

Павлов И.В.

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ УСКОРЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Рассматриваются две связанные между собой задачи: 1. На основе известных характеристик надежности в условиях постоянных нагрузок найти эти характеристики для случая произвольных кусочно-непрерывных функций нагрузки. 2. Обратная задача, состоящая в том, чтобы на основе ускоренных испытаний в условиях переменной (монотонно возрастающей) нагрузки оценить характеристики надежности изделия в условиях постоянных нагрузок.

Ключевые слова: надежность, переменный режим, переменная функция нагрузки, интенсивность отказов, функция ресурса, ускоренные испытания.

Оценка надежности в условиях переменной нагрузки

Оценка характеристик надежности технических систем, работающих в переменном режиме под воздействием одного или нескольких переменных факторов (нагрузка, температура и др.) является одной из актуальных проблем теории надежности. Кроме того, актуальной с прикладной точки зрения является также и обратная задача, состоящая в том, чтобы на основе ускоренных испытаний в условиях переменной (например, монотонно возрастающей) нагрузки оценить характеристики надежности изделия в условиях постоянных нагрузок, в том числе для малых и средних нагрузок, соответствующих «нормальным режимам» (что, собственно, и является одной из основных задач ускоренных испытаний).

Пусть $u(t)$ – нагрузка, действующая на систему в момент времени $t \geq 0$ (заметим, что под нагрузкой $u(t)$, вообще говоря, может пониматься любой переменный фактор, действующий на систему в момент времени t и влияющий на ее надежность), $F(t, u)$ – функция распределения времени безотказной работы, $f(t, u)$ – соответствующая плотность распределения, $P(t, u) = 1 - F(t, u)$ – функция надежности и $\lambda(t, u) = f(t, u) / P(t, u)$ – функция интенсивности отказов системы в условиях постоянной нагрузки $u(t) \equiv u$. Обозначим также через

$$\Lambda(t, u) = \int_0^t \lambda(z, u) dz$$

функцию ресурса [1] (ведущую функцию или функцию риска в терминологии [2], [3]) в условиях постоянной нагрузки $u(t) \equiv u$.

Задача, рассматриваемая далее, состоит в том, чтобы на основе указанных характеристик надежности в условиях постоянных нагрузок $u(t) \equiv u > 0$ найти эти характеристики для случая произвольной переменной функции нагрузки $u(t)$ из достаточно широкого для возможных применений класса функций.

Далее будем предполагать, что $u(t)$ – кусочно-непрерывная функция, непрерывная справа по $t \geq 0$ и имеющая предел слева в каждой точке $t > 0$, $u(t) > 0$ при $t > 0$, функция $\lambda(t, u)$ непрерывна по $t \geq 0$, $u \geq 0$ и $\lambda(t, u) > 0$ при $t > 0$, $u > 0$. Обозначим через $g(R, u)$ – функцию, обратную к функции $\Lambda(t, u)$ по первому аргументу t при фиксированном значении u .

Рассмотрим процесс $[u(t), r(t), R(t)]$, где $u(t)$ – заданная функция нагрузки, $r(t)$ – функция интенсивности отказов и

$$R(t) = \int_0^t r(y) dy \quad (1)$$

– функция ресурса при данной функции нагрузки $u(t)$, $t \geq 0$. Величина $R(t)$ в соответствии с равенством (1) может интерпретироваться как накопленная к моменту t функция интенсивности отказов. Другая связанная с этим естественная интерпретация, по-видимому впервые предложенная в [4], состоит в том, что величина $R(t)$ характеризует истраченный ресурс изделия к моменту времени t (если до момента t отказа еще не было).

