

**Ротштейн А.П.**

РАНЖИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ: МЕТОД НАИМЕНЬШЕГО ВЛИЯНИЯ

В этой статье предложен новый метод ранжирования элементов при обеспечении надежности систем с применением теории нечетких отношений. Задача ранжирования сведена к автоматической классификации на основе транзитивного замыкания нечеткого отношения сходства. Это позволяет разбивать множество элементов системы на непересекающиеся классы, не различимые по важности.

Для построения нечеткого отношения сходства каждый элемент системы представляется в виде вектора влияний. Мерой сходства пары элементов является расстояние между двумя векторами. Степень влияния каждого элемента предложено вычислять методом наименьшего влияния, который использует экспертные знания о наименьшем влиянии элемента и сравнение с ним других влияний по 9-бальной шкале Саати.

Предложенный метод свободен от допущения о независимости элементов и бинарном характере надежности: «есть отказ – нет отказа». Возможными сферами применения предложенного метода являются системы с плохо определенной структурой и многофункциональными элементами: организационные, эргатические, военные и т.п.

Ключевые слова: система, надежность, важность элемента, нечеткое отношение влияния, транзитивное замыкание, кластерный анализ.

1. Введение

На ранних этапах проектирования системы возникает необходимость оценки рангов ее элементов. Ранг – это количественная характеристика важности элемента, которая используется при решении следующих задач:

- формирование требований к надежности элементов, исходя из заданных требований к надежности системы в целом;
- распределение средств на повышение надежности системы между ее элементами.

Классический подход к вычислению рангов использует чувствительность функции надежности системы к изменению надежности ее элементов. Альтернативой этому подходу являются экспертные оценки, формализуемые средствами нечеткой (fuzzy) математики.

Широко известным примером экспертного ранжирования элементов является крылатое и ставшее шутливо-ироническим выражение В.И. Ленина «о почте и телеграфе» из работы «Советы постороннего»: «... чтобы непременно были заняты а) почта, б) телеграф, в) железнодорожные станции ...» (первые, обязательные согласно Ленину, условия успешного восстания).

Идея написания этой статьи возникла в ходе дискуссии по докладу профессора И.Б. Герцбаха (Кармиель, Израиль, 2013), в котором ранги элементов использовались

для распределения средств на повышение надежности дорог и сооружений в сейсмоопасном районе.

В этой статье анализируются подходы к ранжированию элементов системы и предлагается метод вычисления рангов на основе теории нечетких отношений. Предполагается, что важность элемента определяется его влиянием на другие элементы: больше влияние – больше важность.

Исходная информация о структуре системы формализуется в виде *нечеткого отношения влияния*, которое преобразуется в *нечеткое отношение сходства* и его *транзитивное замыкание*. Это позволяет разбить множество элементов системы на классы, эквивалентные по важности.

Для вычисления степеней влияния элемента системы на другие элементы предлагается специальный метод, использующий информацию о наименьшем влиянии и сравнение с ним по 9-бальной шкале Саати. Отсюда название: *метод наименьшего влияния*.

В разделе 2 анализируются подходы к ранжированию элементов системы, исходя из причинно-следственных связей между отказами.

В разделе 3 вводится нечеткое отношение влияния как модель структуры системы.

В разделе 4 предлагается метод наименьшего влияния для формализации экспертных знаний о системе.

В разделе 5 определяется переход от нечеткого отношения влияния к нечеткому отношению сходства.

В разделе 6 приводятся формулы для транзитивного замыкания нечеткого отношения сходства и его α -уровней, позволяющие выявлять классы элементов, эквивалентных по важности.

В разделе 7 рассматривается пример, иллюстрирующий алгоритм применения предложенного метода для системы из 5-ти элементов.

2. Внешний и внутренний подходы

Известные подходы к ранжированию элементов системы можно разделить на два класса, исходя из типа причинно-следственных связей между отказами. Назовем эти подходы внешним и внутренним (табл. 1).

