



Каштанов В.А.

УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРОЙ В МОДЕЛЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ

С использованием управляемых полумарковских процессов исследуется оптимальная стратегия управления структурой в моделях массового обслуживания и надежности. Доказано, что оптимальную стратегию можно искать в классе пороговых стратегий.

Ключевые слова: управляемый полумарковский процесс, вырожденные и пороговые стратегии управления, системы массового обслуживания, модели надежности и техническое обслуживание.

Введение

Модели массового обслуживания весьма часто используются для адекватного описания процессов функционирования многих реальных технических и экономических систем. Характерными особенностями систем массового обслуживания (СМО) являются: наличие входного потока заявок, наличие обслуживающих приборов, очереди, из которой заявки поступают на обслуживающие приборы.

Задачи исследования СМО аналогичны задачам технического обслуживания, которые являются неотъемлемой частью математической теории надежности, поскольку перечисленные выше компоненты присущи процессу функционирования любой технической системы. Поток заявок на обслуживание образуют элементы системы (подсистемы), оказавшие в процессе функционирования и требующие восстановления, каналы обслуживания – это ремонтные бригады, осуществляющие ремонт.

При исследовании СМО и надежности важное место занимают проблемы оптимизации. Учитывая характерные особенности исследуемых систем, задача оптимизации может быть поставлена для всех элементов, определяющих систему. В частности, управление структурой системы рассматривается как изменение числа задействованных каналов обслуживания (ремонтных бригад) и числа мест для ожидания.

Следуя общим принципам постановки задачи управления, определим: *объект управления* – управляемый процесс, описывающий эволюцию системы во времени, *стратегии управления* – множество решений и правило принятия этих решений, и *показатель*, характеризующий качество управления.

Задача сводится к определению стратегии управления, для которой показатель, характеризующий качество управления, принимает экстремальное значение.

В настоящей работе использована модель управляемого полумарковского процесса [1] для построения оптимальной стратегии управления структурой. Управляемый полумарковский процесс определяется как процесс, имеющий две ступенчатые компоненты $X(t) = \{\xi(t), u(t)\}$, $\xi(t) \in E$, $u(t) \in U$, где E – пространство состояний, U – пространство управлений, причем моменты разрывов компонент совпадают и в эти моменты изменения состояний процесс обладает Марковским свойством.

Исходные вероятностные характеристики:

- полумарковское ядро $Q_{ij}(t, u) = P\{\xi_{n+1}=j, \theta_{n+1} \leq t/\xi_n=i, u_{n+1}=u\}$, которое равно условной вероятности того, что следующее значение первой компоненты равно j , $\xi_{n+1}=j$, и произойдет этот переход до момента t , $\theta_{n+1} \leq t$, при условии, что предыдущее значение первой компоненты равно i , $\xi_n=i$, и принято решение u , $u_{n+1}=u$;

- меры $G_i(B)$, $i \in E$, $u \in U$, $B \in A$, которые задают стратегию управления (правило выбора решений). Эти меры определены на измеримых пространствах управлений (U, A) ,

Показатель качества определяется функциями $R_{ij}(t, u)$, $i, j \in E$, $u \in U$, $0 \leq t < \infty$, которые равны математическому ожиданию накопленного эффекта за время пребывания СМО в состоянии i при условии, что через время t она перейдет в состояние j и было принято решение u .

Введенные выше характеристики позволяют определить математическое ожидание накопленного эффекта за время пребывания процесса в состоянии i

$$s_i = \sum_{j \in E} \int_{u \in U_i} \int_0^\infty R_{ij}(x, u) dQ_{ij}(x, u) G_i(du) \quad (1)$$

и математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса в состоянии i

$$m_i = \sum_{j \in E} \int_{u \in U_i} x dQ_{ij}(x, u) G_i(du). \quad (2)$$

В работах [1, 2, 3] доказаны следующие утверждения:

- Если вложенная цепь Маркова неприводима, то для математического ожидания $S_i(t)$ накопленного за время t эффекта при условии старта из состояния $i \in E$ справедливо асимптотическое равенство при $t \rightarrow \infty$ $S_i(t) = St + o(t)$;

- Зависимость от исходных характеристик функционала S определяется равенством

$$S(\vec{G}) = \frac{\sum_{i=1}^N s_i \pi_i}{\sum_{i=1}^N m_i \pi_i}, \quad (3)$$