В данный текущий момент времени $t \geq 0$ объект находится под воздействием нагрузки $u(t)$. Учитывая, что накопленная к этому моменту функция ресурса равна $R(t)$, процесс дальнейшего накопления $R(t)$ в момент времени t , в соответствии с указанной ее физической интерпретацией, должен начинаться с момента $\sigma_t = g[R(t), u(t)]$, для которого накопленная на интервале $(0, t)$ в режиме с постоянной нагрузкой, равной значению $u(t)$, функция ресурса совпадает со значением $R(t)$. Тем самым, значение функции интенсивности отказов $r(t)$ в данный текущий момент времени t в условиях переменной нагрузки должно равняться величине

$$r(t) = \lambda[g(R_t, u_t), u_t] \quad (2)$$

(здесь и далее используем сокращенные обозначения $R_t = R(t)$, $u_t = u(t)$). Из (2), учитывая, что $r(t) = R'(t)$, далее следует дифференциальное уравнение для определения функции ресурса $R_t = R(t)$ в условиях переменной функции нагрузки $u_t = u(t)$

$$R'_t = \lambda[g(R_t, u_t), u_t] \quad (3)$$

с начальным условием $R(0) = 0$. После чего соответствующая функция надежности в условиях переменной нагрузки $u_t = u(t)$ определяется как $P(t) = \exp[-R(t)]$.

Заметим, что используемая здесь и далее универсальная интерпретация $R(t)$ как функции накопления истраченного ресурса, конечно, не является очевидной во всех случаях, тем более по отношению к объектам различной физической природы. Тем не менее, получаемые исходя из этой интерпретации статистические выводы имеют довольно естественный качественный характер и могут служить, по крайней мере, хорошей первичной моделью для решения указанных выше задач.

Рассмотрим далее некоторые частные случаи и следствия из уравнений (2), (3). В наиболее простом частном случае, когда функция нагрузки $u(t)$ является кусочно-постоянной, эти уравнения дают решение, совпадающее с известным ранее решением [4], [5] для кусочно-постоянных режимов.

Пример 1. (Экспоненциальная модель). Рассмотрим частный случай, когда функция интенсивности отказов $\lambda(t, u)$ в каждом постоянном режиме (т.е. при постоянной нагрузке $u(t) \equiv u$) зависит от значения нагрузки, но не зависит от времени t , то есть

$$\lambda(t, u) = \lambda(u) \quad (4)$$

при любом $u \geq 0, t \geq 0$. Другими словами, в каждом постоянном режиме с постоянной нагрузкой $u(t) \equiv u$ время безотказной работы имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \lambda(u)$. В этом случае из уравнений (2), (3) следует

$$r(t) = \lambda(u_t) \quad (5)$$

то есть в этом случае функция интенсивности отказов в условиях переменной нагрузки вычисляется путем простой подстановки функции нагрузки $u_t = u(t)$ в функцию интенсивности отказов для случая постоянных нагрузок (4) вместо u .

В общем случае аналогичную по смыслу величину $\tilde{r}(t) = \lambda(t, u_t)$, которая вычисляется путем подстановки u_t в функцию $\lambda(t, u)$ вместо второго аргумента u , назовем упрощенной оценкой для функции интенсивности отказов $r(t)$ в условиях переменной нагрузки $u_t = u(t)$. В экспоненциальной модели такая упрощенная оценка дает точное решение (5). В общем случае такая оценка является неточной, поскольку при этом не учитывается ресурс, уже истраченный к моменту времени t . Тем не менее, при некоторых естественных условиях монотонности, а именно если функция нагрузки $u(t)$ монотонно возрастает по t , а функция интенсивности отказов $\lambda(t, u)$ монотонно возрастает по t и по u , то упрощенная оценка $\tilde{r}(t) = \lambda(t, u_t)$ дает верхнюю оценку для функции интенсивности отказов $r(t)$ в условиях переменной нагрузки $u(t)$, что является аналогом известных ранее (для постоянных режимов) результатов [2], [6] – [12] для распределений с возрастающей функцией интенсивности отказов.