Таблица 1. Подходы к ранжированию элементов

Подход	Причины	Следствия
Внешний	Отказ i -го элемента	Отказ системы
Внутренний	Отказ i -го элемента	Отказ j -го элемента

2.1. Внешний подход

Этот подход восходит к работе [1] и использует чувствительность надежности системы к изменению надежности ее элементов (см. также [2]). Рассмотрим функцию надежности

$$P_s = f(P_1, P_2, \dots, P_n), \quad (1)$$

которая связывает вероятности безотказной работы системы (P_s) и ее элементов (P_i). Представим эту функцию в виде ряда:

$$P_s = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i P_i + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} P_i P_j + \dots, \quad (2)$$

коэффициенты которого имеют смысл частных производных:

$$b_i = \frac{\partial P_s}{\partial P_i}, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 P_s}{\partial P_i \partial P_j}. \quad (3)$$

Коэффициент b_i в (3) соответствует индексу важности i -го элемента (reliability importance index), введенному в работе [1]. Коэффициент b_{ij} в (3) соответствует индексу важности совместного влияния i -го и j -го элементов (joint reliability importance), введенному в работе [3].

Для систем, надежность которых моделируется методом Monte-Carlo, индексы важности (3) вычисляются в работах [4, 5].

В работе [6] рассматривается метод вычисления важности элементов системы непосредственно на основе логической (или структурной [2]) функции

$$\alpha_s = f_L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (4)$$

где $\alpha_s(\alpha_i) = 1(0)$, если система (i -й элемент) работает (отказал), f_L – булева функция.

Ограничения рассмотренной группы методов (внешний подход) состоят в следующем:

1. Бинарный характер модели надежности (1 – нет отказа, 0 – есть отказ) не позволяет учитывать промежуточные состояния элементов, которые лишь снижают эффективность работы системы, но не приводят к ее полному отказу.

2. Предположение о независимости элементов не позволяет учитывать влияние нарушений в работе элементов друг на друга.

3. Адекватность модели надежности (1), на основе которой вычисляются индексы важности (3), сильно зависит от квалификации эксперта, записывающего структурную функцию (4). Это порождает противоречие между строгостью операции дифференцирования (3) и субъективизмом модели (1), к которой эта операция применяется. В результате, получаемые индексы важности элементов могут не обладать свойством робастности: они слишком чувствительны к изменениям в структуре и параметрах модели (1). В общем виде такие противоречия Л. Заде (L. Zadeh) сформулировал как *принцип несовместимости* (incompatibility) высокой сложности и высокой точности [7]. Применительно к индексам важности (3) это означает, что с повышением сложности и неопределенности системы, стремление к точности вычислений теряет смысл. Здесь уместно напомнить известный афоризм: «математики делают все так, как нужно, но только то, что можно».

2.2. Внутренний подход

Этот подход восходит к оценке значимости элементов на основе теории отношений и графов. Перенос теории

отношений в теорию надежности впервые выполнил В.И. Нечипоренко [8, 9].

Внутренний подход не требует построения структурной функции (4) и функции надежности (1). Он опирается на информацию о структуре системы, т.е. состав ее элементов и связей между ними. При этом могут использоваться знания о влиянии нарушений в одних элементах на возникновение нарушений в других элементах. Например, «уход параметров i -го элемента приводит к уходу параметров j -го элемента, что в свою очередь приводит к отказу k -го элемента, и т.д.». Таким образом, может учитываться «эффект домино».

Носителем информации для вычисления рангов в [8,9] служит матрица связей

$$A = [\alpha_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

в которой $\alpha_{ij} = 1(0)$, если i -й элемент связан (не связан) с j -м элементом.

Ранг i -го элемента вычисляется как сумма элементов i -й строки матрицы

$$D = A + A^2, \quad (6)$$

которая учитывает одношаговые и двухшаговые влияния нарушений в i -м элементе системы.

Ограничение подхода [8, 9] состоит в бинарном характере матрицы (5), которая не позволяет учитывать силу связей (или влияний) между элементами. Поэтому возникает интерес к обобщению этого подхода на случай нечетких отношений [7]. Следует заметить, что соотношение (6) по своей структуре напоминает отношение транзитивного замыкания (transitive closure), которое используется в кластерном анализе [10]. Это наводит на мысль, что задача ранжирования элементов может формулироваться как задача автоматической классификации, которая состоит в разбиении множества элементов на классы, эквивалентные по важности.

Ниже предлагается решение задачи ранжирования элементов на основе нечеткого транзитивного замыкания [11, 12] и специальных процедур построения нечетких отношений влияния и сходства.

