



Баранов Л.А., Ермолин Ю.А.

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ «ЛИНЕЙНО-СТАРЕЮЩЕГО» ОБЪЕКТА

Обсуждаются методологические трудности решения практических инженерных задач надежности для нестационарных («стареющих») объектов. Рассматривается случай, когда интенсивность отказов объекта линейно нарастает со временем эксплуатации. Аналитически находится среднее «время жизни» такого объекта. Полученное выражение упрощается до вида, удобного для использования в инженерных расчетах. Предлагается формальный способ замены реального нестационарного объекта виртуальным стационарным. При этом постоянная интенсивность отказов виртуального объекта подбирается из дополнительных соображений, в частности, из условия равенства «времен жизни» обоих объектов. Получены соотношения для расчета интенсивности отказов виртуального стационарного объекта, выраженные через параметры характеристики «старения» реального объекта. Эффективность предложенного метода иллюстрируется решением задачи о нахождении финальных вероятностей состояний «линейно-стареющего» объекта и его коэффициента готовности, полученным в аналитическом виде.

Ключевые слова: надежность; нестационарный объект; интенсивность отказов; «время жизни» объекта; стационаризация; финальные вероятности состояний; коэффициент готовности.

Теория надежности широко применяется в инженерной практике для решения многих важных задач, таких, например, как назначение или продление технического ресурса объекта (элемента, системы), разработка научно обоснованных приемов подготовки его к эксплуатации, определению периодичности проведения осмотров, профилактических и капитальных ремонтов и других мероприятий по обеспечению заданного уровня его надежности в процессе функционирования и т.п. Успешное решение подобных задач требует знания надежностных характеристик объекта, определенных в аналитическом виде.

Чаще всего в инженерных расчетах используются три основные характеристики надежности: интенсивность отказов $\lambda(t)$, функция плотности распределения времени наработки до отказа $f(t)$ и функция надежности $p(t)$ – вероятность безотказной работы за время t . В общем случае, все эти характеристики являются функциями времени и взаимосвязаны друг с другом. Отсюда следует, что знание одной из них дает возможность по известным соотношениям [1] определить любую из оставшихся.

В реальных условиях эти характеристики получают путем сбора и обработки статистических данных на действующих объектах. Обычно наиболее удобным оказывается выявление функции $\lambda(t)$, поскольку для сколь-нибудь ответственных объектов отказы и сопутствующие им обстоятельства, как правило, документально фиксируются эксплуатирующим персоналом и получаемая при этом информация доступна для последующего анализа. Таким образом, можно считать, что характеристики $\lambda(t)$, $f(t)$ и $p(t)$ известны в аналитическом виде и могут быть использованы для решения исследовательских задач и практических расчетов.

Подавляющее большинство существующих инженерных методик расчета надежности базируется на гипотезе стационарности потоков случайных событий. Это означает, что все вероятностные характеристики процессов остаются неизменными с течением времени, в частности, $\lambda(t) = \text{const} = \lambda_0$, и приводит к известным экспоненциальным соотношениям:

$$f(t) = \lambda_0 \cdot e^{-\lambda_0 t}; p(t) = e^{-\lambda_0 t}.$$

Гипотеза о стационарности надежностных процессов на длительном временном интервале функционирования объекта во многих случаях выглядит достаточно убедительной [2]. Однако фактом является и то, что некоторые реальные объекты с течением времени проявляют явную тенденцию к увеличению интенсивности отказов, т.е. являются нестационарными. Такие объекты в теории надежности принято называть стареющими [1].

Инженерные методики расчета показателей надежности стареющих объектов на сегодняшний день практически отсутствуют, несмотря на то, что алгоритм их определения, в принципе, остается таким же, как в стационарном случае. Дело, однако, в том, что попытки применения этого алгоритма для аналитического определения основных характеристик надежности нестационарного объекта, как правило, через два-три шага приводят к существенным математическим трудностям. Эти трудности могут проявляться в том, что записанные дифференциальные уравнения (например, типа уравнений Колмогорова [1]) не решаются в квадратурах, либо какие-то получающиеся по ходу математических выкладок интегралы не выражаются в элементарных функциях и определяются только численно. Как следствие, необходимые расчетные формулы найти в справочной литературе практически невозможно, либо они имеют весьма сложный вид и получены, к тому же, со значительными упрощающими допущениями.