где через π_i , $i \in E$ обозначено стационарное распределение вложенной цепи Маркова, которое является нормированным решением алгебраической системы уравнений [4]

$$\begin{aligned} \pi_i &= \sum_{j \in E} \pi_j p_{ji}, \quad \sum_{j \in E} \pi_j = 1, \\ p_{ij} &= \int_{U_i} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t, u) \right) G_i(du); \end{aligned} \quad (4)$$

- Функционал $S(\vec{G})$ есть дробно-линейный функционал относительно распределений $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_N)$, определяющих Марковскую стратегию управления;

- Если экстремум дробно-линейного функционала существует на множестве допустимых стратегий и все вырожденные стратегии допустимы, то этот экстремум достигается на множестве вырожденных стратегий.

Эти математические результаты используем при исследовании конкретных управляемых моделей массового обслуживания и надежности. В частности, дальнейшие выкладки проведем сразу для вырожденных стратегий управления.

Итак, определение полумарковского ядра и соотношения (1) – (4) формируют последовательность этапов исследования конкретных моделей.

Постановка задачи

В настоящем разделе будем исследовать СМО, на вход которой поступает рекуррентный поток требований или процесс восстановления. Интервалы между соседними моментами поступления требований обозначим через ξ_i , $i=1, 2, \dots, k, \dots$, а функцию распределения этих интервалов обозначим через $F(x) = P\{\xi_i \leq x\}$, $F(0+0)=0$. Последнее условие означает ординарность входного потока. Длительности обслуживания η имеют экспоненциальное распределение $G(x) = P\{\eta \leq x\} = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$. В системе нет очереди. В отличие от классических постановок будем считать структуру системы переменной – число функционирующих каналов в системе меняется, но не может превышать величины η , $0 < \eta < \infty$.

Решение об изменении числа функционирующих каналов в системе принимается в моменты t_k – моменты прихода очередного требования. Это значит, что в интервале времени $[t_k, t_{k+1})$ в систему требования не поступают, а в момент t_{k+1} поступит только одно требование. Число мест для ожидания равно нулю, поэтому пришедшее в момент t_{k+1} требование теряется, если в момент его прихода все имеющиеся в системе каналы обслуживания заняты, и начинает обслуживаться, если в момент t_{k+1} есть свободный канал. Наличие в момент t_{k+1} свободного канала обслуживания увязано с процессом освобождения занятых каналов в интервале времени $[t_k, t_{k+1})$ и принятием решений о числе функционирующих каналов в момент t_k .

Будем предполагать, что, если в момент t_k был подключен свободный канал, то все освободившиеся на периоде $[t_k, t_{k+1})$ каналы отключаются; если в момент t_k не был подключен свободный канал, то из освободившихся на периоде $[t_k, t_{k+1})$ каналов включенным остается первый, а остальные отключаются; если же на периоде $[t_k, t_{k+1})$ ни один канал не освободился, то пришедшее в момент t_{k+1} теряется.

Обозначим через $u_0=0$ решение оставить в системе число каналов, равное числу требований, находящихся в системе в момент t_k+0 , через $u_1=1$ решение – помимо каналов, занятых обслуживанием имеющихся в момент t_k+0 требований, оставить еще один дополнительный свободный канал (достаточно оставлять свободным только один канал, так как в момент t_{k+1} поступит только одно требование).

Если в системе в момент принятия решения в СМО находится i требований, то с вероятностью $0 \leq p_i \leq 1$ принимается решение $u_0=0$ и с вероятностью $0 \leq q_i \leq 1$ принимается решение $u_1=1$, $p_i+q_i=1$, $i=0,1,2,\dots,n$. При $i=n$ имеем $p_n=1$, $q_n=0$ в силу ограниченности общего числа каналов величиной n . Если использовать математическую терминологию, при постановке задачи сначала используется класс рандомизированных стратегий управления [1, 2].

Введем стоимостные характеристики, которые определяют функционал, характеризующий качество функционирования и управления. Пусть: c_0 – прибыль за одно обслуженное требование; c_1 – плата за один час работы задействованного канала; c_2 – плата за один час простоя свободного канала, c_3 – плата за потерю одного требования.