3. Нечеткое отношение влияния

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество элементов системы. Влияние элемента $x_i \in X$ на остальные элементы зададим нечетким множеством:

$$I_i = \left\{ \frac{\mu_{i1}}{x_1}, \frac{\mu_{i2}}{x_2}, \dots, \frac{\mu_{in}}{x_n} \right\}, \quad (7)$$

где μ_{ij} – число в интервале $[0,1]$, которое характеризует степень влияния элемента $x_i \in X$ на элемент $x_j \in X$; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Будем предполагать, что влияние элемента $x_i \in X$ на самого себя отсутствует, т.е.

$$\mu_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Совокупность степеней влияния μ_{ij} из (7) для всех элементов $x_i \in X$ образует *нечеткое отношение влияния* I , заданное на декартовом произведении $X \times X$, т.е. $I \subset X \times X$:

$$I = \left[\frac{\mu_{ij}}{(x_i, x_j)} \right], i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Число μ_{ij} , которое ставится в соответствие каждой паре элементов (x_i, x_j) , может задаваться экспертно, либо методом *наименьшего влияния*, который предлагается ниже. Заметим, что подобная процедура вычисления степеней принадлежности использовалась ранее в работе [13].

4. Метод наименьшего влияния

Пусть f_{ij} – сила влияния элемента $x_i \in X$ на элемент $x_j \in X$, причем выполняется условие: «чем больше сила f_{ij} , тем больше степень влияния μ_{ij} », т.е. имеет место соотношение:

$$\frac{\mu_{i1}}{f_{i1}} = \frac{\mu_{i2}}{f_{i2}} = \dots = \frac{\mu_{il}}{f_{il}} = \dots = \frac{\mu_{in}}{f_{in}}. \quad (10)$$

Предполагается, что в соответствии с (8):

$$f_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Пусть x_l – элемент, на который элемент x_i имеет наименьшее влияние. Из (10) имеем:

$$\mu_{i1} = \mu_{il} \frac{f_{i1}}{f_{il}}, \mu_{i2} = \mu_{il} \frac{f_{i2}}{f_{il}}, \dots, \mu_{in} = \mu_{il} \frac{f_{in}}{f_{il}}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в требование

$$\mu_{i1} + \mu_{i2} + \dots + \mu_{in} = 1, i = 1, 2, \dots, n,$$

получаем наименьшую степень влияния элемента $x_i \in X$ в системе:

$$\mu_{il} = \left(\frac{f_{i1}}{f_{il}} + \frac{f_{i2}}{f_{il}} + \dots + \frac{f_{in}}{f_{il}} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Соотношения (13) и (12) позволяют вычислять степени влияния в нечетком отношении (9) путем сравнения сил влияний f_{ij} с наименьшей силой влияния f_{il} для каждого элемента $x_i \in X$. Для этого используется 9-бальная шкала Саати [14]

$$\frac{f_{ij}}{f_{il}} = 1, 3, 5, 7, 9, \quad (14)$$

если влияние « ij » (элемента x_i на элемент x_j) по сравнению с наименьшим влиянием « il » (элемента x_i на элемент x_l): 1 – такое же, 3 – немного больше, 5 – больше, 7 – значительно больше, 9 – абсолютно больше (возможны промежуточные оценки: 2, 4, 6, 8).

5. Нечеткое отношение сходства

Меру сходства по степени влияния между элементами $x_i \in X$ и $x_j \in X$ определим величиной

$$r_{ij} = 1 - d_{ij}, \quad (15)$$

где d_{ij} – расстояние между нечеткими множествами влияния элементов x_i и x_j :

$$I_i = \left\{ \frac{\mu_{i1}}{x_1}, \frac{\mu_{i2}}{x_2}, \dots, \frac{\mu_{in}}{x_n} \right\},$$

$$I_j = \left\{ \frac{\mu_{j1}}{x_1}, \frac{\mu_{j2}}{x_2}, \dots, \frac{\mu_{jn}}{x_n} \right\}.$$

Для вычисления d_{ij} могут использоваться относительные расстояния по Хеммингу ($d_{ij}^{(h)}$) или по Евклиду ($d_{ij}^{(e)}$):

$$d_{ij}^{(h)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\mu_{ik} - \mu_{jk}|, \quad (16)$$

$$d_{ij}^{(e)} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\mu_{ik} - \mu_{jk})^2}, \quad (17)$$

Совокупность величин r_{ij} для всех пар $(x_i, x_j) \in X \times X$ образует нечеткое отношение сходства $R \subset X \times X$:

$$R = [r_{ij} / (x_i, x_j)], \quad (18)$$

которое обладает свойствами:

- (а) *рефлексивность*, т.е. $r_{ij} = 1$, для всех $x_i \in X$,
- (б) *симметричность*, т.е. $r_{ij} = r_{ji}$, для всех $x_i, x_j \in X$.

