta^\kappa/\kappa!. \qquad (2)$$

Представим оценку T_{01} в виде

$$T_{01} = \frac{NT}{\omega+1} + \frac{NT}{\omega(\omega+1)}. \qquad (3)$$

Учитывая, что ω является достаточной статистикой [13], рассмотрим класс оценок $T_{0\omega}$, представимых в виде (3), т.е.

$$T_{0\omega} = \frac{NT}{\omega+1} + NTf(\omega). \qquad (4)$$

К этому классу оценок относится и эффективная оценка из [11].

Математическое ожидание оценок класса (4) в соответствии с (2) будет выражено формулой

$$\Theta T_{0\omega} = T_0\left(1 - E^{-\Delta}\right) + T_0 E^{-\Delta}\sum_{\kappa=0}^\infty \Delta f(\kappa)\Delta^\kappa/\kappa!. \qquad (5)$$

Обозначим через $B = \sum_{\kappa=0}^\infty \Delta f(\kappa)\Delta^\kappa/\kappa!$. После подстановки (5) в (1) получаем

$$AT_{0\omega} = \int_0^\infty E^{-2\Delta}(B-1)^2\,\partial\Delta = B_2 - 2B_1 + 1/2, \qquad (6)$$

где: $B_2 = \sum_{\iota=0}^\infty\sum_{\kappa=0}^\infty f(\iota) f(\kappa) 0,5^{\iota+\kappa+3}(\iota+\kappa+2)!/(\iota!\kappa!)$,

$$B_1 = \sum_{\kappa=0}^\infty f(\kappa)0,5^{\kappa+2}(\kappa+1).$$

Определим нижнюю границу функционала (6) для чего представим

$$B_2 = \sum_{\iota=0}^\infty f(\iota)0,5^{\iota+1}\sum_{\kappa=0}^\infty f(\kappa)0,5^{\kappa+2}(\kappa+1)(\kappa+2)\ldots(\kappa+\iota+2)/\iota!$$

и заметим, что

$$(\kappa+2)\ldots(\kappa+\iota+2)/\iota! = (\kappa/2+1)\cdot(\kappa/3+1)\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot(\kappa/(\iota+2)+1)\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(\iota+1)\cdot(\iota+2)/\iota! =$$
$$(\kappa/2+1)\cdot(\kappa/3+1)\cdot\ldots\cdot(\kappa/(\iota+2)+1)\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot(\iota+1)\cdot(\iota+2) \geq 2(\iota+1).$$

Поэтому

$$B_2 \geq 2\cdot 0,5\sum_{\iota=0}^\infty f(\iota)0,5^{\iota+1}(\iota+1)2\cdot B_1 = 4B_1^2.$$

Подставляя правую часть неравенства в (6), получаем $AT_{0\omega} \geq 4\cdot B_1^2 - 2B_1 + 1/2$. Беря производную от правой части по B_1 и приравнивая её нулю, находим нижнюю границу $AT_{0\omega} \geq 0,25$.

Определим составную оценку, принадлежащую рассматриваемому классу, а именно: $T_{02} = 2NT$ при $\omega = 0$ и $T_{02} = NT/(\omega+1)$ при $\omega > 0$. Из общего вида $T_{0\omega}$ следует, что $f(\omega) = 1$ при $\omega = 0$ и $f(\omega) = 0$ при $\omega > 0$. Легко заметить, что в этом случае $B_2 = 0,25$ и $B_1 = 0,25$. Подставляя полученные значения в (6), получаем $AT_{02} = 0,25$, т.е. оценка T_{02} доставляет функционалу $AT_{0\omega}$ минимум, равный 0,25. Учитывая полученную выше оценку нижней границы функционала $AT_{0\omega}$, можно считать, что оценка T_{02} – не улучшаемая на рассматриваемом классе оценок.

Таким образом, T_{02} – искомая оценка. Применим ее для решения указанных выше задач.

Пример. За время испытаний на безотказность 50 модулей в течение 1000 ч отказов не обнаружено. По результатам испытаний требуется определить точечную оценку параметра T_0.

Решение. Для $\omega = 0$ находим $T_{02} = 2NT = 2·50·1000 = 100000$ ч.

Библиографический список

1. ГОСТ 27.003–90. Надежность в технике. Выбор и нормирование показателей надежности. Основные положения.

2. Е.Ю. Барзилович, Ю.К.Беляев, В.А. Каштанов и др. Вопросы математической теории надежности.; под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983. – 376 с.

3. Заренин Ю.Г., Стоянова И.И. Определительные испытания на надежность. – М.: Изд-во стандартов, 1978. – 168 с.

4. Левин Б.Р. Теория надежности радиотехнических систем (математические основы). Учебное пособие для вузов. М., «Сов. радио», 1978. – 264 с.

5. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Наука, 1984. – 472 с.

6. Кроль И.А. Несмещенные оценки для количественных характеристик надежности при различных планах испытаний // Вопросы надежности комплексных систем электромеханики, статических преобразователей и электрических машин: Труды ВНИИЭМ. – М., 1970. – 231 с.

7. Беляев Ю.К., Замятин А.А. О несмещенном оценивании параметра экспоненциального распределения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1982. – № 3. – С. 92-95.

8. Воинов В.Г., Никулин М.С. Несмещенные оценки и их применение. – М.: Наука, 1989.

9. Лумельский Я.П., Шеховцова М.Г. К вопросу сравнения оценок вероятности безотказной работы при пуассоновском потоке отказов // Надежность и контроль качества. – 1986. – № 9. – С. 17–22.

10. Шеховцова М.Г. Интегральные характеристики планов контроля надежности при пуассоновском потоке отказов / Пермский гос. университет. – Пермь, 1983. – 13 с. – Библиогр.: 5 назв. – Деп. в ВИНИТИ 15.11.85, № 7955-В.

11. Михайлов В.С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ // Надежность и контроль качества. – 1988. – № 9. – С. 6-11.

12. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

13. Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г. Системы массового обслуживания. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 239 с.

Сведения об авторах

Виктор С. Михайлов, ведущий инженер ФГУП «ЦНИИХМ», Москва, Россия.

Москва, ул. Федора Полетаева, д.38, кв. 61, тел.: +7-903-214-41-81

Поступила 11.01.2016