Описанная выше модель полностью укладывается в модель дискретного управления полумарковским процессом [1].

Решение задачи

1. *Построение объекта управления.* Объектом управления будет полумарковский процесс $X(t)$, описывающий эволюцию исследуемой системы массового обслуживания во времени. Для его определения введем в рассмотрение последовательность $t_0=0$, t_k , $k=1,2,\dots$, $t_k \leq t_{k+1}$, соседних моментов поступления заявок в систему. Определим случайный процесс $X(t)$, положив $X(t)=i$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, если в момент t_k+0 в системе находится на обслуживании i заявок. Из этого определения следует, что введенный выше случайный процесс принимает значения из множества $E=\{0,1,2,\dots,n\}$. Заметим, что состояние $i=0$ реализуется тогда, когда в системе не было требований и пришедшее требование потерялось. Если известно число заявок в системе в момент поступления очередного требования, то при принятых предположениях этот момент является Марковским, поскольку распределение интервала времени, через которое поступит следующая заявка, не зависит от прошлого и распределение числа обслуженных в этом интервале времени заявок так же не зависит от прошлого в силу свойства отсутствия последствия у экспоненциального распределения. Таким образом, справедливо утверждение, что процесс $X(t)$ является полумарковским.

2. *Определение полумарковской матрицы.* Для исследуемой модели элементы полумарковской матрицы определяются равенствами при $i \in E$

$$Q_{01}(t,1) = F(t),$$

$$Q_{ij}(t,1) = \int_0^t C_i^{j-1} e^{-(j-1)\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{i-j+1} dF(x),$$

$$i = (0, 1, \dots, n-1), \quad 0 < j \leq i+1;$$

$$Q_{ii}(t,0) = \int_0^t [e^{-i\mu x} + i e^{-(i-1)\mu x} (1 - e^{-\mu x})] dF(x),$$

$$i = (0, 1, \dots, n);$$

$$Q_{ij}(t,0) = \int_0^t C_i^{j-1} e^{-(j-1)\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{i-j+1} dF(x),$$

$$i = (2, \dots, n), \quad 1 \leq j \leq i-1. \quad (5)$$

остальные элементы полумарковской матрицы равны нулю.

Поясним равенства (5). Если известно, какое решение принято, то известно, сколько заявок обслуживается в момент принятия решения – момент поступления заявки. Если известно, что следующее требование поступит через время x , то в силу замечательного свойства отсутствия последствия экспоненциального распределения число необслуженных заявок в момент поступления очередной заявки имеет распределение Бернулли с параметром $e^{-\lambda x}$. Отсюда и следуют равенства (5).

3. *Описание пространства управлений и пространства стратегий.* Для каждого состояния $i \in E = \{0,1,2,\dots,n\}$ пространства управлений $U_i = \{0,1\}$, $i \neq n$, $U_n = \{0\}$, состоят из двух возможных решений: включать или не включать свободный канал (кроме состояния $i=n$, когда свободных не функционирующих каналов нет), следовательно, рандомизированные стратегии определяются вероятностными распределениями (p_i, q_i) , $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, $p_i+q_i=1$, $i \neq n$, $q_n=0$. Таким образом, любую рандомизированную стратегию можно представить вектором $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n = 1)$. Пространство вырожденных стратегий с учетом равенства $p_n = 1$ можно отождествить с множеством n -мерных векторов из нулей и единиц, содержащим 2^n элементов. В дальнейшем любую вырожденную стратегию будем определять $(n+1)$ -мерным двоичным вектором, в котором единица в k -м разряде означает, что в состоянии k с вероятностью единица принимается решение поставить свободный канал обслуживания, а ноль в k -м разряде означает, что в состоянии k с вероятностью единица принимается решение не ставить свободный канал обслуживания. Заметим, что этот двоичный вектор имеет всегда значение последнего разряда равным нулю.

4. *Построение функционала.* Обозначим через $A_{ij}(t,u)$, $i, j \in E$, $t \geq 0$, $u=0, 1$ событие, состоящее в том, что процесс, пребывающий в состоянии i , перешел за время t в состояние j и было принято решение u .