6. Классификация и ранжирование элементов

Для разбиения множества X на непересекающиеся классы элементов, сходных по степени влияния, необходимо придать исходному нетранзитивному отношению сходства R свойство транзитивности. Такое преобразование обеспечивает операция транзитивного замыкания нечеткого отношения, впервые рассмотренная в [11, 12].

Транзитивным замыканием отношения R называется отношение $\hat{R}$, определяемое следующим образом:

$$\hat{R} = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^k \cup \dots, \quad (19)$$

где отношения R^k определяются рекурсивно:

$$R^1 = R, \quad R^k = R^{k-1} \circ R, \quad k = 2, 3, \dots, n;$$

$\cup$ – операция объединения нечетких отношений;

$\circ$ – операция нечеткой композиции.

Операции над матрицами отношений выполняются по схеме:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \vee e & b \vee f \\ c \vee g & d \vee h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((a \wedge e) \vee (b \wedge g)) \vee ((a \wedge f) \vee (b \wedge h)) \\ ((c \wedge e) \vee (d \wedge g)) \vee ((c \wedge f) \vee (d \wedge h)) \end{bmatrix}$$

$$\wedge = \min, \quad \vee = \max.$$

Эта схема вычислений, которая для простоты изложения показана на примере матрицы 2×2 , сохраняется для матриц произвольной размерности.

Естественно предположить, что ранг элемента x_i зависит от количества его связей с другими элементами системы, сходными по степени влияния, $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому, учитывая транзитивные связи, ранг элемента определим суммой элементов i -й строки матрицы отношения $\hat{R}$ (19).

Классы элементов, сходных по степени влияния, образуются путем разложения отношения $\hat{R}$ по α -уровням (срезам):

$$\hat{R} = \bigcup_{\alpha} \alpha \hat{R}_{\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1], \quad (20)$$

где $\hat{R}_{\alpha}$ – α -уровень отношения $\hat{R}$.

Для нечеткого отношения $\hat{R}$ (19), записанного в виде

$$\hat{R} = \left[\frac{\hat{r}_{ij}}{(x_i, x_j)} \right], \quad (x_i, x_j) \in X \times X, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

обычное отношение $\hat{R}_{\alpha}$ состоит из таких пар (x_i, x_j) , у которых степень принадлежности не меньше, чем α , т.е.

$$\hat{R}_{\alpha} = \left[\frac{1(0)}{(x_i, x_j)} \right], \quad \text{здесь } r_{ij} \geq \alpha \quad (r_{ij} < \alpha). \quad (21)$$

7. Пример

Рассмотрим систему из 5-ти элементов, т.е. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Экспертная информация, необходимая для вычисления отношения (9) методом наименьшего влияния, представлена в табл.2.

Таблица 2. Исходные данные для метода наименьшего влияния

x_i	x_l	ij / il				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	x_2					
x_2	x_1					
x_3	x_5					
x_4	x_2					
x_5	x_1					

Второй столбец табл.2 (x_l) содержит элементы, на которые соответствующие элементы первого столбца (x_i) имеют наименьшее влияние: x_1 наименее влияет на x_2 , x_2 наименее влияет на x_1 , ..., x_5 наименее влияет на x_1 . Источником этой информации является эксперт.

Ячейки табл.2 содержат экспертные сравнения сил влияния f_{ij} с наименьшими силами влияния f_{il} . Для краткости, вместо f_{ij}/f_{il} записано ij/il :

– запись ??? обозначает, что влияние элемента x_1 на элемент x_3 *больше* (5), чем влияние x_1 на x_2 ;

– запись ??? обозначает, что влияние элемента x_5 на элемент x_3 *абсолютно больше* (9), чем влияние x_5 на x_1 , и т.д.

Нулевые значения в ячейках табл.2 соответствуют тому, что $f_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, 5$.

Пользуясь данными из табл.2 и формулами (13) и (12), вычислим степени влияния μ_{ij} для отношения (9).
Здесь $\mu_{ii} = 0$.