Некоторые практические задачи надежности могут быть, в принципе, решены с использованием числовых характеристик случайной величины (времени наработки до отказа): ее так называемых моментов, одним из которых является среднее время наработки объекта до отказа (его «время жизни») T . При этом все трудности, связанные с определением T для нестационарного объекта, отмеченные выше, остаются в силе. Однако существуют случаи, когда эту задачу удастся решить до конца. Одним из них является ситуация, когда изменение интенсивности отказов объекта с течением времени имеет линейный характер («линейно-стареющий» объект). Ниже приводится решение этой задачи.

Итак, положим, что $\lambda(t)$ описывается функцией вида:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + at, \quad (1)$$

где λ_0 – начальная интенсивность отказов, a – коэффициент старения объекта ($a \geq 0$), t – текущее время. Далее считается, что λ_0 и a известны и заданы.

Найдем функцию надежности такого объекта $p(t)$, которая, как известно [3], связана с $\lambda(t)$ соотношением:

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}, \quad (2)$$

что с учетом (1) дает:

$$p(t) = e^{-\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \lambda_0 t\right)}. \quad (3)$$

Путем несложных преобразований показатель этой экспоненты приводится к виду:

$$-\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + \lambda_0 t\right) = -\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t + \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2 + \frac{\lambda_0^2}{2\alpha},$$

и тогда (3) можно переписать так:

$$p(t) = e^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t + \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2} \cdot e^{\frac{\lambda_0^2}{2\alpha}} \quad (4)$$

Определим T – среднее время наработки такого объекта до отказа. Известно [1, 3], что $T = \int_0^\infty p(t) dt$; следовательно, для рассматриваемого случая:

$$T = e^{\frac{\lambda_0^2}{2\alpha}} \cdot \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t + \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2} dt. \quad (5)$$

Для вычисления этого интеграла произведем замену переменных: $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}t + \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}} = z$. Тогда $dt = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}dz$ и, с учетом того, что при $t = 0$ $z = z_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}}$, выражение (5) приводится к виду:

$$T = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot e^{\frac{\lambda_0^2}{2\alpha}} \cdot \int_{\frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}}}^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot e^{\frac{\lambda_0^2}{2\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}}\right)\right], \quad (6)$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ – интеграл вероятности (интеграл ошибок), для вычисления которого имеются подробные таблицы [4]. Таким образом, задача нахождения среднего времени жизни «линейно-стареющего» объекта решена аналитически.

Определение T непосредственно по формуле (6) часто бывает неудобным, поскольку связано с необходимостью вычисления разности между двумя малыми близкими числами с высокой точностью. Эту трудность можно обойти следующим образом.

Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем, когда $z_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2\alpha}} > 1$. Пусть интенсивность отказов λ_0 за фиксированный период времени T_ϕ оценки надежности стареющего объекта увеличилась в β раз ($\beta > 1$). Тогда

$\lambda(t=T_\phi) = \beta\lambda_0$. При этом из (1) следует $\beta\lambda_0 = \lambda_0 + aT_\phi$ и $\alpha = \frac{(\beta-1)\lambda_0}{T_\phi}$. Условие $z_0 > 1$ после подстановки в него этого значения a преобразуется к виду:

$$\lambda_0 T_\phi > (\beta-1),$$

т. е. допущение $z_0 > 1$ означает, что за фиксированный интервал оценки надежности приращение среднего числа отказов объекта за счет старения не превышает среднего числа отказов на начальном этапе его функционирования. Физически это означает, что анализируется ситуация, когда старение объекта во времени происходит сравнительно медленно; если же объект стареет слишком быстро, то говорить о его сколь-нибудь продолжительной эксплуатации вряд ли имеет практический смысл.

Воспользуемся тем, что при $z_0 > 1$ справедливо следующее асимптотическое разложение [4]:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(z)] \approx \frac{e^{-z^2}}{2z} \left[1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z^2)^3} + \dots \right],$$

причем ошибка, получающаяся при ограничении ряда, по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак. Если в правой части этого выражения учесть только первые два слагаемых, то после некоторых преобразований формула (6) в исходных обозначениях запишется так:

$$T = \frac{1}{\lambda_0} \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\lambda_0^2}{2\alpha} \right)} \right], \text{ где } \left(\frac{\lambda_0^2}{2\alpha} > 1 \right). \quad (7)$$

Из (7) видно, что среднее время жизни «линейно-стареющего» объекта зависит не только от λ_0 , но и от безразмерного параметра $\lambda_0^2 / 2\alpha$.