Пример 2. (Вейбулловская модель). Пусть $\lambda(t, u) = cut$, $\Lambda(t, u) = cut^2 / 2$, где $c > 0$ – константа, то есть в условиях постоянных нагрузок время безотказной работы системы имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметром формы $\alpha = 2$ и функцией интенсивности отказов, пропорциональной действующей на систему нагрузке. Пусть $u(t) = vt$, то есть функция нагрузки монотонно возрастает с постоянной скоростью $v > 0$. В этом случае $g(R_t, u_t) = \sqrt{2R_t / (cu_t)}$ и уравнение (3) имеет вид

$$R_t' = \sqrt{2cu_t R_t} = \sqrt{2cvt R_t}$$

Откуда следует

$$R(t) = (2/9) cvt^3, \quad r(t) = (2/3) cvt^2$$

То есть в условиях переменной монотонно возрастающей с постоянной скоростью нагрузки $u(t) = vt$ время безотказной работы имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметром формы

$\alpha = 3$. Упрощенная оценка функции интенсивности отказов в условиях переменной нагрузки в этом случае имеет вид $\tilde{r}(t) = \lambda(t, u_t) = c u_t t = c v t^2$.

Приведенные выше уравнения (2), (3), таким образом, позволяют найти распределение времени безотказной работы и характеристики надежности изделия в условиях произвольной кусочно-непрерывной переменной функции нагрузки $u(t)$, если известны характеристики в условиях постоянных нагрузок. Рассмотрим далее обратную задачу – оценить, используя эти уравнения, характеристики надежности в условиях постоянных нагрузок на основе ускоренных испытаний в условиях переменной (монотонно возрастающей) нагрузки.

2. Модель 1 с коэффициентом ускорения

Пусть в условиях постоянных нагрузок, то есть при $u(t) \equiv u$, функция ресурса $\Lambda(t, u)$ и функция интенсивности отказов $\lambda(t, u)$ имеют вид

$$\Lambda(t, u) = k(u) \Lambda(t), \quad \lambda(t, u) = k(u) \lambda(t)$$

где $\Lambda(t) = \Lambda(t, u_0)$ – функция ресурса и $\lambda(t) = \lambda(t, u_0)$ – функция интенсивности отказов в условиях некоторой (постоянной) базовой нагрузки u_0 . В данной модели форма распределения времени безотказной работы при различных значениях постоянной нагрузки $u(t) \equiv u$ имеет одинаковый вид и задается функцией $\Lambda(t)$, а влияние нагрузки учитывается через «коэффициент ускорения» $k(u)$. Основной задачей в этом случае является определение зависимости коэффициента ускорения $k(u)$ от величины нагрузки $u \geq 0$ по результатам ускоренных испытаний.

Функция $g(R, u)$ в этом случае определяется выражением $g(R, u) = \Lambda^{-1}[R/k(u)]$, где $\Lambda^{-1}(z)$ функция, обратная к функции $\Lambda(t)$. Уравнение (4) для данной модели принимает вид

$$R'_t = k(u_t) \lambda \left[\Lambda^{-1} \left(\frac{R_t}{k(u_t)} \right) \right] \quad (6)$$

где $u_t = u(t)$ функция нагрузки. Рассмотрим случай, когда

$$\Lambda(t) = \beta t^\alpha, \quad \lambda(t) = \alpha \beta t^{\alpha-1},$$

то есть время безотказной работы в условиях постоянных нагрузок имеет распределение Вейбулла-Гнеденко, предполагая далее, что параметр формы $\alpha \geq 1$, то есть функция интенсивности отказов $\lambda(t)$ монотонно возрастающая, что является естественным физическим допущением для большинства технических систем. Уравнение (6) в этом случае записывается в следующем виде

$$R'_t = \alpha \beta^{1/\alpha} k^{1/\alpha}(u_t) R_t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad (7)$$

откуда

$$R(t) = \beta \left[\int_0^t k^{1/\alpha}(u_z) dz \right]^\alpha \quad (8)$$

После чего функция надежности в условиях переменной нагрузки $u_t = u(t)$ определяется как $P(t) = \exp[-R(t)]$.

Эти формулы позволяют найти распределение времени безотказной работы изделия в условиях переменной нагрузки, если известна зависимость коэффициента ускорения $k(u)$ от нагрузки. Рассмотрим обратную задачу, когда функция $k(u)$ неизвестна и требуется оценить ее по результатам ускоренных испытаний с переменной монотонно возрастающей нагрузкой.