Для элемента x_1 ($i = 1, \ell = 2$) имеем:

$$\mu_{11} = 0,$$

$$\mu_{12} = \left(\frac{f_{11}}{f_{12}} + \frac{f_{12}}{f_{12}} + \frac{f_{13}}{f_{12}} + \frac{f_{14}}{f_{12}} + \frac{f_{15}}{f_{12}} \right)^{-1} = \frac{1}{0+1+5+3+1} = \frac{1}{10},$$

$$\mu_{13} = \mu_{12} \frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{5}{10},$$

$$\mu_{14} = \mu_{12} \frac{f_{14}}{f_{12}} = \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{3}{10},$$

$$\mu_{15} = \mu_{12} \frac{f_{15}}{f_{12}} = \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10}.$$

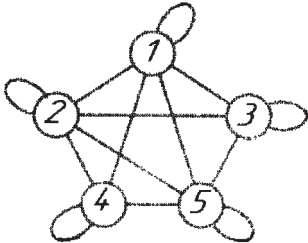
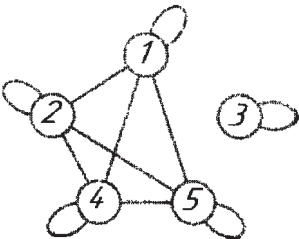
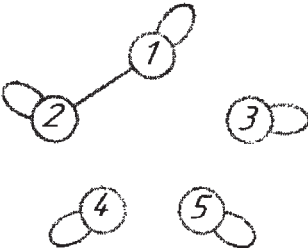
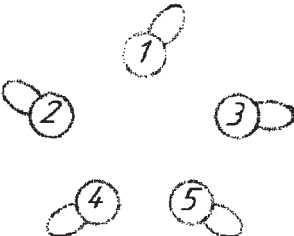
Аналогично получены остальные степени принадлежности, которые образуют нечеткое отношение влияния:

$$I = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 1/10 & 5/10 & 3/10 & 1/10 & \max = 5/10 \\ x_2 & 1/14 & 0 & 9/14 & 3/14 & 1/14 & \max = 9/14 \\ x_3 & 9/15 & 3/15 & 0 & 2/15 & 1/15 & \max = 9/15 \\ x_4 & 1/12 & 1/12 & 7/12 & 0 & 3/12 & \max = 7/12 \\ x_5 & 1/22 & 5/22 & 9/22 & 7/22 & 0 & \max = 9/22 \end{array} \quad (22)$$

Для нормализации отношения (22) разделим элементы каждой строки на максимальное значение и получим:

$$I = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 0,2 & 1 & 0,6 & 0,2 \\ x_2 & 0,11 & 0 & 1 & 0,33 & 0,11 \\ x_3 & 1 & 0,33 & 0 & 0,22 & 0,11 \\ x_4 & 0,14 & 0,14 & 1 & 0 & 0,43 \\ x_5 & 0,11 & 0,56 & 1 & 0,78 & 0 \end{array} \quad (23)$$

Таблица 3. Отношения α -уровня и их графы

α	R_α					Граф	
0,53		1	2	3	4	5	
	1	1	1	1	1	1	
	2	1	1	1	1	1	
	3	1	1	1	1	1	
	4	1	1	1	1	1	
	5	1	1	1	1	1	
0,83		1	2	3	4	5	
	1	1	1	0	1	1	
	2	1	1	0	1	1	
	3	0	0	1	0	0	
	4	1	1	0	1	1	
	5	1	1	0	1	1	
0,87		1	2	3	4	5	
	1	1	1	0	0	0	
	2	1	1	0	0	0	
	3	0	0	1	0	0	
	4	0	0	0	1	0	
	5	0	0	0	0	1	
1		1	2	3	4	5	
	1	1	0	0	0	0	
	2	0	1	0	0	0	
	3	0	0	1	0	0	
	4	0	0	0	1	0	
	5	0	0	0	0	1	

Нечеткое отношение сходства (18), полученное из (23), имеет вид:

$$R = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 1 & 0,87 & 0,48 & 0,76 & 0,83 \\ x_2 & 0,87 & 1 & 0,53 & 0,83 & 0,44 \\ x_3 & 0,48 & 0,53 & 1 & 0,48 & 0,44 \\ x_4 & 0,79 & 0,83 & 0,48 & 1 & 0,67 \\ x_5 & 0,83 & 0,78 & 0,44 & 0,67 & 1 \end{array} \quad (24)$$

