Оригинальная статья

DOI: 10.21683/1729-2640-2016-16-2-16-19

О тригонометрических распределениях для описания отказов технических устройств

Владислав А. Володарский, кафедра систем обеспечения движения, Красноярский институт железнодорожного транспорта, Красноярск, Россия, e-mail: volodarsky.vladislav@yandex.ru



Владислав А. Володарский

Резюме. Цель статьи - предложить и исследовать нетрадиционные тригонометрические распределения для описания постепенных отказов технических устройств. При оцененном значении наработки на отказ предложено два следующих метода приближенного описания показателей надежности. Во-первых, поскольку параметр потока отказов при времени эксплуатации равном наработке на отказ приближается к своему стационарному значению, равному обратной величине наработки на отказ, предложено аппроксимировать зависимость параметра потока отказов от времени эксплуатации кусочно-линейной функцией. Остальные показатели надежности получены с использованием преобразования Лапласа. Например, вероятность безотказной работы может быть описана функцией косинуса, а интенсивность отказов - функцией тангенса. Во-вторых, предложено аппроксимировать зависимость плотности вероятности отказов в зависимости от времени эксплуатации функцией синуса. Остальные показатели надежности получены с использованием преобразования Лапласа. Например, вероятность безотказной работы может быть описана функцией косинуса в квадрате, а интенсивность отказов - двойной функцией тангенса. В результате выполненных исследований сделан вывод, что поскольку интенсивность отказов предложенных распределений является возрастающей от времени эксплуатации, а коэффициент вариации менее единицы, они могут быть использованы для описания постепенных отказов технических устройств. Как видно из полученных результатов показатели надежности при этих распределениях выражены элементарными функциями, что может упростить проведение расчетов показателей надежности систем при различном соединении составляющих их элементов.

Ключевые слова: вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, распределение косинуса, распределение косинуса квадрат.

Формат цитирования: Володарский В.А. О тригонометрических распределениях для описания отказов технических устройств // Надежность. 2016. №2. С. 16-19. DOI: 10.21683/1729-2640-2016-16-2-16-19

1. Исходные положения

В настоящее время расчеты показателей надежности технических устройств (ТУ) проводятся, как правило, в предположении о постоянной интенсивности отказов составляющих их элементов. Это соответствует случаю, когда элементы подвержены только внезапным отказам из-за внешних воздействий. Постепенные отказы элементов, связанные с внутренними процессами износа и старения, при этом не учитываются. Последнее не соответствует реальной действительности. Например, в [1, 2] подробно описаны деградационные процессы, которые вызывают износ и старение элементов железнодорожных систем электроснабжения, автоматики, телемеханики и связи. Подобные процессы приводят к постепенным отказам элементов и описываются в теории надежности классом распределений, имеющим возрастающую функцию интенсивности отказов, т. е. так называемых ВФИраспределений [3]. Элементы с постепенными отказами назовем элементами стареющего типа.

Путем сбора и обработки информации об отказах, восстанавливаемых в процессе эксплуатации элементов указанных систем, получены только оценки постоянных

значений параметра потока отказов ω [1] или наработки на отказ как $T=1/\omega$ [2]. Однако это не означает, что интенсивность отказов элементов стареющего типа является постоянной величиной.

Согласно определению, параметр потока отказов есть отношение числа отказавших изделий за интервал времени n(dt) к числу испытуемых изделий за этот интервал dt при условии, что отказавшие изделия заменяются исправными (новыми или отремонтированными), то есть $\omega(t) = n(dt)/Ndt$, где N— число испытуемых изделий, которое остается постоянным. Из теории надежности известно, что параметр потока отказов при любом виде распределения со временем эксплуатации стремится к стационарному значению равному $\omega = 1/T$. Это и проявляется при сборе статистических данных об отказах ТУ в реальных условиях эксплуатации.

Согласно определению, интенсивность отказов есть отношение числа отказавших изделий за интервал времени n(dt) к среднему числу изделий $N_{\rm cp}$, исправно проработавших в данный интервал времени dt, то есть $\lambda(t) = n(dt)/N_{\rm cp}dt$. При этом $N_{\rm cp}$ из-за отказов изделий с каждым интервалом уменьшается, а $\lambda(t)$ элементов стареющего типа возрастает.

Поскольку законы распределения наработки на отказ элементов стареющего типа, как правило, не известны, задачу расчета показателей надежности ТУ приходится решать в условия неопределенности.

Цель статьи - предложить и исследовать нетрадиционные тригонометрические распределения для описания постепенных отказов технических устройств.

Когда удается оценить только значение наработки на отказ, например, из выражения $T = 1/\omega$, то можно предложить два следующих метода приближенного описания показателей надежности ТУ.