Если в состоянии $i \in E$ принимается решение $u=0$ и процесс переходит в состояние j , то:

- при $i=0$ в начале периода нет обслуживаемых требований, ни один канал не работает, пришедшее требование теряется. Следовательно, при перечисленных условиях математическое ожидание накопленного эффекта, выраженного через доходы и расходы, равно $R_{00}(t,0)=c_3$. (6);

- при $i=1,2,\dots,n$, $j=i$ в начале периода i требований обслуживаются и свободных каналов нет. Переход в

состояние $j=i$ возможен в двух случаях: либо в течение этого периода не закончено обслуживание ни одного требования (в этом случае пришедшее требование теряется) – событие B_0 , либо в течение этого периода закончено обслуживание одного требования и пришедшее требование поступило на обслуживание – событие B_1 . Тогда при принятых обозначениях из равенств (5) следует

$$\begin{aligned} p_0 &= P\{B_0 / A_{ii}(t, 0)\} = \frac{e^{-i\mu t}}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}, \\ p_1 &= P\{B_1 / A_{ii}(t, 0)\} = \frac{ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее обозначим через v число обслуженных требований, а через ζ суммарное время работы каналов на периоде между соседними Марковскими моментами прихода требований. Тогда при принятых условиях математическое ожидание накопленного эффекта, выраженного через доходы и расходы, равно

$$R_{ii}(t, 0) = c_0 M[v / A_{ii}(t, 0)] + C_{ii}(t, 0) + c_3(1 - M[v / A_{ii}(t, 0)]), \quad (8)$$

где $C_{ii}(t, 0)$ – математическое ожидание затрат на работу и простой канала обслуживания на рассматриваемом периоде при тех же условиях. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} M[v / A_{ii}(t, 0)] &= \frac{ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}, \\ 1 - M[v / A_{ii}(t, 0)] &= \frac{e^{-i\mu t}}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая, что эти затраты пропорциональны суммарному времени работы каналов обслуживания, можно записать

$$C_{ii}(t, 0) = c_1 M(\zeta / A_{ii}(t, 0)) + c_2 [t - M(\zeta / A_{ii}(t, 0))],$$

где $M(\zeta / A_{ii}(t, 0))$ – математическое ожидание суммарного времени работы каналов обслуживания на рассматриваемом периоде при условии перехода процесса из состояния $i \in E$ в состояние $j \in E$ за время t . Далее заметим, что при принятых предположениях процесс, определяемый как число заявок в системе, описывается Марковским процессом чистой гибели с интенсивностями переходов $\mu_k = k\mu, j-1 \leq k \leq i$. Поэтому суммарное время работы каналов обслуживания на рассматриваемом периоде при условии перехода процесса из состояния $i \in E$ в состояние $j \in E$ за время t есть интеграл от траектории $\xi(t, \omega)$ Марковского процесса чистой гибели с интенсивностями переходов $\mu_k = k\mu, j-1 \leq k \leq i$, для которой выполняются условия либо $\{\xi(0)=i, \xi(t)=i\}$, либо $\{\xi(0)=i, \xi(t)=i-1\}$.

В [2] для условных математических ожиданий интегралов приведены соотношения, из которых следуют равенства

$$\begin{aligned} M\left(\int_0^t \xi(x, \omega) dx / \xi(t) = k, \xi(0) = n\right) &= \\ &= kt + (n-k) \frac{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t}) - te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}}, \quad k \geq n. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда с учетом соотношений (7) и (10) можно записать

$$\begin{aligned} C_{ii}(t, 0) &= c_1 M(\zeta / A_{ii}(t, 0)) + c_2 [it - M(\zeta / A_{ii}(t, 0))] = \\ &= c_1 [p_0 M\left(\int_0^t \xi(x, \omega) dx / \xi(t) = i, \xi(0) = i\right) + \\ &+ p_1 M\left(\int_0^t \xi(x, \omega) dx / \xi(t) = i-1, \xi(0) = i\right) + \\ &+ c_2 [it - p_0 M\left(\int_0^t \xi(x, \omega) dx / \xi(t) = i, \xi(0) = i\right) - \\ &- p_1 M\left(\int_0^t \xi(x, \omega) dx / \xi(t) = i-1, \xi(0) = i\right)] = \\ &= c_1 \frac{ie^{-(i-1)\mu t} + C_i^{i-(i-1)} e^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t}) \left((i-1)t + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}}\right)\right)}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})} + \\ &+ c_2 \frac{C_i^{i-(i-1)} e^{-(i-1)\mu t} \left(t - \frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right)}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}. \end{aligned} \quad (11)$$