Форма и вид распределения времени безотказной работы в условиях переменной нагрузки, вообще говоря, могут существенно отличаться от формы и вида этого распределения в условиях постоянной нагрузки и могут существенно зависеть от скорости возрастания нагрузки, а в общем случае от вида функции нагрузки $u(t)$. Поэтому класс распределений, на основе которого производится оценка характеристик в условиях переменной нагрузки, должен быть более широким по сравнению с используемым классом распределений для случая постоянных нагрузок (в данном случае по сравнению с классом распределений Вейбулла-Гнеденко).

Очевидно, что коэффициент ускорения $k(u)$ должен монотонно возрастать при возрастании нагрузки u . В связи с этим далее будем использовать класс M всех функций коэффициента ускорения $k(u)$, удовлетворяющих этому естественному физическому ограничению. Более точно обозначим через M класс всех функций $k(u) \geq 0$, непрерывных по $u \geq 0$ с непрерывной при всех $u \geq 0$ производной $k'(u) > 0$ при $u > 0$. Введем также класс U всех непрерывных функций нагрузки $u(t) \geq 0$, $t \geq 0$ с непрерывной при всех $t \geq 0$ производной $u'(t)$ и таких, что $u(0) = 0$, $u'(t) > 0$ при $t > 0$.

При данной фиксированной функции нагрузки $u(t) \in U$ введем далее класс L всех решений $R_t = R(t)$ уравнения (7), порождаемый указанным выше классом M функций $k(u)$. Другими словами, L – класс всех функций ресурса вида (8) при различных возможных функциях коэффициента ускорения $k(u)$ из класса M .

Заметим, что в некоторых ситуациях заранее очевидно, что при отсутствии нагрузки должно выполняться условие $k(0) = 0$ (например, при отсутствии нагрузки изделие выключено из работы и не может отказывать в этом состоянии). Чтобы учесть такие ситуации, введем подкласс $M_0 \subset M$ всех функций $k(u)$ из класса M , удовлетворяющих дополнительному условию $k(0) = 0$.

При данной фиксированной функции нагрузки $u(t) \in U$ введем также подкласс $L_0 \subset L$ всех решений уравнения (7), порождаемый классом M_0 , другими словами, L_0 – класс всех функций ресурса вида (8) при различных возможных функциях коэффициента ускорения $k(u)$ из класса M и таких, что $k(0) = 0$.

Класс L функций ресурса $R(t)$ задает, таким образом, различные возможные распределения времени безотказной работы изделия при данной функции нагрузки $u(t) \in U$. Соответственно класс L_0 задает эти же распределения в условиях функции нагрузки $u(t) \in U$ при дополнительном условии $k(0) = 0$.

Для аппроксимации функции интенсивности отказов $r(t)$ и функции ресурса $R(t)$ для распределения наработки в условиях переменной нагрузки $u(t) \in U$ далее будем использовать параметрический класс указанных функций следующего вида

$$r(t, \theta) = \sum_{l=m}^n \theta_l t^l, \quad R(t, \theta) = \sum_{l=m}^n \frac{\theta_l}{l+1} t^{l+1}, \quad \theta \in \Theta \quad (9)$$

где $m \leq n$, $\theta = (\theta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta_n)$ – вектор параметров, принимающий значения из множества

$$\Theta = \{\theta : \theta_l \geq 0, l = m, \dots, n\}$$

Соответствующий параметрический класс функций распределения для аппроксимации распределения времени безотказной работы в условиях переменной нагрузки $u(t) \in U$ имеет вид

$$F(t, \theta) = 1 - \exp[-R(t, \theta)], \quad \theta \in \Theta \quad (10)$$

Заметим, что для любого распределения из этого класса функция интенсивности отказов $r(t, \theta)$ монотонно возрастает по t , что является естественным физическим ограничением.