2. Распределение косинуса

Во-первых, поскольку параметр потока отказов при t = T приближается к своему стационарному значению, равному 1/T, предлагается аппроксимировать зависимость $\omega(t)$ кусочно-линейной функцией вида [4]:

при
$$t < T \omega(t) = t/T^2$$
; при $t \ge T \omega(t) = 1/T$. (1)

Остальные показатели определяются с использованием преобразования Лапласа. Плотность распределения f(t) найдем из уравнения, связывающего ее в операторной форме с параметром потока отказов f(s) = ω(s)/(1+ω(s)) κακ

$$f(t) = (1/T)\sin(t/T). \tag{2}$$

Тогда вероятность безотказной работы P(t) и интенсивность отказов $\lambda(t)$ определяются из уравнений:

$$P(t) = 1 - \int_{0}^{t} f(t)dt = \cos(t/T),$$

$$\lambda(t) = f(t)/P(t) = (1/T)\operatorname{tg}(t/T).$$
(3)

$$\lambda(t) = f(t)/P(t) = (1/T)\operatorname{tg}(t/T). \tag{4}$$

Аргумент t/T в формулах для определения показателей надежности измеряется в радианах. Назовем полученное распределение распределением косинуса, область определения которого лежит в интервале $0 < t/T < \pi/2$.

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах области определения распределения согласно [5] должен равняться единице. Проверяем

$$\int_{0}^{\pi T/2} (1/T) \sin(t/T) dt = 1.$$

Коэффициент вариации распределения определяется из выражения

$$V = \mu_2^{0,5} / \mu_1, \tag{5}$$

где μ_1 – первый начальный момент; μ_2 – второй центральный момент;

$$\mu_{1} = \int_{0}^{\pi T/2} t f(t) dt = \int_{0}^{\pi T/2} (t/T) \sin(t/T) dt = T,$$

$$\mu_{2} = \int_{0}^{\pi T/2} (t - \mu_{1})^{2} f(t) dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi T/2} (t - T)^{2} (t / T) \sin(t / T) dt = (\pi - 3) T^{2}.$$

Подставив значения μ_1 и μ_2 в выражение (5), получим V = 0.376.

Поскольку интенсивность отказов этого распределения согласно (4) является монотонно возрастающей функцией времени, а значение коэффициента вариации менее единицы, оно относится к классу ВФИ-распределений и может использоваться для описания постепенных отказов ТУ. В статье [4] определены коэффициенты асимметрии и эксцесса и отмечено, что распределение косинуса может быть представлено в области Пирсона точкой с координатами $p^2 = 0.18$ и $\beta = 2.23$. Показано, что согласно [3] функция косинуса является также распределением с возрастающей средней интенсивностью отказов, распределением типа «новое лучше использованного» и распределением типа «новое в среднем лучше использованного».

С использованием уравнений (1), (2), (3) и (4) определены зависимости показателей надежности от относительного времени эксплуатации t/T предлагаемого распределения. Результаты вычислений сведены в таблицу 1.

Таблица 1

t/T	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	$\pi/2$
Tf(t)	0	0,20	0,39	0,56	0,72	0,84	0,93	0,98	1,0
$T \lambda(t)$	0	0,20	0,42	0,68	1,03	1,56	2,57	5,80	∞
$T \omega(t)$	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,0	1,0	1,0	1,0
P(t)	1	0,98	0,92	0,83	0,70	0,54	0,36	0,17	0

3. Распределение косинуса квадрат

Во-вторых, предлагается аппроксимировать зависимость плотности вероятности f(t) отказов технических устройств в зависимости от времени эксплуатации t функцией синуса вида

$$f(t) = (1/T)\sin(2t/T)$$
 (6)

с областью определения $0 < t < \pi T/2$.

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах области определения распределения согласно [5] должен равняться единице. Проверяем

$$\int_{0}^{\pi T/2} (1/T) \sin(2t/T) dt = 1.$$

Учитывая, что $\sin(2t/T) = 2\sin(t/T)\cos(t/T)$, представим выражение (6) в виде

$$f(t) = (2/T)\sin(t/T)\cos(t/T)$$
. (6a)

Вероятность безотказной работы P(t) с учетом (6) определяется из выражения

$$P(t) = 1 - \int_{0}^{t} f(t)dt = (1 + \cos(2t/T))/2.$$
 (7)

Учитывая, что $\cos(2t/T) = \cos^2(t/T) - \sin^2(t/T)$, представим выражение (7) в виде

$$P(t) = \cos^2(t/T). \tag{7a}$$

Назовем полученное распределение распределением косинуса квадрат.

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ с учетом (6a) и (7a) определяется как

$$\lambda(t) = f(t) / P(t) = (2t / T) \operatorname{tg}(t / T).$$
 (8)

Параметр потока отказов $\omega(t)$ определяется через преобразование Лапласа вида $\omega(s) = f(s)/(1-f(s))$ с учетом (6) как

$$\omega(s) = \left(\sqrt{2}/T\right)\sin\left(\sqrt{2}\cdot t/T\right). \tag{9}$$

Коэффициент вариации определяется с использованием выражения (5).

$$\mu_1 = \int_{0}^{\pi T/2} t f(t) dt = \int_{0}^{\pi T/2} (t/T) \sin(2t/T) dt = \pi T/4,$$

$$\mu_2 = \int_0^{\pi T/2} (t - \mu_1)^2 f(t) dt =$$

$$\int_0^{\pi T/2} (t - \frac{\pi T}{4})^2 \sin(2t/T) dt = \left(\frac{\pi^2}{16} - 0.5\right) T^2.$$

Подставив значения μ_1 и μ_2 в выражение (5), получим V=0.435.