Объединяя равенства (8), (9) и (11), получаем

$$\begin{aligned} R_{ii}(t, 0) &= c_3 + (c_0 - c_3) \frac{ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})} + \\ &+ c_2 \frac{ie^{-(i-1)\mu t} \left(t - \frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right)}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})} + \\ &+ c_1 \left[\frac{ite^{-i\mu t}}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})} + \right. \\ &\left. + \frac{ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t}) \left((i-1)t + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}}\right)\right)}{e^{-i\mu t} + ie^{-(i-1)\mu t}(1-e^{-\mu t})} \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

При $2 \leq i < n, 0 < j \leq i-1$ на периоде между соседними моментами поступления требований в систему происходит только обслуживание требований и число требований, находящихся в системе, сокращается. Число обслуженных требований положительно и равно $i-j+1 \geq 2$. Следовательно, в момент поступления нового требования будет свободный канал и требование не потеряется. Тогда

$$R_{ij}(t, 0) = c_0(i-j+1) + C_{ij}(t, 0), \quad (13)$$

где через $C_{ij}(t, 0)$ обозначено математическое ожидание затрат на работу и простой каналов обслуживания на рассматриваемом периоде при условии, что произошло событие $A_{ij}(t, 0)$. Число обслуженных требований равно $i-j+1 \geq 2$, поэтому условное математическое ожидание суммарного времени работы каналов, определяемое равенством (10), равно

$$M\left(\int_0^t \xi(x, \omega) dx / \xi(t) = j, \xi(0) = i\right) = (j-1)t + (i-j+1) \frac{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t}) - te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}}, \quad (14)$$

поскольку вновь пришедшее требование только начинает обслуживаться.

В то же время первый освободившийся канал остался включенным и простаивал в нерабочем состоянии до момента прихода очередного требования. В [2] было определено математическое ожидание $M(\xi_{i,t} / \xi(t) = j-1, \xi(0) = i)$ времени работы первого освободившегося канала

$$M(\xi_{i,t} / \xi(t) = j-1, \xi(0) = i) = \int_0^t \left(\frac{e^{-\mu x} - e^{-\mu t}}{1 - e^{-\mu t}} \right)^{i-j+1} dx. \quad (15)$$

Используя равенства (14) и (15), получаем при $2 \leq i < n$, $0 < j \leq i-1$

$$\begin{aligned} C_{ij}(t, 0) &= c_1 M\left(\int_0^t \xi(x, \omega) dx / \xi(t) = j, \xi(0) = i\right) + \\ &= c_2 \left[t - M(\xi_{i,t} / \xi(t) = j-1, \xi(0) = i) \right] = \\ &= c_1 \left[(j-1)t + (i-j+1) \frac{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t}) - te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}} \right] + \\ &+ c_2 \left[t - \int_0^t \left(\frac{e^{-\mu x} - e^{-\mu t}}{1 - e^{-\mu t}} \right)^{i-j+1} dx \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда при $2 \leq i < n$, $0 < j \leq i-1$ имеем из (13) и (16)

$$\begin{aligned} R_{ij}(t, 0) &= c_0(i-j+1) + \\ &+ c_1 \left[(j-1)t + (i-j+1) \frac{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t}) - te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}} \right] + \\ &+ c_2 \left[t - \int_0^t \left(\frac{e^{-\mu x} - e^{-\mu t}}{1 - e^{-\mu t}} \right)^{i-j+1} dx \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, вычислены все искомые математические ожидания при принятии решения $u=0$. Для остальных

значений параметров $i, j \in E$ вычислять эти характеристики нет необходимости, поскольку соответствующие элементы полумарковского ядра (5) равны нулю.