Кроме того, учитывая указанное выше условие монотонности функции $k(u)$, должно выполняться условие

$$R(t, \theta) \in L \text{ при любом } \theta \in \Theta \quad (11)$$

Другими словами, для того, чтобы решение обратной задачи – функция коэффициента ускорения $k(u)$ монотонно возрастала по u , необходимо, чтобы выполнялось условие (11). Если относительно коэффициента ускорения используется дополнительное ограничение $k(0) = 0$, то соответственно должно выполняться более жесткое условие

$$R(t, \theta) \in L_0 \text{ при любом } \theta \in \Theta, \quad (12)$$

где L, L_0 – указанные выше классы функций ресурса для времени безотказной работы в условиях переменной функции нагрузки $u(t) \in U$, для которых при решении обратной задачи автоматически выполняется необходимое физическое ограничение монотонности для функции коэффициента ускорения $k(u)$.

Теорема 1. Условие (11) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий

$$\alpha - 1 = m < n \quad (13)$$

$$\alpha - 1 < m \leq n \quad (14)$$

Доказательство. Пусть функция нагрузки $u(t) \in U$ и вектор параметров $\theta \in \Theta$. Тогда при данной функции ресурса $R(t, \theta)$ в соответствии с (7) при любом $t \geq 0$ выполняется равенство

$$k(u_t) = \left(\frac{1}{\beta \alpha^\alpha} \right) \frac{r^\alpha(t, \theta)}{R^{\alpha-1}(t, \theta)} \quad (15)$$

откуда, учитывая, что функция $u_t = u(t)$ строго монотонно возрастает по $t \geq 0$, получаем

$$k(u) = \left(\frac{1}{\beta \alpha^\alpha} \right) \frac{r^\alpha(t_u, \theta)}{R^{\alpha-1}(t_u, \theta)} \quad (16)$$

где $t_u = t(u)$ – функция, обратная к функции нагрузки $u(t) \in U$. В используемых условиях обратная функция $t(u)$ существует и непрерывна при всех $u \geq 0$ и имеет непрерывную по $u > 0$ производную $t'(u) > 0$, $u > 0$. Отсюда следует, что определенная в (16) функция коэффициента

ускорения (решение обратной задачи) $k(u) \in M$, то есть удовлетворяет указанному выше основному физическому условию монотонности тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{r^\alpha(t, \theta)}{R^{\alpha-1}(t, \theta)} \right] > 0 \quad (17)$$

при всех $t > 0$. Это неравенство эквивалентно неравенству

$$\alpha r'(t, \theta) R(t, \theta) > (\alpha - 1) r^2(t, \theta)$$

или с учетом (9) неравенству

$$\alpha \sum_{i=m}^n i \theta_i t^{i-1} \sum_{j=m}^n \left(\frac{\theta_j}{j+1} \right) t^{j+1} > (\alpha - 1) \sum_{i=m}^n \theta_i t^i \sum_{j=m}^n \theta_j t^j$$

откуда получаем далее, что это неравенство эквивалентно следующему

$$\sum_{l=2m}^{2n} b_l t^l > 0, \quad t > 0$$

где

$$b_l = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in A_l} c_{ij} \theta_i \theta_j,$$

где коэффициенты

$$c_{ij} = \alpha \left(\frac{i}{j+1} + \frac{j}{i+1} \right) - 2(\alpha - 1)$$

а суммирование идет по множеству индексов

$$A_l = \{(i, j): i + j = l; m \leq i \leq n, m \leq j \leq n\}$$

Минимум функции

$$f(x, y) = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$

на множестве

$$A'_l = \{(x, y): x + y = l, x \geq 0, y \geq 0\}$$

достигается в симметричной точке $x = y = l/2$. Отсюда следует, что

$$c_{ij} \geq \left(\frac{2}{l+2} \right) (l+2-2\alpha)$$

при всех $(i, j) \in A_l$, где $2m \leq l \leq 2n$, откуда следует, что неравенство (11) выполняется при любом $t > 0$, если выполняется условие (13) или условие (14).

Таким образом, выполнение (13) или (14) является достаточным для (11). Нетрудно далее видеть, что выполнение (13) или (14) является и необходимым для (11). Действительно, если $m < \alpha - 1$, то в соответствии с (16) $k(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow 0$. Если $\alpha - 1 = m = n$, то функция $k(u)$ является тождественной константой. Тем самым, выполнение одного из условий (13) или (14) является и необходимым для (11). Теорема доказана.