С использованием уравнений (6), (7а), (8) и (9) определены зависимости показателей надежности от относительного времени эксплуатации t/T предлагаемого распределения. Результаты вычисления сведены в таблицу 2 и представлены на рисунках 1 и 2.

Таблица 2

t/T	0	0,2	0,4	0,6	$\pi/4$	1,0	1,2	1,4	$\pi/2$
Tf(t)	0	0,39	0,72	0,93	1,0	0,91	0,68	0,33	0
$T\lambda(t)$	0	0,40	0,84	1,36	2,0	3,12	5,14	11,6	∞
$T \omega(t)$	0	0,39	0,76	1,06	1,26	1,40	1,39	1,30	1,10
P(t)	1,0	0,96	0,85	0,68	0,50	0,29	0,13	0,03	0

Как видно из формулы (8) и рисунка 1 интенсивность отказов со временем эксплуатации монотонно возрастает и, учитывая, что значение коэффициента вариации менее единицы, предлагаемое распределение относится к классу ВФИ-распределений и может

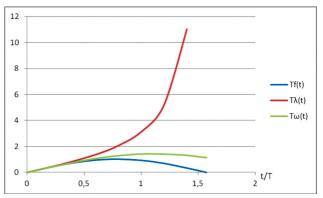


Рис. 1

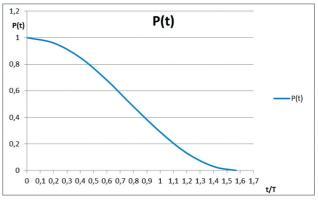


Рис. 2

использоваться для описания постепенных отказов элементов ТУ. Из рисунка 1 также видно, что параметр потока отказов стремится к значению, равному 1/T. Это подтверждает известное положение теории надежности, что при любом распределении параметр потока отказов со временем эксплуатации стремится к установившемуся значению, обратному значению наработки на отказ.

Как видно из рисунка 2, вероятность безотказной работы ТУ со временем эксплуатации снижается и при значении $t = \pi T/2$ приближается к нулевому значению. Причем кривая P(t) сначала выпукла вверх, а затем — вниз.

Для сравнения на рисунках 3-5 представлены построенные с использованием данных таблиц 1 и 2 кривые плотности распределения, интенсивности отказов и параметра потока отказов распределений косинуса (обозначены синим цветом 1) и косинуса квадрат (обозначены красным цветом 2). Как видно из формул (4), (8) и рисунка 4, интенсивность отказов при распределении косинуса квадрат возрастает с течением времени эксплуатации в два раза быстрее, чем при распределении косинуса.

Заключение

В случае, когда определена только наработка на отказ и известно, что элементы технических устройств подвержены износу и старению, для описания их постепенных отказов в условиях неопределенности целесообразно использовать предлагаемые распределения косинуса и косинуса квадрат. Как видно из полученных

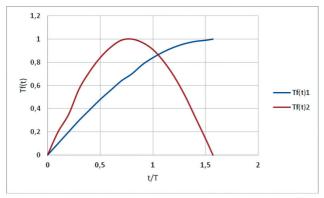


Рис. 3

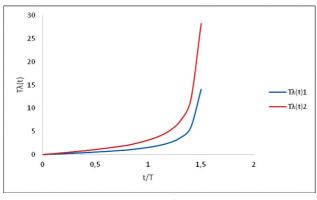


Рис. 4

результатов, показатели надежности при этих распределениях выражены элементарными функциями, что может упростить проведение расчетов показателей надежности систем при различном соединении составляющих их элементов.

Библиографический список

1. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Шаманов В.И. Надёжность систем железнодорожной автома-

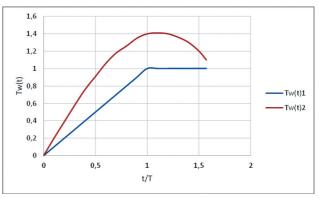


Рис. 5

тики, телемеханики и связи. – М.: Маршрут, 2003. – 263 с.

- 2. Ефимов А.В., Галкин А.Г. Надёжность и диагностика систем электроснабжения. М.: УМК МПС России, $2000.-512~\rm c.$
- 3. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М.: Наука, 1984.-328 с.
- 4. Володарский В.А. Аппроксимация распределения вероятности безотказной работы функцией косинуса // Надежность и контроль качества. 1988. № 8. С. 18-22.
- 5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2000. 479 с.

Сведения об авторе

Владислав А. Володарский – кандидат технических наук, профессор, старший научный сотрудник кафедры систем обеспечения движения Красноярского института железнодорожного транспорта, Красноярск, Россия, тел. +7 (391) 221 60 72,

e-mail: volodarsky.vladislav@yandex.ru