Степени принадлежности в (24) получены из (23) с использованием расстояния по Хеммингу (16). Например, $r_{12} = 1 - d_{12}$, где

$$\begin{aligned} d_{12} &= \frac{1}{5}[(0, 0, 2, 1, 0, 6, 0, 2) - (0, 11, 0, 1, 0, 33, 0, 1)] = \\ &= \frac{1}{5}[|0 - 0,11| + |0,2 - 0| + |1 - 1| + |0,6 - 0,33| + |0,2 - 0,1|] = \\ &= \frac{1}{5}[0,11 + 0,1 + 0 + 0,27 + 0,09] = 0,13 \end{aligned}$$

Для получения транзитивного замыкания отношения сходства (19) из отношения (24), находим:

$$R^2 = R \circ R = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 1 & 0,87 & 0,53 & 0,83 & 0,83 \\ x_2 & 0,87 & 1 & 0,53 & 0,83 & 0,83 \\ x_3 & 0,53 & 0,53 & 1 & 0,53 & 0,53 \\ x_4 & 0,83 & 0,83 & 0,53 & 1 & 0,79 \\ x_5 & 0,83 & 0,83 & 0,53 & 0,79 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} R^3 &= R^2 \circ R = \\ &= \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 1 & 0,87 & 0,53 & 0,83 & 0,83 \\ x_2 & 0,87 & 1 & 0,53 & 0,83 & 0,83 \\ x_3 & 0,53 & 0,53 & 1 & 0,53 & 0,53 \\ x_4 & 0,83 & 0,83 & 0,53 & 1 & 0,83 \\ x_5 & 0,83 & 0,83 & 0,53 & 0,83 & 1 \end{array} = \\ &= R^4 = R^5 = \dots = R^\infty. \end{aligned} \quad (25)$$

Поэтому транзитивное замыкание (19) в нашем случае имеет вид:

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^k \cup \dots = R^3, \quad (26)$$

т.е. совпадает с отношением (25).

Суммируя значения строк матрицы (25), получаем количественные значения рангов элементов:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 + 0,87 + 0,53 + 0,83 = 4,06, \\ \rho_2 &= 4,06, \rho_3 = 3,12, \rho_4 = 4,02, \rho_5 = 4,02. \end{aligned} \quad (27)$$

Нечеткое отношение (26) можно разложить по α -уровням следующим образом:

$$\hat{R} = \bigcup_{\alpha} \alpha R_{\alpha} = 0,53R_{0,53} \cup 0,83R_{0,83} \cup 0,87R_{0,87} \cup R_1,$$

где четкие отношения α -уровня R_{α} и их графы представлены в табл. 3. Здесь для краткости элемент x_i обозначается символом i , $i = 1, 2, \dots, 5$. Четкие отношения α -уровня (табл. 3) образуют классы элементов, эквивалентных по важности (табл. 4). Дерево декомпозиции множества элементов системы на классы эквивалентности представлено на рис. 1.

Таблица 4. Классы элементов, эквивалентных по важности

Уровень	Число классов	Классы элементов
$\alpha = 0,53$	1	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
$\alpha = 0,83$	2	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_3\}$
$\alpha = 0,87$	4	$\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}$
$\alpha = 1$	5	$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}$

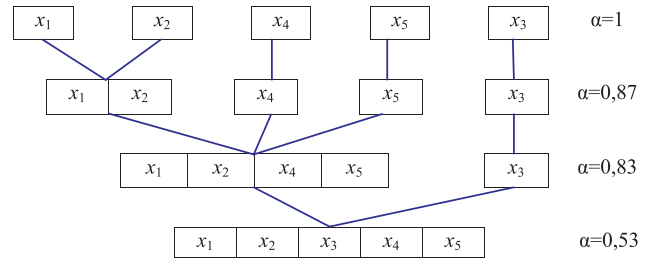


Рис. 1 Дерево декомпозиции на классы эквивалентности

Число α может интерпретироваться как уровень определенности наших знаний о системе, а $(1 - \alpha)$ – уровень неопределенности. Естественно, чем сложнее система и чем большее число реальных не учитывается при моделировании, тем больше неопределенность и ниже число α .