Теорема 2. Условие (12) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\alpha - 1 < m \leq n$$

Доказательство. Пусть функция нагрузки $u(t) \in U$ и вектор параметров $\theta \in \Theta$. Тогда в соответствии с (15), (16) выполняется равенство

$$k(0) = \begin{cases} \frac{\theta_m}{\beta\alpha}, & \text{если } m = \alpha - 1 \\ 0, & \text{если } m > \alpha - 1 \end{cases}$$

после чего, учитывая, что $L_0 \in L$, доказательство следует из предыдущей теоремы.

Теоремы 1, 2 устанавливают условия, при которых использование определенного выше в (9), (10) параметрического класса распределений для оценки функции ресурса $R(t)$ и функции распределения $F(t) = 1 - \exp[-R(t)]$ в условиях переменной нагрузки $u(t) \in U$ является корректным в том смысле, что получаемая затем исходя из этой оценки последующая оценка функции коэффициента ускорения $k(u)$ удовлетворяет необходимому физическому ограничению монотонности $k(u) \in M$ и, если это необходимо, дополнительному ограничению $k(0) = 0$.

Пусть далее $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_m, \dots, \hat{\theta}_n)$ – вектор оценок параметров распределения времени безотказной работы изделия в условиях ускоренных испытаний при переменной нагрузке $u(t) \in U$, где параметры $m \leq n$ выбираются на основе предыдущих теорем 1, 2. Тогда в соответствии с (16) оценка функции коэффициента ускорения (решение обратной задачи) находится по формуле

$$\hat{k}(u) = \left(\frac{1}{\beta\alpha} \right) \frac{r^\alpha(t_u, \hat{\theta})}{R^{\alpha-1}(t_u, \hat{\theta})} = \left(\frac{1}{\beta\alpha} \right) \sum_{l=m}^n \hat{\theta}_l t^l(u) / \sum_{l=m}^n \frac{\hat{\theta}_l}{l+1} t^{l+1}(u) \quad (18)$$

где $t_u = t(u)$ – функция, обратная к функции нагрузки $u(t)$.

Пример 3. Пусть $\alpha = 2$, $m = 1$, $n = 4$ и функция нагрузки имеет вид $u(t) = vt$, то есть нагрузка возрастает линейно с постоянной скоростью $v > 0$. В этом случае обратная функция $t(u) = u/v$ и оценка (18) зависимости коэффициента ускорения от нагрузки имеет вид, изображенный на рис. 1.

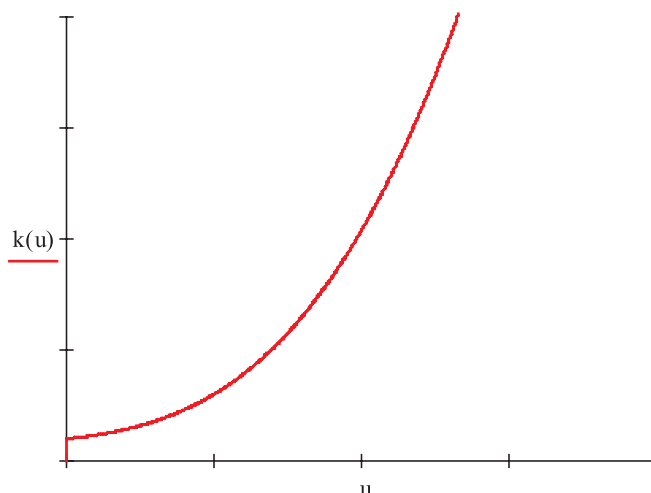


Рис. 1. Зависимость коэффициента ускорения от нагрузки

3. Модель 2 с коэффициентом ускорения

Рассмотрим случай, когда в условиях постоянных нагрузок функция ресурса $\Lambda(t, u)$ и функция интенсивности отказов $\lambda(t, u)$ имеют вид