Если в состоянии $i \in E$ принимается решение $u=1$ и процесс переходит в состояние j , то:

- при $i=0$ в начале периода нет обслуживаемых требований, ни один канал не работает, включен один свободный канал, пришедшее требование не теряется, поскольку был включен свободный канал. Следовательно, при перечисленных условиях математическое ожидание накопленного эффекта, выраженного через доходы и расходы, равно

$$R_{01}(t, 1) = c_2 t; \quad (18)$$

- при $i=n$ решение о постановке свободного канала не может быть принято. При $n-1 \geq 1$ в начале периода i требований обслуживаются и есть один свободный канал, в течение периода закончено обслуживание $i-j+1 \geq 0$ требований и, наконец, пришедшее в конце периода требование не теряется. Тогда при перечисленных условиях математическое ожидание накопленного эффекта, выраженного через доходы и расходы, равно $R_{ij}(t, 1) = c_0(i-j+1) + C_{ij}(t, 1) + c_2 t$ где, как и ранее, через $C_{ij}(t, 1)$ обозначено математическое ожидание затрат на работу каналов обслуживания на рассматриваемом периоде при тех же условиях, то есть произошло событие $A_{ij}(t, 1)$.

Используя равенство (10), получаем при $n \geq i+1 \geq j \geq 1$ математическое ожидание суммарного времени работы каналов обслуживания

$$\begin{aligned} C_{i,j}(t, 1) &= c_1 \left[(j-1)t + (i-j+1) \frac{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t}) - te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}} \right] \\ \text{Следовательно,} \\ R_{ij}(t, 1) &= c_0(i-j+1) + c_2 t + \\ &+ c_1 \left[(j-1)t + (i-j+1) \frac{\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu t}) - te^{-\mu t}}{1-e^{-\mu t}} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Остальные математические ожидания вычислять не надо, поскольку соответствующие элементы полумарковского ядра равны нулю.

Вычисление математических ожиданий времени непрерывного пребывания процесса в фиксированном состоянии. Математические ожидания $m_i(u)$, $i \in E$, $u=0, 1$ с учетом равенств (2) и (5) для исследуемой модели определяются равенствами

$$m_i(u) = \int_0^\infty t dF(t) = M, \quad i \in E, \quad u = 0, 1. \quad (20)$$

Вычисление математических ожиданий дохода. Математические ожидания $s_i(u)$, $i \in E$, $u=0, 1$ прибыли за время непрерывного пребывания процесса с учетом равенств (1), (5), (12) и (17)-(19) определяются равенствами

$$\begin{aligned}
s_i(1) &= c_0 \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_2 \int_0^\infty t dF(t) + \\
&+ c_1 \int_0^\infty t e^{-\mu t} dF(t) + c_1 \frac{i}{\mu} \int_0^\infty (1 - (1 + \mu t) e^{-\mu t}) dF(t) = \\
&= c_0 \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_2 \int_0^\infty t dF(t) + c_1 \frac{i}{\mu} \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) dF(t) = \\
&= \int_0^\infty i \left(c_0 + \frac{c_1}{\mu} \right) (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_2 \int_0^\infty t dF(t), \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_i(0) &= i c_0 \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_3 \int_0^\infty e^{-i \mu t} dF(t) + \\
&+ \frac{i c_1}{\mu} \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_2 \int_0^\infty \left(t - \frac{(1 - e^{-i \mu t})}{i \mu} \right) dF(t), \quad 1 \leq i \leq n, \\
s_0(0) &= c_3, \quad i = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

Вычисление стационарных вероятностей состояний вложенной цепи Маркова.

С учетом соотношений (5) для элементов матрицы P переходных вероятностей следуют равенства

$$p_{01}(1) = Q_{01}(\infty, 1) = 1,$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}(1) &= Q_{ij}(\infty, 1) = \int_0^\infty C_i^{j-1} e^{-(j-1)\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{i-j+1} dF(x), \\
i &= (0, 1, \dots, n-1), \quad 0 < j \leq i+1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{ii}(0) &= Q_{ii}(\infty, 0) = \int_0^\infty [e^{-i \mu x} + i e^{-(i-1)\mu x} (1 - e^{-\mu x})] dF(x), \\
i &= (0, 1, \dots, n);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}(0) &= Q_{ij}(\infty, 0) = \int_0^\infty C_i^{j-1} e^{-(j-1)\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{i-j+1} dF(x), \\
i &= (2, \dots, n), \quad 1 \leq j \leq i-1. \quad (23)
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим множество вырожденных стратегий, для которых решение включать свободный канал с вероятностью единица принимается для состояний i , $0 \leq i \leq k-1$. Эти вырожденные стратегии выражаются двоичными векторами, у которых первые k компонент принимают значение единица, $k+1$ -я компонента принимает значение ноль, а остальные компоненты принимают любые значения, кроме $u_n=0$, то есть все множества вырожденных стратегий разбивается при различных $0 \leq k \leq n$ на непересекающиеся подмножества вида $(1, 1, \dots, 1, 0, u_{k+1}, \dots, u_{n-1}, 0)$. Для любой стратегии из этого множества $u_k=0$ и $p_{k,k+1}(0)=0$.