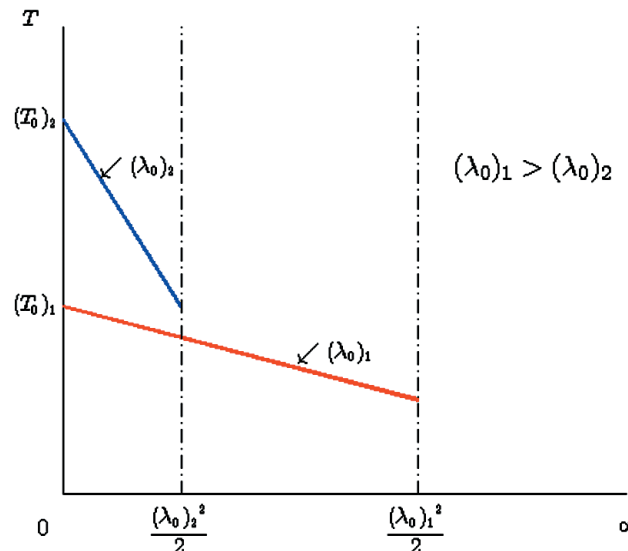


Рис. 1

С целью большей физической наглядности полученного результата приведем выражение (7) к виду:

$$T = T_0(1 - aT_0^2), \quad (8)$$

где $T_0 = (1/\lambda_0)$ — среднее время жизни стационарного («нестареющего») объекта с интенсивностью отказов λ_0 (см. (1) при $a=0$). Качественно зависимости (8) показаны на рис. 1.

Рис. 1 дает представление о том, как уменьшается среднее «время жизни» нестационарного объекта в зависимости от коэффициента старения a .

Возможное использование полученного результата рассмотрим на следующем примере.

Положим, что стареющий объект, интенсивность отказов которого выражается зависимостью (1), рассматривается как ремонтируемый с интенсивностью восстановления μ_0 (в данном примере принято постоянным). Требуется определить характер изменения во времени вероятностей работоспособного $p_0(t)$ и неработоспособного $p_1(t)$ состояний объекта и найти его коэффициент готовности.

Казалось бы, методологически задача решается легко: по известным правилам [3] надо составить дифференциальные уравнения типа уравнений Колмогорова относительно $p_0(t)$ и $p_1(t)$ (с учетом (1)) и решить их при заданных начальных условиях (например, при $p_0(0)=1$; $p_1(0)=0$). Однако оказывается, что если упомянутые уравнения записать сравнительно просто, то найти их общие решения не удастся. Таким образом, в аналитическом виде поставленная задача не решается.

Инженерный подход в подобных ситуациях состоит в поиске приближенного решения задачи путем введения некоторых упрощающих допущений. Одним из возможных приемов, реализующих такой подход, может быть стационаризация потока отказов реального нестационарного объекта, т. е. замена его некоторым эквивалентным виртуальным с постоянной интенсивностью $\lambda_c = \text{const}$, значение которой подбирается из дополнительных соображений [5, 6]. Тогда поставленная задача сводится к стационарной, и ее решение принципиальных трудностей не вызывает. При этом вопрос о том, как определять λ_c , приобретает первостепенное значение.

Предлагается λ_c находить из условия равенства «времен жизни» реального («линейно-стареющего») объекта (T) и эквивалентного ему виртуального стационарного ($T_c = \frac{1}{\lambda_c}$), т. е. из соотношения $T_c = T$. Заменяя в левой части выражения (7) T на $1/\lambda_c$ и разрешая полученное уравнение относительно λ_c , имеем:

$$\lambda_c = \lambda_0 \cdot \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - \alpha}; \left(\alpha < \frac{\lambda_0^2}{2} \right), \quad (9)$$

где диапазон применимости формулы (9) получен из условия $\frac{\lambda_0^2}{2\alpha} > 1$, принятого при проведении настоящего исследования. Выражение (9) показывает, как λ_c связано с параметрами характеристики $\lambda(t)$ реального объекта. Качественно графики этой зависимости при различных значениях λ_0 показаны на рис. 2.