$$\Lambda(t, u) = \Lambda(k_u t), \quad \lambda(t, u) = k_u \lambda(k_u t),$$

где $\Lambda(t) = \Lambda(t, u_0)$ – функция ресурса и $\lambda(t) = \lambda(t, u_0) = \Lambda'(t)$ – функция интенсивности отказов в условиях некоторой базовой (постоянной) нагрузки u_0 . Функция $k_u = k(u)$ в этой модели так же, как и в предыдущей модели 1, имеет смысл «коэффициента ускорения» при переходе от одной (постоянной) нагрузки u_0 к другой (постоянной) нагрузке u . При этом в данной модели фактически предполагается линейная детерминированная связь $\xi_u \equiv \xi_0 / k_u$ между случайными наработками ξ_u, ξ_0 в условиях указанных постоянных нагрузок u, u_0 . Упрощающим свойством данной модели так же, как и в предыдущей модели 1, является то, что форма распределения времени безотказной работы ξ_u при различных значениях постоянной нагрузки u имеет одинаковый вид и задается функцией $\Lambda(t)$. Влияние нагрузки при этом учитывается через коэффициент ускорения (по оси времени) $k(u)$, который в этой модели соответственно приобретает иной физический смысл. (В предыдущей модели величина $k(u)$ имеет смысл коэффициента ускорения по оси значений функции интенсивности отказов или функции ресурса.)

В данном случае функция $g(R, u)$ определяется выражением

$$g(R, u) = \Lambda^{-1}(R) / k(u),$$

где $\Lambda^{-1}(R)$ – функция, обратная к функции $\Lambda(t)$. Уравнение (3) для данной модели принимает вид

$$R'_t = k(u_t) \lambda[\Lambda^{-1}(R_t)], \quad (19)$$

где $u_t = u(t)$ – функция нагрузки. Из (19) далее следует

$$\int_0^R \frac{dz}{\lambda[\Lambda^{-1}(z)]} = \int_0^t k(u_z) dz.$$

Откуда после замены переменных $z = \Lambda(t)$ получаем

$$R(t) = \Lambda \left(\int_0^t k(u_z) dz \right).$$

После чего функция надежности в условиях переменной нагрузки определяется как $P(t) = \exp[-R(t)]$. Это же выражение для данной модели было получено Коксом и Оуксом в [3], исходя непосредственно из указанной выше линейной связи между наработками (соотношением масштаба) $\xi_u \equiv \xi_0 / k_u$. В этом частном случае полученные выше уравнения (2), (3) дают ответ, совпадающий с решением [3], полученным исходя из других соображений.

4. Общая модель с коэффициентом ускорения

Пусть

$$\Lambda(t, u) = \Lambda(t, k_u), \quad \lambda(t, u) = \lambda(t, k_u) \quad (20)$$

где $\lambda(t, k) = \Lambda'_t(t, k)$. Распределение времени безотказной работы в данной модели зависит от нагрузки через параметр $k_u = k(u)$, который аналогично предыдущим моделям имеет смысл «коэффициента ускорения» в зависимости от того или иного значения нагрузки. (Предыдущие модели 1 и 2, очевидно, являются частными случаями данной модели.) Указанная выше обратная задача в этом случае сводится к определению зависимости $k(u)$ по результатам ускоренных испытаний в условиях переменной нагрузки $u(t)$.

Уравнение (2) для данной модели может быть записано в виде

$$r(t) = \lambda[\sigma_t, k(u_t)], \quad (21)$$

где в каждый текущий момент времени $t \geq 0$ величина $\sigma_t = g(R_t, u_t)$ определяется из уравнения

$$\Lambda[\sigma_t, k(u_t)] = R(t). \quad (22)$$

Пусть $u_t = u(t)$, $t \geq 0$ – заданная функция нагрузки и $N = \{u : u = u(t), 0 \leq t \leq T\}$ – множество всех значений функции $u(t)$ на отрезке времени $0 \leq t \leq T$, где T – момент завершения испытаний в условиях переменной нагрузки $u(t)$. Пусть функция нагрузки $u(t)$ имеет непрерывную производную и строго монотонно возрастает на отрезке $0 \leq t \leq T$, $u(0) = 0$, при этом множество $N = [0, d]$, где $d = u(T)$. И пусть $R(t)$ – статистическая оценка функции ресурса по результатам испытаний в условиях нагрузки $u(t)$ и $r(t) = R'(t)$ – соответствующая оценка функции интенсивности отказов. Из уравнений (21), (22) после замены переменных $u = u(t)$ получаем далее, что решение обратной задачи – функция коэффициента ускорения $k_u = k(u)$ определяется из системы уравнений