Из рис. 1 видно, что при максимальной определенности ($\alpha = 1$) каждый из элементов x_i представляет собой уникальный класс важности. Однако на уровне $\alpha = 0,53$ все элементы системы не различимы по рангам. С учетом количественных оценок (27) для практических расчетов можно выбрать уровень определенности $\alpha = 0,83$, на котором:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_4 = \rho_5 \approx 4, \rho_3 \approx 3.$$

Если C_0 – допустимые затраты на обеспечение надежности системы, то с учетом рангов элементов эти затраты должны распределяться так:

$$\sum_{i=1}^5 C_i = C_0, \quad C_1 = C_2 = C_4 = C_5 = \frac{4}{19} C_0, \quad C_3 = \frac{3}{19} C_0.$$

Аналогично, если λ_0 – требуемая интенсивность отказов системы, то для экспоненциального закона надеж-

ности и простейшей последовательной схемы получаем требуемые λ -характеристики элементов:

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i = \lambda_0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{4}{19} \lambda_0, \quad \lambda_3 = \frac{3}{19} \lambda_0.$$

8. Заключение

Ранжирование элементов системы на этапе ее надежного проектирования может выполняться с применением двух принципиально разных подходов: внешнего и внутреннего.

Внешний подход использует чувствительность надежности системы к изменению надежности ее элементов. Внутренний подход основан на знаниях о влиянии отказов каждого из элементов на отказы других элементов.

В рамках внутреннего подхода в этой статье предложен новый метод ранжирования элементов с применением теории нечетких отношений. Задача ранжирования сведена к автоматической классификации на основе транзитивного замыкания нечеткого отношения сходства. Это позволяет разбивать множество элементов системы на непересекающиеся классы, не различимые по важности.

Для построения нечеткого отношения сходства каждый элемент системы представляется в виде вектора влияний. Мерой сходства пары элементов является расстояние между двумя векторами. Степень влияния каждого элемента на другие элементы предложено вычислять методом наименьшего влияния. Этот метод использует экспертные знания о наименьшем влиянии элемента и сравнение с ним других влияний по 9-бальной шкале Саати.

Предложенный метод свободен от ограничений, присущих методам внешнего подхода, которые связаны с допущениями о независимости элементов и бинарным характером надежности: «есть отказ – нет отказа». Возможными сферами применения предложенного метода являются системы с плохо определенной структурой и многофункциональными элементами: организационные, эргатические, военные и т.п.

Литература

1. **Birnbaum Z.W.** On the importance of different components in a multicomponent system. In P.R.Krishnaiah (ed), Multivariate analysis – 2, New York : Academic Press, 1969, pp. 581-592
2. **Barlow R. and Proschan F.** Statistical theory of reliability and life testing. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975
3. **Hong J.S. and Lie C.H.** Joint reliability importance of two edges in undirected network. IEEE transaction on reliability 42 (1), 1993, pp.17-23
4. **Gertsbakh I. B. and Shpungin Y.** Combinatorial approach to component importance indexes in coherent systems. Probability in the Engineering and Information Sciences, 2011. Pp.1-12
5. **Gertsbakh I. and Shpungin Y.** Network reliability and resilience. Springer Heidelberg, 2011
6. **Ryabinin I. A.** Reliability of engineering systems. Principles and Analysis. Moscow . Mir, 1976
7. **Zadeh L. A.** The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning. Memorandum ERL-M411, Berkely, October , 1973
8. **Нечипоренко В.И.** Структурный анализ и методы построения надежных систем. М. Советское радио , 1968
9. **Нечипоренко В.И.** Структурный анализ систем. Эффективность и надежность . М. Советское радио , 1977
10. **Парницкий Г.** Основы статистической информатики. М. Финансы и статистика , 1981
11. **Zadeh L.** Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences, Vol.3, 1971, pp. 177-200
12. **Tamura S., Higuchi S. and Tanaka K.** Pattern classification based on fuzzy relations, IEEE transaction on Systems, man and Cybernetics, vol. SMC-1, Nu.1, 1971, pp.61-66
13. **Rotshtein A., Shnaider E., Schneider M. and Kandel A.** Fuzzy multicriterial selection of alternatives : The worst-case method, International journal of intelligent systems, 01/2010, pp.948-957
14. **Saaty T.L.** Mathematical models of arms control and disarmament. John Willey & Sons, 1968