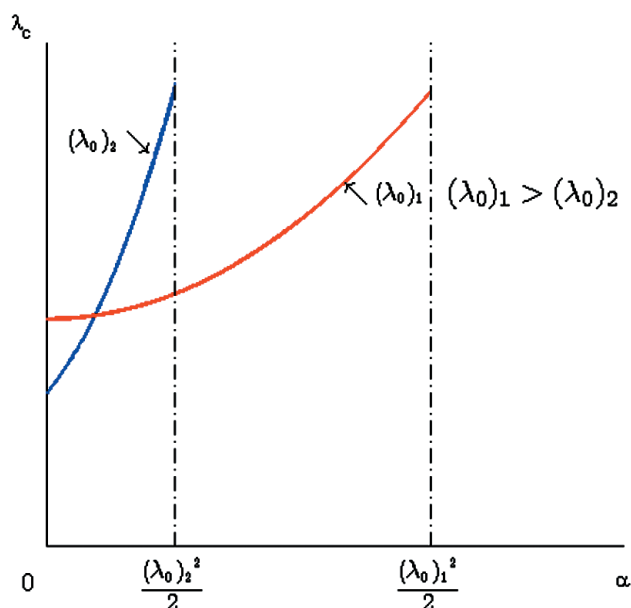


Рис. 2

После определения λ_c задача нахождения $p_0(t)$ сводится к стационарному случаю; результат ее решения известен (см., например, [7]). Подставляя в него λ_c , полученное по формуле (9), окончательно, в принятых здесь обозначениях, имеем:

$$p_0(t) = \frac{\mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)}{\lambda_0^3 + \mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)} \cdot \left\{ 1 + \frac{\lambda_0^3}{\mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)} \cdot \exp \left[-\frac{\lambda_0^3 + \mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)}{\lambda_0^2 - \alpha} \cdot t \right] \right\}, \quad (10)$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda_0^3}{\lambda_0^3 + \mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)} \cdot \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\lambda_0^3 + \mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)}{\lambda_0^2 - \alpha} \cdot t \right] \right\}. \quad (11)$$

Из (10) находится финальная вероятность работоспособного состояния $p_0(\infty)$, которая в данном случае численно совпадает с коэффициентом готовности объекта k_T :

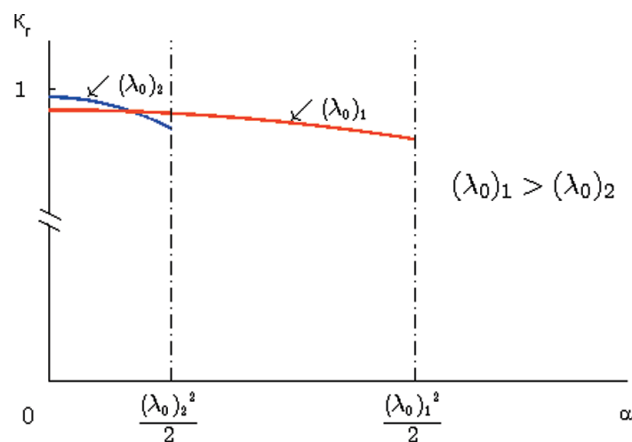


Рис. 3

$$k_T = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)}{\lambda_0^3 + \mu_0(\lambda_0^2 - \alpha)}.$$

Графики зависимостей $k_T = k_T(a)$ для различных значений λ_0 качественно изображены на рис.3.

Как и следовало ожидать из физических представлений, k_T уменьшается с увеличением коэффициента старения a .

Таким образом, эффективность предложенного метода стационаризации потока отказов «линейно-стареющего» объекта показана на примере одной из возможных практических задач, решение которой получено в аналитическом виде.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965.
2. Шубинский И.Б. Структурная надежность информационных систем. Методы анализа. – Ульяновск: Областная типография «Печатный двор», 2012.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1977.
5. Ermolin Y.A. Stationarization of the seasonally changing failure flow (with reference to reliability problems) // «Applied Mathematical Modelling», Vol. 32, Issue 10, 2008.
6. Ермолин Ю.А., Фомин А.Ф. Надежность стареющих автоматизированных систем // «Мир транспорта», № 1, 2012.
7. Алексеев М.И., Ермолин Ю.А. Надежность сетей и сооружений систем водоотведения. – М.: Издательство АСВ, 2015.