$$\lambda(\sigma, k) = r(t_u) \quad (23)$$

$$\Lambda(\sigma, k) = R(t_u) \quad (24)$$

относительно пары (σ, k) при каждом $u \in N$. После чего функция надежности в условиях постоянных нагрузок определяется как

$$P(t, u) = \exp[-\Lambda(t, k_u)], \quad u \in N.$$

Система уравнений (23), (24) позволяет, таким образом, находить решение обратной задачи для общей модели (22) с коэффициентом ускорения.

Пример 4. Для рассмотренной выше модели 2 (с коэффициентом ускорения по оси времени) функция ресурса $\Lambda(t, k_u) = \Lambda(k_u t)$ и функция интенсивности отказов $\lambda(t, k_u) = k_u \lambda(k_u t)$. Система уравнений (23), (24) в этом случае принимает вид

$$k\lambda(k\sigma) = r(t_u), \quad \Lambda(k\sigma) = R(t_u)$$

откуда следует выражение для коэффициента ускорения

$$k(u) = \frac{r(t_u)}{\lambda\{\Lambda^{-1}[R(t_u)]\}},$$

что дает решение обратной задачи для данной модели.

Таким образом, полученные выше уравнения (2), (3), (23), (24) позволяют оценить распределение времени безотказной работы и характеристики надежности в условиях произвольных кусочно-непрерывных функций нагрузки на основе известных характеристик в условиях постоянных нагрузок. Кроме того, эти уравнения позволяют решать и обратную задачу – оценить показатели надежности в условиях постоянных нагрузок по результатам ускоренных испытаний в условиях переменной монотонно возрастающей нагрузки, что является одной из основных задач ускоренных испытаний. Заметим также, что существенный интерес с точки зрения приложений представляет дальнейшее обобщение приведенных результатов на более общие, в том числе непараметрические модели, а также построение гарантированных (доверительных) оценок для показателей надежности по результатам ускоренных испытаний.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К. Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. – М.: Радио и связь, 1969. – 488 с.
3. Кокс Д.Р., Оукс Д. Анализ данных типа времени жизни. – М.: «Финансы и статистика», 1988. – 192 с.
4. Седякин М.Н. Об одном физическом принципе надежности. // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. – 1966. – №3. – с. 80 – 87.
5. Карташов Г.Д. Оценка надежности изделий, работающих в переменном режиме. // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. – 1972. – №4. – с. 60 – 66.
6. Barlow R., Proschan F. Tolerance and confidence limits for classes of distributions based on failure rate. // Ann. Math. Statistics. – 1966. – v.37. -№6. – p. 1184 – 1195.

7. **Павлов И.В.** Доверительные границы в классе распределений с возрастающей функцией интенсивности отказов. // Известия АН СССР, Техническая кибернетика. – 1977. – №6. – с. 72 – 84.
8. **Павлов И.В.** Статистические методы оценки надежности сложных систем. – М.: Радио и связь, 1982. – 168 с.
9. Надежность технических систем. (справочник под ред. Ушакова И.А.) – М.: Радио и связь, 1986. – 781 с.
10. **Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A.** Statistical reliability engineering. N.Y.: John Wiley, 1999, 514 p.
11. **Pavlov I.V., Teskin O.I., Goryainov V.B., Ukolov S.N.** Confidence bounds for system reliability based on components test data // Proceeding of the second international conference, MMR'2000, Bordeaux, France. – Jul., 2000. – p. 852-855.
12. **Левин П.А., Павлов И.В.** Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия «Естественные науки». – 2009. – № 2. – с. 28 – 37.