Тогда при $0 \leq k \leq n$ стационарные вероятности состояний вложенной цепи Маркова π_i , $i \in E$ удовлетворяют

системе алгебраических уравнений (5), где переходные вероятности определяются равенствами (23).

При $p_{k,k+1}(0)=0$ переходы из состояний $E_0=\{0, 1, \dots, k\}$ в состояния из множества $E_1=\{k+1, \dots, n\}$ невозможны. Следовательно, множество $E_1=\{k+1, \dots, n\}$ есть множество несущественных состояний, а множество $E_0=\{0, 1, \dots, k\}$ образует замкнутый класс сообщающихся состояний [4] и существует единственное стационарное распределение, для которого выполняются соотношения

$$\pi_i > 0, \quad i \in E_0 = (0, 1, \dots, k), \quad \pi_i = 0,$$

$$i \in E_1 = (k+1, \dots, n), \quad \sum_{i=0}^k \pi_i = 1.$$

Для определения стационарного распределения $\pi_i > 0$, $i \in E_0$, необходимо найти нормированное решение системы

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \sum_{j=0}^{k-1} \pi_j p_{j0}(1) + \pi_k p_{k0}(0), \\
\pi_i &= \sum_{j=i-1}^{k-1} \pi_j p_{ji}(1) + \pi_k p_{ki}(0), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (24)
\end{aligned}$$

которое обозначим $\pi_i^{(k)}$, $0 \leq k \leq i \leq n$.

Равенство (24) доказывает, что для любой вырожденной стратегии из выделенных множеств, стационарные распределения вложенной цепи Маркова одинаковы.

Вычисление показателя качества и выбор оптимальной стратегии управления. Для рассматриваемого случая множество состояний процесса образует один класс сообщающихся состояний. Поэтому для вычисления показателя качества используем равенство (3). Подставляем нормированное решение алгебраической системы уравнений (24) и выражения (20) – (22) в (3), получаем $S^{(0)}=c_3$, $k=0$ и при $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}
S^{(k)} &= \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^{(k)} s_i(1) + \pi_k^{(k)} s_k(0)}{\int_0^\infty x dF(x)} = \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^{(k)} \left(\int_0^\infty i \left(c_0 + \frac{c_1}{\mu} \right) (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_2 \int_0^\infty t dF(t) \right)}{\int_0^\infty x dF(x)} + \\
&+ \frac{\pi_k^{(k)}}{\int_0^\infty x dF(x)} \left(k c_0 \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_3 \int_0^\infty e^{-i \mu t} dF(t) + \right. \\
&\left. + \frac{k c_1}{\mu} \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) dF(t) + c_2 \int_0^\infty \left(t - \frac{(1 - e^{-k \mu t})}{k \mu} \right) dF(t) \right).
\end{aligned}$$

Выбираем $\max(S^{(0)}, S^{(10)}, \dots, S^{(n-1)}, S^{(n)})=S^{(k_0)}$ и номер k_0 , на котором этот максимум достигается. Таким образом, построена пороговая оптимальная стратегия, для которой надо подключать свободный канал обслуживания в состояниях $i=0, 1, \dots, k_0-1$, а в состоянии $i=k_0$ не надо подключать свободный канал обслуживания.

Литература

1. Вопросы математической теории надежности / **Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А.** и др.: Под ред. Гнеденко Б.В. – М.: Радио и связь, 1983- 376с.
2. **Каштанов В.А.** Элементы теории случайных процессов. Учебное пособие. Москва: МИЭМ, 2010. – 113 с.
3. **Джевелл В.С.** Управляемые полумарковские процессы. // Киберн. сб., новая серия. – М.: Мир, 1967, – № 4.
4. **Ширяев А.Н.** Вероятность. В 2-х кн. – 3-е изд., перераб. и доп. Кн. 2. М.: МЦНМО, 2004. 408с.